基礎解析幾何

仙女國公主

最後編輯：2026 年 3 月 10 日

目錄

表 1：向量

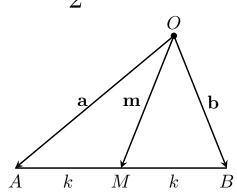
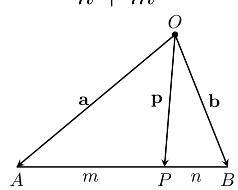
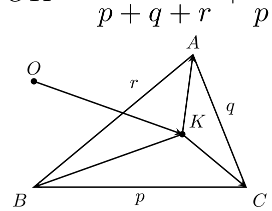
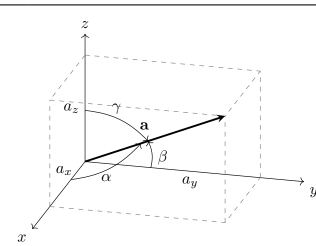
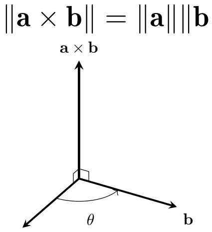
長度	$\lVert\mathbf{a}\rVert = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
運算	加法：$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 係數積：$c(a_1,a_2,a_3)=(ca_1,a_2,ca_3)$ 線性組合：$\mathbf{x}=c\mathbf{a}+d\mathbf{b}$ 三點共線時 $c+d=1$
性質	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$　　$c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$ $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$　　$(c+d)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$　　$(cd)\mathbf{a}=c(d\mathbf{a})$ $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$　　$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$
單位化	與非零向量 $\mathbf{a}$ 同向之單位向量爲 $\mathbf{u}=\mathbf{a}/\lVert\mathbf{a}\rVert$（$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$）
點積	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\lVert\mathbf{a}\rVert\lVert\mathbf{b}\rVert\cos\theta$　　$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\lVert\mathbf{a}\rVert^2$　　$(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$　　$\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}=0$
夾角	$\theta=\cos^{-1}\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lVert\mathbf{a}\rVert\lVert\mathbf{b}\rVert}$；$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\iff\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$
幾何	中點定理 $\mathbf{m}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$  分點定理 $\mathbf{p}=\dfrac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{n+m}$  三分點公式 $\overrightarrow{OK}=\dfrac{p\overrightarrow{OA}}{p+q+r}+\dfrac{q\overrightarrow{OB}}{p+q+r}+\dfrac{r\overrightarrow{OC}}{p+q+r}$ 
方向餘弦	$a_x=\lVert\mathbf{a}\rVert\cos\alpha, a_y=\lVert\mathbf{a}\rVert\cos\beta, a_z=\lVert\mathbf{a}\rVert\cos\gamma$ $\dfrac{1}{\lVert\mathbf{a}\rVert}\mathbf{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 
投影	純量投影（射影長）：$\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lVert\mathbf{a}\rVert}$；向量投影（正射影）：$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lVert\mathbf{a}\rVert^2}\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$
叉積	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}:=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$ $\lVert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rVert=\lVert\mathbf{a}\rVert\lVert\mathbf{b}\rVert\sin\theta$  代數性質： $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ $(c\mathbf{a})\times\mathbf{b}=c(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(c\mathbf{b})$ $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ $\mathbf{u}\times 0=0\times\mathbf{u}=0$ $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=0$ $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ 幾何性質： $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{a},\mathbf{b}$ $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}\iff\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ 由 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 張出之平行四邊形面積爲 $\lVert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rVert$
混合積	$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$；由 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 張出之平行六面體的體積爲 $\lvert\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\rvert$

表 2：距離的求法

平面直角坐標系	
點-點	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
點-線	$\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
二平行線間	方法一：使用公式 $\dfrac{\lvert C_2-C_1\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 方法二：其中一條直線上取一點，用點-線距離公式
空間直角坐標系	
點-點	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
點-線	方法一：不計算垂足，利用 面積 $=$ 底 $\times$ 高—— 直線上選一點 A，求 $\overrightarrow{AP}$，用叉積求由 $\overrightarrow{AP}$ 和方向向量張出之平行四邊形的面積 A，將之除以方向向量的大小即得所求距離，即 $\lVert\overrightarrow{AP}\times\mathbf{v}\rVert/\lVert\mathbf{v}\rVert$ 方法二：求垂足，用兩點間距離—— 根據參數式設垂足爲 H，計算 $\overrightarrow{PH}$，由 $\overrightarrow{PH}$ 與方向向量垂直（點積爲 0）解得垂足坐標，最後用兩點間距離公式
點-面	$\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
平行線之間	取一線上一點，接著同點-線距離求法
歪斜線之間	方法一：不計算垂足，利用平面與直線平行—— 先求包含 L_1 且與 L_2 平行的平面（因法向量垂直於方向向量，可用叉積求法向量，再取 L_1 上一點用點法式求平面），再取 L_2 上一點，用點-面距離公式 方法二：求垂足，用兩點間距離—— 根據參數式設垂足 P、Q（註：兩垂足坐標不要用同一個未知數），得 $\overrightarrow{PQ}$，因垂直而由 $\overrightarrow{PQ}$ 與兩直線的方向向量內積爲 0 求出垂足坐標，最後用兩點間距離公式
線-面	線上取一點，用點-面距離公式
平行面之間	方法一：使用公式 $\dfrac{\lvert D_2-D_1\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 方法二：一面上取一點，用點-面距離公式

表 3：中點與分點公式

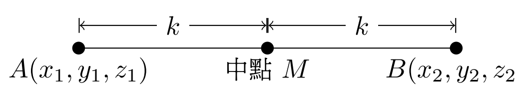
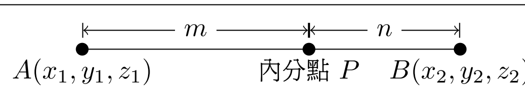
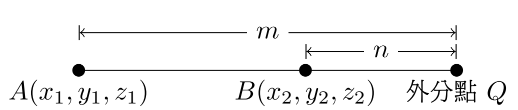
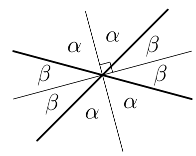
中點	$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$	
內分點	$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{n+m},\dfrac{ny_1+my_2}{n+m},\dfrac{nz_1+mz_2}{n+m}\right)$	
外分點	$\left(\dfrac{nx_1-mx_2}{n-m},\dfrac{ny_1-my_2}{n-m},\dfrac{nz_1-mz_2}{n-m}\right)$ 註：外分點可當內分點做 （視 B 爲內分點，$\overline{AB}$ 佔的比例取 $m-n$）	

表 4：直線

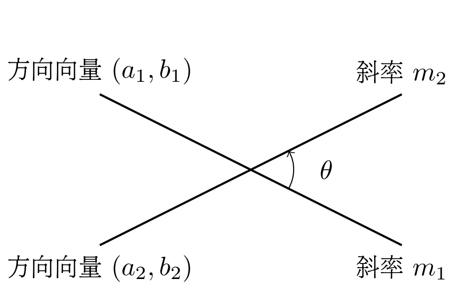
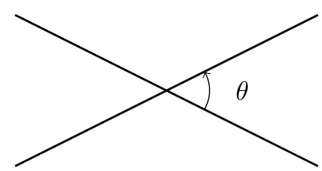
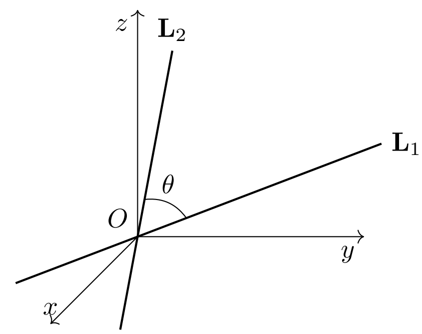
平面直角坐標	一般式	$ax+by+c=0$	在空間中，這些方程式表示平面
	點斜式	$y-y_0=m(x-x_0)$（不豎）或 $x-x_0=k(y-y_0)$（不橫）	
	兩點式	$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$ 或 $(x_1-x_2)y=(y_1-y_2)x+(x_1y_2-x_2y_1)$	
	斜截式	$y=mx+b$（不豎）或 $x=ky+b$（不橫）	
	截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	
	參數式	$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$，$t$ 為參數	
	角分線	$\dfrac{\lvert A_1x+B_1y+C_1\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{\lvert A_2x+B_2y+C_2\rvert}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ 兩條角分線（分別平分銳角和鈍角）互相垂直 回顧：角分線上任一點到兩直線的距離相等	
	兩直線的關係	平行 $m_1=m_2$；垂直 $m_1m_2=-1$	
	直線系	$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)=\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$	
空間直角坐標	向量式	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$	
	參數式	$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$，$t$ 為參數	
	對稱比例式	$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$	
	兩面式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	
	線段	$\mathbf{r}=(1-t)\mathbf{r}_1+t\mathbf{r}_2$	
	兩直線的關係	方向向量成比例 $\begin{cases} \text{否} \to \text{有交點} \begin{cases} \text{否} \to \text{歪斜} \\ \text{是} \to \text{交一點} \end{cases} \\ \text{否} \to \text{有交點} \begin{cases} \text{否} \to \text{平行} \\ \text{是} \to \text{重合} \end{cases} \end{cases}$	（見下表）

	L 成比例	**L** 不成比
有交點	重合	相交
無交點	平行	歪斜

表 5：平面

一般式	$ax+by+cz+d=0$
點法式	$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
向量式	$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$
參數式	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+s\mathbf{v}+t\mathbf{w}$，其中 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 可張成該平面（不平行）
平面系	$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$
角平分面	$\frac{\lvert A_1x+B_1y+C_1z+D_1\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\frac{\lvert A_2x+B_2y+C_2z+D_2\rvert}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
兩平面的關係	平行 $\mathbf{n}_1=k\mathbf{n}_2$ 或 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\mathbf{0}$；垂直 $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$
直線與平面的關係	方向向量與法向量是否垂直 $\begin{cases}\text{否} \rightarrow \text{交一點} \\ \text{是} \rightarrow \text{直線上的點是否在平面上} \begin{cases}\text{否} \rightarrow \text{平行} \\ \text{是} \rightarrow \text{線在面上}\end{cases}\end{cases}$

表 6：夾角公式

平面直角坐標系		空間直角坐標系
平面中兩相交直線	直線對（退化的二次曲線）	空間中兩相交直線
	 $a^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$	
$\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \dfrac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$ 註：逆時針，注意終邊和始邊	$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{\lvert a + b\rvert}\right)$（銳角） $180^\circ - \theta$（鈍角）	$\cos\theta = \dfrac{\lvert\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2\rvert}{\lVert\mathbf{L}_1\rVert\lVert\mathbf{L}_2\rVert}$

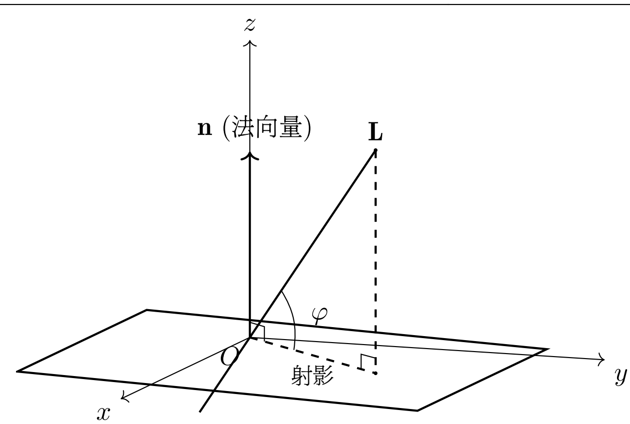
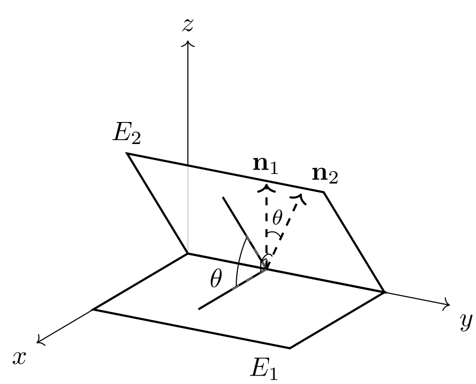
空間直角坐標系	
直線與平面	兩平面
	
$\sin\varphi = \lvert\cos(\mathbf{L}, \mathbf{n})\rvert = \dfrac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}}{\lVert\mathbf{L}\rVert\lVert\mathbf{n}\rVert}$ 其中，$(\mathbf{L}, \mathbf{n})$ 表示方向向量 $\mathbf{L}$ 與法向量 $\mathbf{n}$ 的夾角	$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\lVert\mathbf{n}_1\rVert\lVert\mathbf{n}_2\rVert}$

表 7 : 共線、共面的判定準則

<table>
<tr><td rowspan="4">三點共線</td><td colspan="2">斜率相等（除非斜率不存在）</td></tr>
<tr><td colspan="2">方向向量成比例</td></tr>
<tr><td colspan="2">圍成的三角形面積爲 0，即 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">點作爲位置向量，其中一個以另兩個線性表示，組合係數之和爲 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">四點共面</td><td rowspan="2">張出的平行六面體體積爲 0</td><td>混合積 $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0$</td></tr>
<tr><td>$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$</td></tr>
</table>

表 8 : 平面方程的求法

核心想法	構造法向量和取平面上一點，用點法式寫出平面方程式
已知不共線三點	設已知三點爲 A、B、C，取法向量 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$，任選三點其中一點
已知平面與三坐標軸的交點	直接寫出截距式
已知直線和線外一點	設線外一點爲 P，直線方向向量爲 $\mathbf{v}$，取直線上任一點 A，取法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \overrightarrow{AP}$，任選其中一點
已知相交兩直線	設兩直線方向向量分別爲 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ，取法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$，任取兩直線上其中一點
已知平行兩直線	設其中一條直線方向向量爲 $\mathbf{v}$，兩直線上各取一點 A、B，取法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \overrightarrow{AB}$，任選其中一點
已知歪斜兩直線	不能構成平面，別被騙了！

表 9 : 三角形四心的向量公式

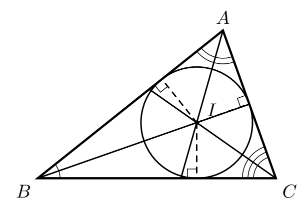
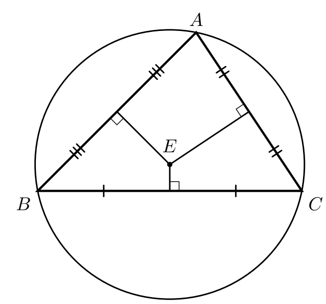
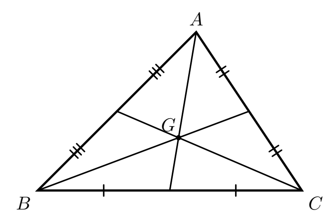
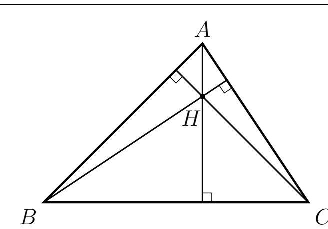
心	向量公式與坐標	示意圖
內心 I 三內角分線交點；內切圓圓心	$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$ $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\mathbf{0}$ $I\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$	
外心 E 三公垂線交點；外接圓圓心	$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2\\\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AC}\rvert^2\end{cases}$	
重心 G 三中線交點	$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$ $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$	
垂心 H 三高交點	$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$	

表 10：圓

<table>
<tr><td>標準式</td><td colspan="2">$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓心 $C(h,k)$，半徑 r</td></tr>
<tr><td>一般式</td><td colspan="2">$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\,(g^2+f^2-c>0)$，圓心 $(-g,-f)$，半徑 $\sqrt{g^2+f^2-c}$</td></tr>
<tr><td>參數式</td><td colspan="2">$x=h+r\cos\theta, y=k+r\sin\theta$，圓心 (h,k)，半徑 r</td></tr>
<tr><td>常用極式</td><td colspan="2">$r=a$ 或 $r=a\cos\theta$ 或 $r=a\sin\theta$</td></tr>
<tr><td>已知直徑的圓</td><td colspan="2">$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 爲直徑兩端點</td></tr>
<tr><td>切線</td><td colspan="2">圓上一點 (x_0,y_0)：$x_0x+y_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0$
已知斜率 m：$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}$（有兩條）
圓外一點 (x_0,y_0)：$\begin{aligned}&(x_0^2+y_0^2+2gx_0+2fy_0+c)(x^2+y^2+2gx+2fy+c)\\&=(x_0x+y_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c)^2\end{aligned}$（有兩條）</td></tr>
<tr><td>切距</td><td colspan="2">$d=\sqrt{x_0^2+y_0^2+2gx_0+2fy_0+c}$，其中 (x_0,y_0) 爲圓外一點</td></tr>
<tr><td>切點弦</td><td colspan="2">過圓外一點作切線之兩切點的連線爲 $x_0x+y_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0$</td></tr>
<tr><td>切線交點軌跡</td><td colspan="2">過圓內非圓心之一點 (x_0,y_0) 的弦兩端作切線的交點軌跡爲
$x_0x+y_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0$</td></tr>
<tr><td>圓系方程</td><td colspan="2">共軸圓系：$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(Ax+By+C)=0$
交點圓系：$\lambda(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$</td></tr>
<tr><td>點 P 和圓的關係</td><td colspan="2">點在圓外：$\overline{PC}>r$；點在圓內：$\overline{PC}<r$ ；點在圓上：$\overline{PC}=r$
點到圓的最長距離 $=\overline{PC}+r$；點到圓的最短距離 $=|\overline{PC}-r|$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">直線和圓的關係</td><td>代數法：聯立消去一個變數，
$\Delta>0 \iff$ 相交
$\Delta=0 \iff$ 相切
$\Delta<0 \iff$ 相離</td><td>幾何法：圓心到直線的距離爲 d，
$d<r \iff$ 相交
$d=r \iff$ 相切
$d>r \iff$ 相離</td></tr>
<tr><td colspan="2">圓和直線 l 的最長距離 $=d(C,l)+r$；最短距離 $=d(C,l)-r$</td></tr>
<tr><td>兩圓的關係</td><td colspan="2">設 R 爲兩圓半徑和，r 爲兩圓半徑差，d 爲圓心距，<table>
<tr><td>位置關係</td><td>外離</td><td>外切</td><td>相交</td><td>內切</td><td>內含</td></tr>
<tr><td>三長度關係</td><td>$d>R$</td><td>$d=R$</td><td>$r<d<R$</td><td>$d=r$</td><td>$0<d<r$</td></tr>
<tr><td>方程公共解</td><td>無實根</td><td>相等實根</td><td>相異實根</td><td>相等實根</td><td>無實根</td></tr>
<tr><td>公切線數</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>兩圓正交</td><td colspan="2">$2(g_2g_2+f_1f_2)=c_1+c_2$</td></tr>
</table>

表 11：用行列式求過已知點的方程式

平面上過兩點的直線	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	平面上過不共線三點的圓	$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$
空間中過不共線三點的平面	$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	平面上過五點的圓錐曲線	$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

表 12：極坐標與直角坐標的關係

轉換	直角坐標 (x,y) $\xrightarrow{\begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}}$ 極坐標 (r,θ)；極坐標 (r,θ) $\xrightarrow{\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}}$ 直角坐標 (x,y)
限制	狹義極坐標系：$\begin{cases} r\geq 0 \\ 0\leq\theta<2\pi \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r\geq 0 \\ -\pi<\theta\leq\pi \end{cases}$ 廣義極坐標系：r、θ 可任取，其中 $r<0$ 時 θ 從負 x 軸逆時針算起
θ 的取法	（畫圖更直觀）若限制 $0\leq\theta<2\pi$，則

$x>0, y>0$	第一象限	$\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
$x<0, y>0$	第二象限	$\theta=\pi-\tan^{-1}\left\lvert\dfrac{y}{x}\right\rvert$
$x<0, y<0$	第三象限	$\theta=\pi+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$
$x>0, y<0$	第四象限	$\theta=2\pi-\tan^{-1}\left\lvert\dfrac{y}{x}\right\rvert$

$x>0, y=0$	正 x 軸	$\theta=0$
$x=0, y>0$	正 y 軸	$\theta=\dfrac{\pi}{2}$
$x<0, y=0$	負 x 軸	$\theta=\pi$
$x=0, y<0$	負 y 軸	$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

表 13：極坐標圖形之對稱性

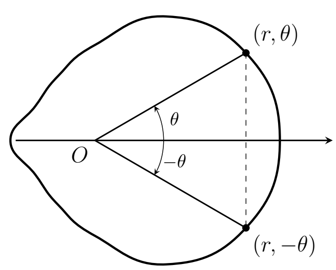
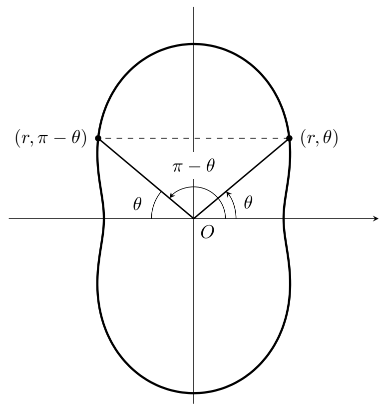
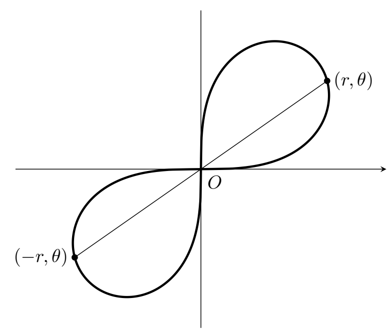
條件	$g(r,\theta)=g(r,-\theta)$ 或 $g(r,\theta)=g(-r,\pi-\theta)$ 例如：$r=g(\cos\theta)$	$g(r,\theta)=g(r,\pi-\theta)$ 或 $g(r,\theta)=g(-r,-\theta)$ 例如：$r=f(\sin\theta)$	$g(r,\theta)=g(r,\pi+\theta)$ 或 $g(r,\theta)=g(-r,\theta)$
曲線的對稱性	對稱於極軸	對稱於直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$	對稱於極點
示意圖			

表 14：極坐標之中點、距離、夾角公式

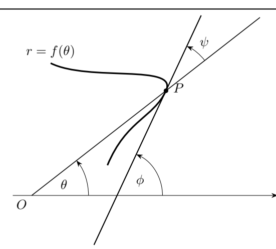
中點	$\left(\dfrac{\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}{2}, \tan^{-1}\dfrac{r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2}\right)$
距離	$d=\sqrt{r_1^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)+r_2^2}$
夾角	$\tan\psi=\dfrac{r}{dr/d\theta}$ 

表 15：常見的極坐標圖形【直線】

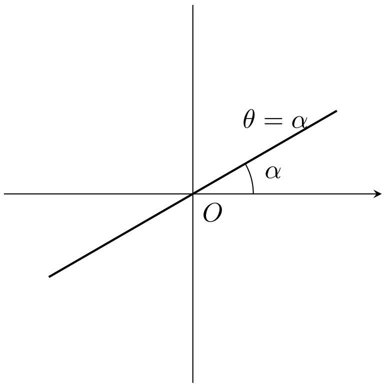
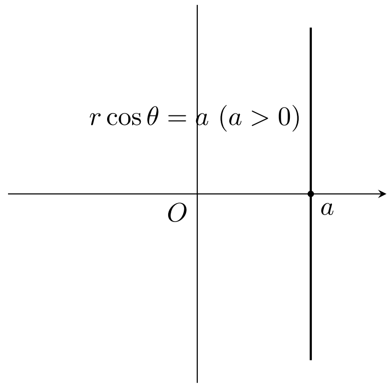
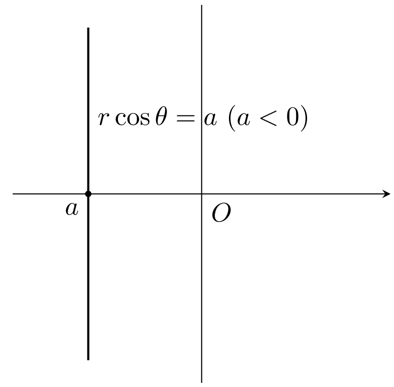
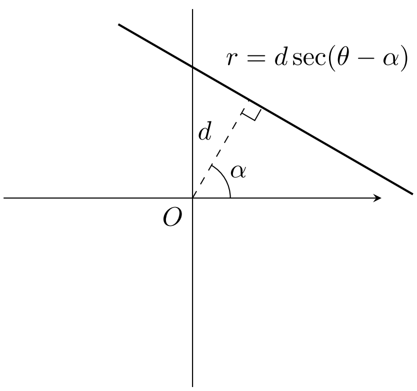
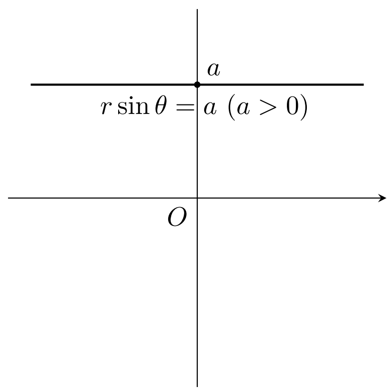
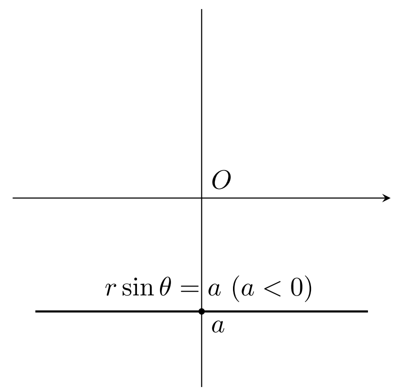
 $\theta=a$（r 允許負值）	 $r\cos\theta=a\,(a>0)$	 $r\cos\theta=a\,(a<0)$
 $r=d\sec(\theta-\alpha)$	 $r\sin\theta=a\,(a>0)$	 $r\sin\theta=a\,(a<0)$

表 16：常見的極坐標圖形【雙紐線】

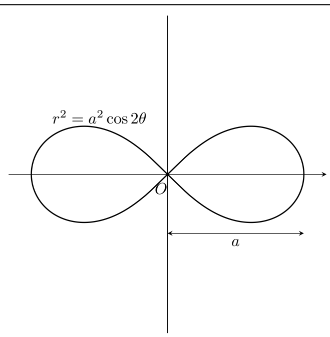
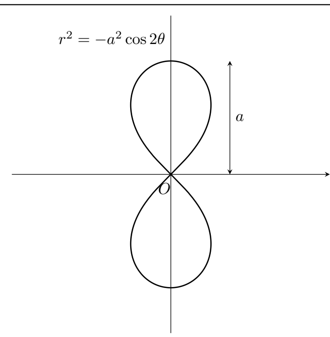
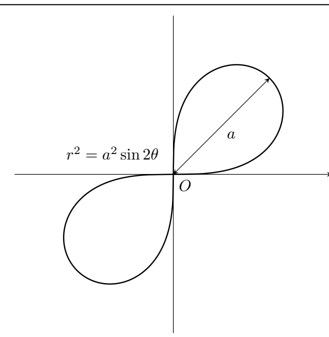
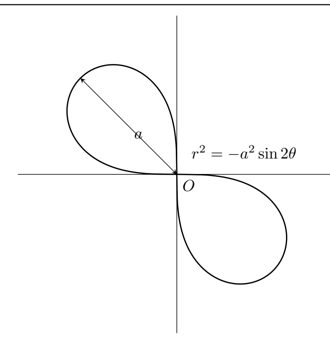
 $r^2=a^2\cos 2\theta$	 $r^2=-a^2\cos 2\theta$	 $r^2=a^2\sin 2\theta$	 $r^2=-a^2\sin 2\theta$

表 17：常見的極坐標圖形【玫瑰線】

(1) 當 n 爲奇數時，有 n 片葉；當 n 爲偶數，有 2n 片葉
(2) 確定第一片的位置只需令 $\cos n\theta = 1$ 或 $\sin n\theta = 0$ 找 θ
(3) 當找到第一片位置時，觀察總片數，以之除 360°，即知每一片葉之對稱軸所相差的角度
(4) 具有對稱性，求其所圍成的面積時可只求半片葉子的面積再乘以兩倍的葉片數

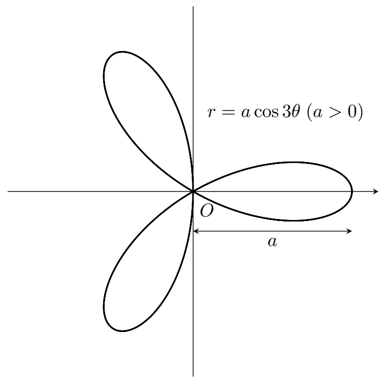
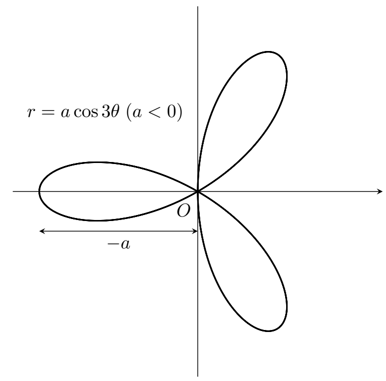
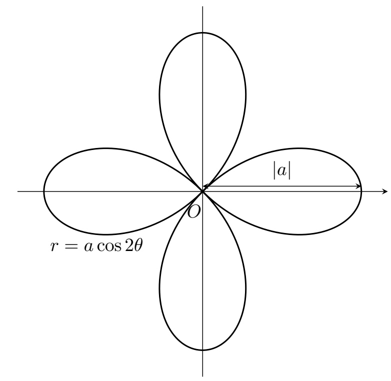
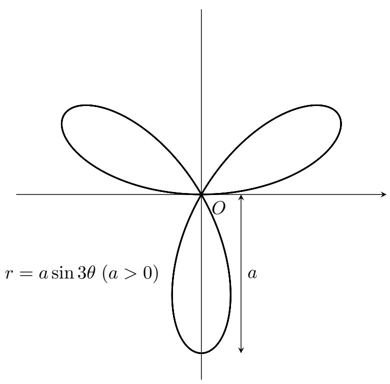
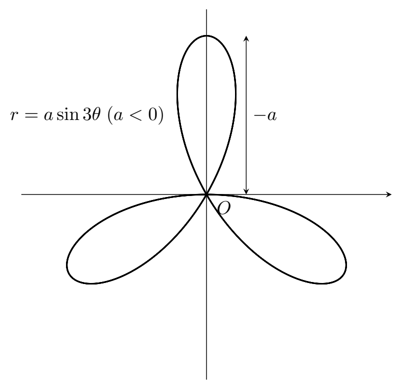
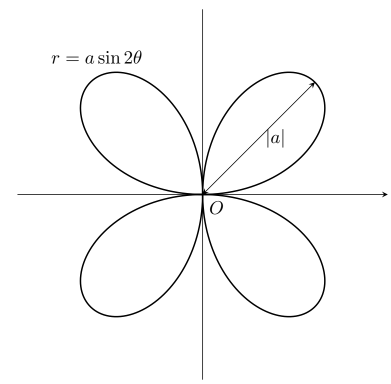
 $r = a\cos n\theta$（$a > 0$，n 是奇數）	 $r = a\cos n\theta$（$a < 0$，n 是奇數）	 $r = a\cos n\theta$（n 是偶數）
 $r = a\sin n\theta$（$a > 0$，n 是奇數）	 $r = a\sin n\theta$（$a < 0$，n 是奇數）	 $r = a\sin n\theta$（n 是偶數）

表 18：常見的極坐標圖形【阿基米德螺線】

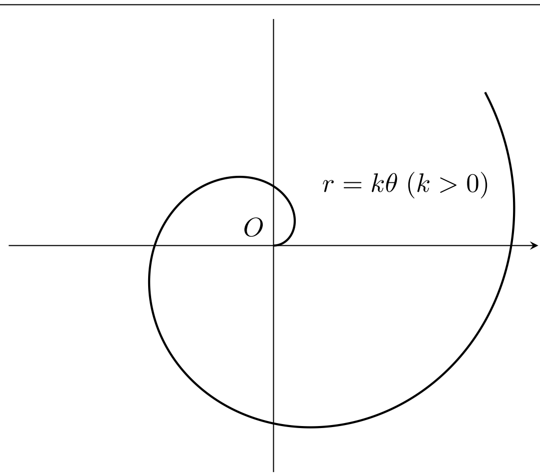
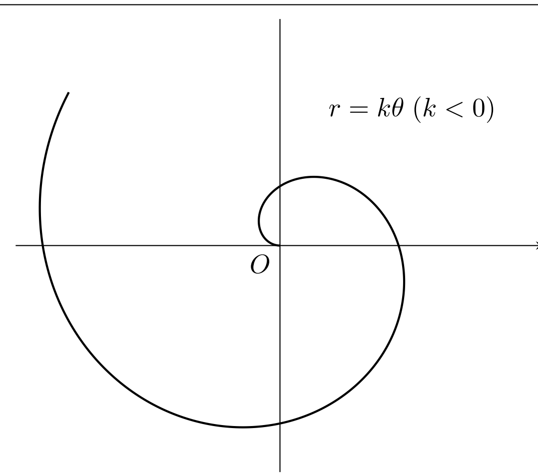
$r = k\theta$	
 $(k > 0)$	 $(k < 0)$

表 19：常見的極坐標圖形【圓】

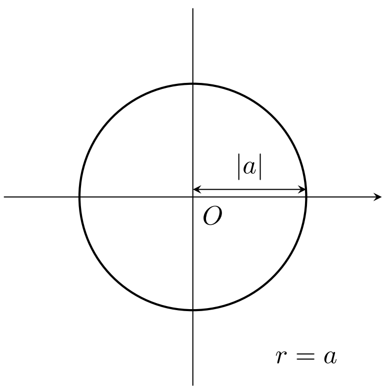
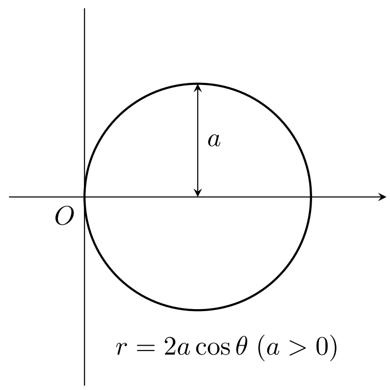
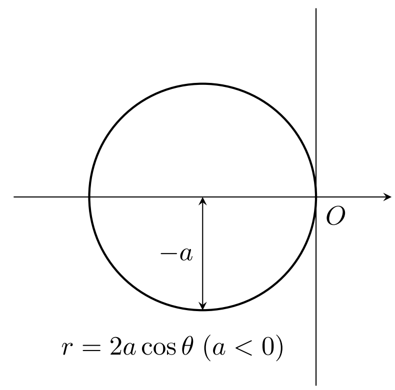
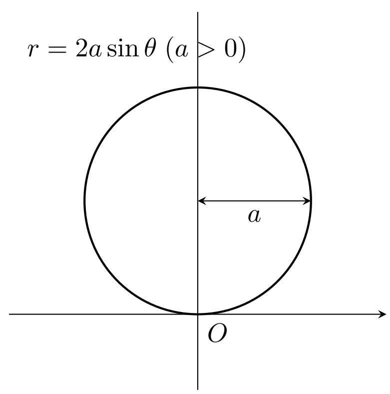
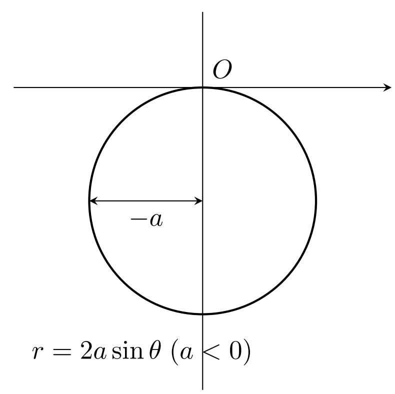
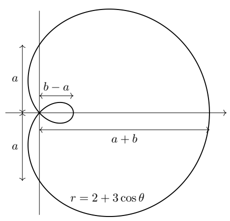
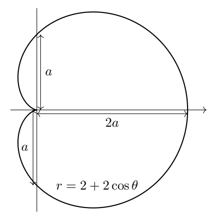
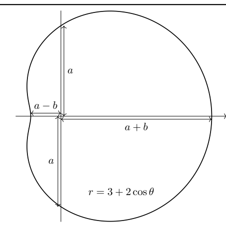
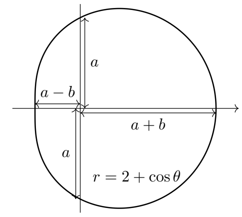
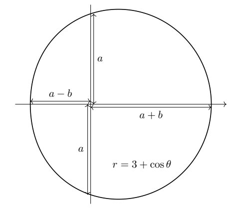
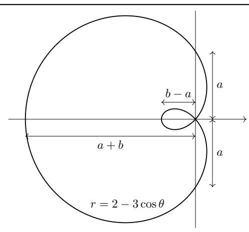
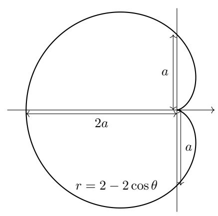
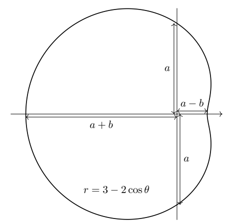
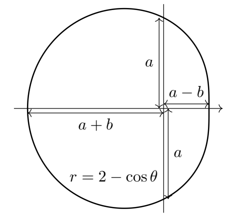
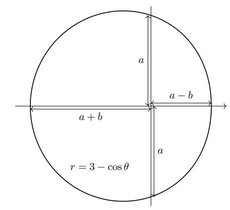
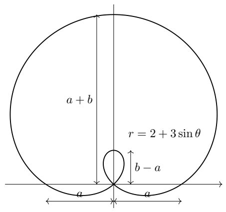
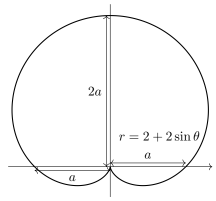
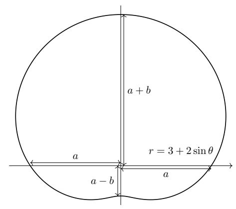
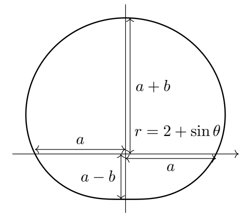
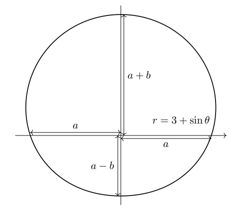
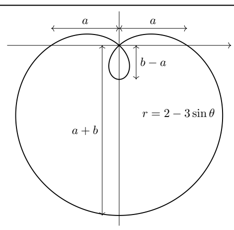
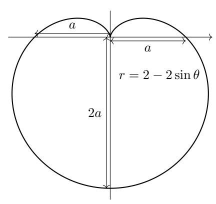
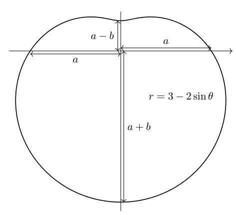
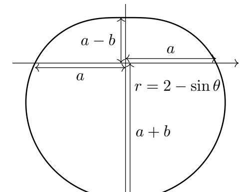
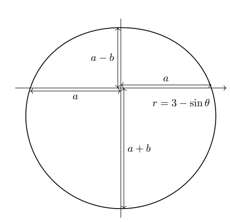
 $r = a$	 $r = 2a\cos\theta\,(a > 0)$	 $r = 2a\cos\theta\,(a < 0)$
	 $r = 2a\sin\theta\,(a > 0)$	 $r = 2a\sin\theta\,(a < 0)$

表 20：常見的極坐標圖形【帕斯卡蝸線／蚶線與心臟線】

<table>
<tr><td>$0 < \dfrac{a}{b} < 1$
有小洞</td><td>$\dfrac{a}{b} = 1$（心臟線）
極點處有尖點</td><td>$1 < \dfrac{a}{b} < 2$
漸由凹變平</td><td>$\dfrac{a}{b} = 2$
平</td><td>$\dfrac{a}{b} > 2$
漸由平變凸</td></tr>
<tr><td colspan="5">$r = a + b\cos\theta\,(a > 0, b > 0)$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="5">$r = a - b\cos\theta\,(a > 0, b > 0)$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="5">$r = a + b\sin\theta\,(a > 0, b > 0)$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td colspan="5">$r = a - b\sin\theta\,(a > 0, b > 0)$</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

小結：對於方程式 $r = a \pm b\sin\theta\,(a > 0, b > 0)$，其心尖的指向：

心尖	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$+b$	朝上	朝右
$-b$	朝下	朝左

表 21：拋物線

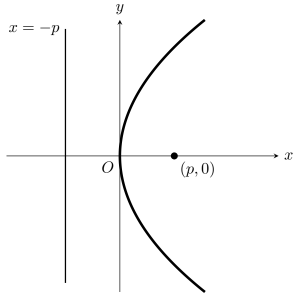
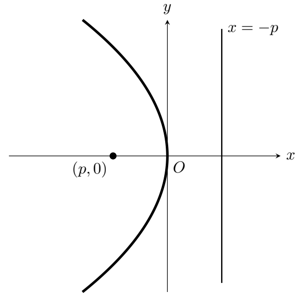
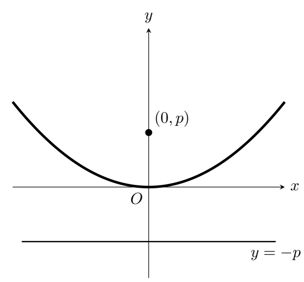
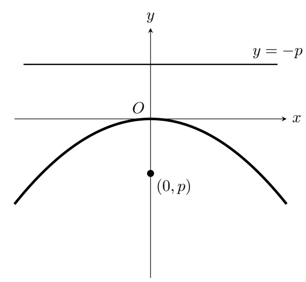
<table>
<tr><td>標準式</td><td colspan="2">$y^2 = 4px$</td><td colspan="2">$x^2 = 4py$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">圖形</td><td>$p > 0$</td><td>$p < 0$</td><td>$p > 0$</td><td>$p < 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>頂點 V</td><td colspan="4">$(0,0)$</td></tr>
<tr><td>焦點 F</td><td colspan="2">$(p,0)$</td><td colspan="2">$(0,p)$</td></tr>
<tr><td>對稱軸</td><td colspan="2">$y = 0$</td><td colspan="2">$x = 0$</td></tr>
<tr><td>準線 l</td><td colspan="2">$x + p = 0$</td><td colspan="2">$y + p = 0$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="4">$\overline{VF} = |p|$</td></tr>
<tr><td>通徑長</td><td colspan="4">$|4p|$</td></tr>
<tr><td>離心率</td><td colspan="4">$e = 1$</td></tr>
<tr><td>開口</td><td>向右</td><td>向左</td><td>向上</td><td>向下</td></tr>
</table>

表 22：橢圓

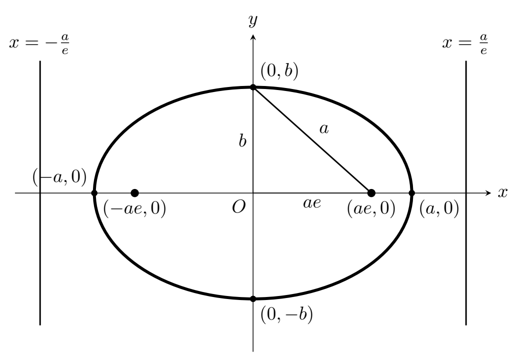
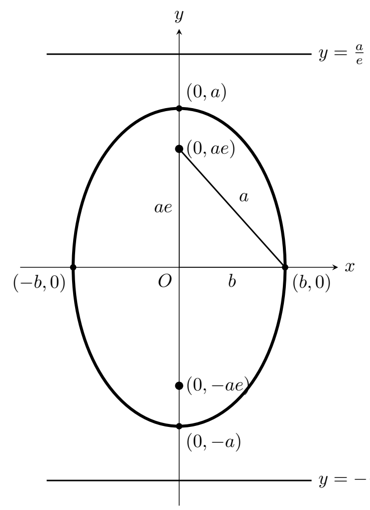
<table>
<tr><td colspan="2">標準式</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">圖形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">對稱中心</td><td colspan="2">$(0,0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">頂點</td><td>長軸</td><td colspan="2">$A'(-a,0),A(a,0)$</td></tr>
<tr><td>短軸</td><td colspan="2">$B'(0,-b),B(0,b)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">焦點</td><td>$F'(-ae,0),F(ae,0)$</td><td>$F'(0,-ae),F(0,ae)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">準線</td><td>$x\pm\dfrac{a}{e}=0$</td><td>$y\pm\dfrac{a}{e}=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">對稱軸</td><td colspan="2">兩坐標軸</td></tr>
<tr><td colspan="2">長軸長</td><td colspan="2">$2a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">短軸長</td><td colspan="2">$2b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">正交弦長（通徑長）</td><td colspan="2">$\dfrac{2b^2}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">離心率</td><td colspan="2">$0<e<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">重要等式</td><td colspan="2">$(ae)^2=a^2-b^2$；$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$</td></tr>
</table>

表 23：雙曲線

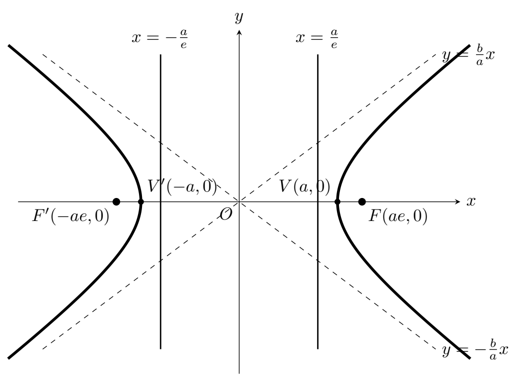
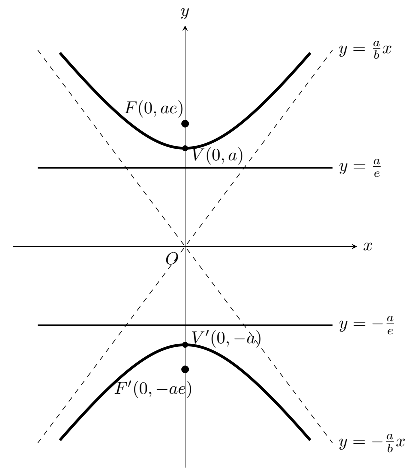
<table>
<tr><td colspan="2">標準式</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">圖形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">對稱中心</td><td colspan="2">$(0,0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">頂點</td><td>實軸</td><td colspan="2">$A'(-a,0),A(a,0)$</td></tr>
<tr><td>虛軸</td><td colspan="2">$B'(0,-b),B(0,b)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">焦點</td><td>$F'(-ae,0),F(ae,0)$</td><td>$F'(0,-ae),F(0,ae)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">準線</td><td>$x\pm\dfrac{a}{e}=0$</td><td>$y\pm\dfrac{a}{e}=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">對稱軸</td><td colspan="2">x 軸、y 軸</td></tr>
<tr><td colspan="2">實軸長 $\overline{AA'}$</td><td colspan="2">$2a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">虛軸長 $\overline{BB'}$</td><td colspan="2">$2b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">正交弦長（通徑長）</td><td colspan="2">$\dfrac{2b^2}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">漸進線</td><td>$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$</td><td>$\dfrac{y}{a}\pm\dfrac{x}{b}=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">離心率</td><td colspan="2">$e>1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">重要等式</td><td colspan="2">$(ae)^2=a^2+b^2$；$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$</td></tr>
</table>

表 24：圓錐曲線的參數方程

曲線	標準方程	參數方程
圓	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$
拋物線	$y^2=4ax$；$x^2=4ay$	$\begin{cases} x=at^2 \\ y=2at \end{cases}$ ；$\begin{cases} x=2at \\ y=2at^2 \end{cases}$
橢圓	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$
雙曲線	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\pm a\cosh\theta \\ y=b\sinh\theta \end{cases}$
等軸雙曲線（直角雙曲線）	$xy=c^2$	$\begin{cases} x=ct \\ y=c/t \end{cases}$

表 25：圓錐曲線的標準極坐標方程

<table>
<tr><td>標準式</td><td>$r=\dfrac{ed}{1\pm e\cos\theta}$ （鉛直準線型）或 $r=\dfrac{ed}{1\pm e\sin\theta}$ （水平準線型），
d 爲極點到準線的距離，焦點在極點</td></tr>
<tr><td>離心率</td><td>
<table>
<tr><td>離心率</td><td>圖形</td></tr>
<tr><td>$e<1$</td><td>橢圓</td></tr>
<tr><td>$e=1$</td><td>拋物線</td></tr>
<tr><td>$e>1$</td><td>雙曲線</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>分母有 $+\sin\theta$</td><td>準線在極點上方</td><td>準線爲 $y=d$</td></tr>
<tr><td>分母有 $-\sin\theta$</td><td>準線在極點下方</td><td>準線爲 $y=-d$</td></tr>
<tr><td>分母有 $+\cos\theta$</td><td>準線在極點右側</td><td>準線爲 $x=d$</td></tr>
<tr><td>分母有 $-\cos\theta$</td><td>準線在極點左側</td><td>準線爲 $x=-d$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

表 26：二元二次方程式的圖形判斷

設二元二次方程爲 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，

計算式的判斷

<table>
<tr><td colspan="4">$\Delta=\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><th>條件</th><th>一般情況</th><th>退化情形 $\Delta=0$</th><th>先計算 δ 後的進一步判斷</th></tr>
<tr><td>$\delta<0$</td><td>橢圓（包括圓）
$A\cdot\Delta<0$</td><td>一點或無圖形</td><td>分組配方成 $(m_1x+n_1y+p_1)^2+(m_2x+p_2)^2=k$ 或
$(m_1x+n_1y+p_1)^2+(n_2y+p_2)^2=k$，
$\begin{cases}k>0 \implies \text{橢圓或圓}\\ k=0 \implies \text{兩完全平方式}=0\text{ 之交點}\\ k<0 \implies \text{沒有圖形}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\delta=0$</td><td>拋物線</td><td>一對平行線或
一對重合直線或
無圖形</td><td>先配方，再因式分解
$\begin{cases}\text{完全平方式}+\text{一次因式}=0 \implies \text{拋物線}\\ \text{兩一次式相乘}=0 \implies \text{平行兩直線}\\ \text{一次式完全平方}=0 \implies \text{重合兩直線}\\ \text{完全平方式}+\text{正數}=0 \implies \text{沒有圖形}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\delta>0$</td><td>雙曲線</td><td>一對相交直線</td><td>雙交叉相乘法，分解爲
$(m_1x+n_1y+p_1)(m_2x+n_2y+p_2)=k$，
$\begin{cases}k\neq 0 \implies \text{雙曲線}\\ k=0 \implies \text{相交直線對}\end{cases}$</td></tr>
</table>

用公式判斷

<table>
<tr><td colspan="4">$\Delta=\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$，$\delta=B^2-4AC$，$S=A+C$，$H=\begin{vmatrix}2A & D\\ D & 2F\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2C & E\\ E & 2F\end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta\neq 0$（不退化）</td><td rowspan="2">$\delta<0$</td><td>$\Delta\cdot S<0$</td><td>橢圓（若 $S^2=-4\delta$，則爲圓）</td></tr>
<tr><td>$\Delta\cdot S>0$</td><td>虛橢圓（無圖形）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta>0$</td><td>雙曲線</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta=0$</td><td>拋物線</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\Delta\neq 0$（退化）</td><td colspan="2">$\delta<0$</td><td>一點（一對相交虛直線）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta>0$</td><td>一對相交直線</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\delta=0$</td><td>$H<0$</td><td>一對平行線</td></tr>
<tr><td>$H=0$</td><td>重合兩直線</td></tr>
<tr><td>$H>0$</td><td>一對虛平行線</td></tr>
</table>

表 27：圓錐曲線的切線

<table>
<tr><td colspan="2">設 $S(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$，
$T(x,y)=ax_1x+h(x_1y+y_1x)+by_1y+g(x_1+x)+f(y_1+y)+c$，
曲線爲 $S(x,y)=0$，則</td></tr>
<tr><td>過曲線上一點的切線</td><td>$T(x,y)=0$</td></tr>
<tr><td>過曲線外一點的切線</td><td>$S(x,y)\cdot S(x_1,y_1)=[T(x,y)]^2$</td></tr>
<tr><td>已知斜率爲 m 的切線</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">圓錐曲線的標準方程</th><th>切線方程式</th></tr>
<tr><td rowspan="2">拋物線</td><td>$x^2=4ay$</td><td>$y=mx-am^2$</td></tr>
<tr><td>$y^2=4ax$</td><td>$y=mx+\dfrac{a}{m}$</td></tr>
<tr><td>橢圓與雙曲線</td><td>$\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$</td><td>$y=mx\pm\sqrt{Am^2+B}$</td></tr>
<tr><td>直角雙曲線</td><td>$xy=a\,(am<0)$</td><td>$y=mx\pm\sqrt{-4am}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

表 28：圓錐曲線的弦方程

圓錐曲線	曲線上兩點	弦方程
橢圓	$P(a\cos\alpha,b\sin\alpha),\ Q(a\cos\beta,b\sin\beta)$	$\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
雙曲線	$P(a\sec\alpha,b\tan\alpha),\ Q(a\sec\beta,b\tan\beta)$	$\dfrac{x}{a}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{y}{b}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
雙曲線	$P\left(cp,\dfrac{c}{p}\right),Q\left(cq,\dfrac{c}{q}\right)$	$ypq+x=c(p+q)$
拋物線	$P(ap^2,2ap),Q(aq^2,2aq)$	$y(p+q)-2apq=2x$

令 $Q\to P$，即 $\beta=\alpha$ 或 $p=q$，可得切線方程

表 29：圓錐曲線方程的標準化——移軸、轉軸

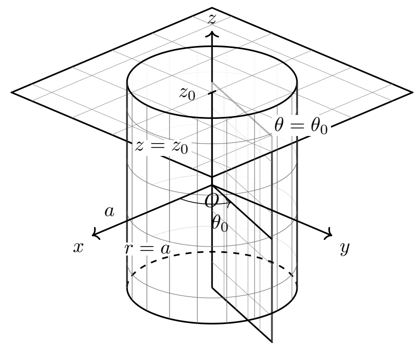
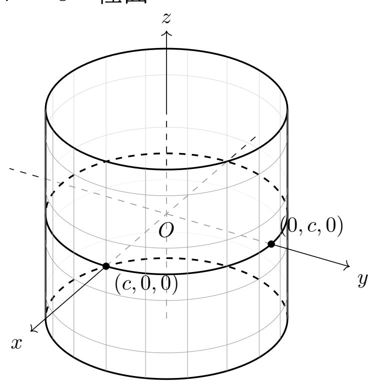
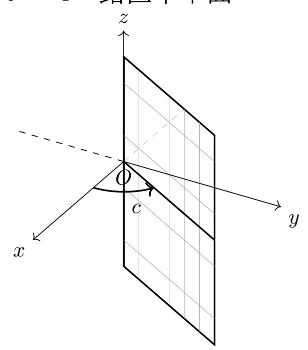
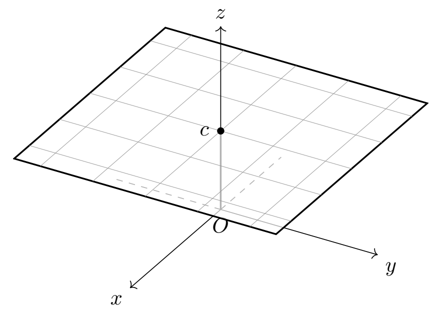
<table>
<tr><td>使用順序</td><td colspan="2">先計算 $\delta = B^2 - 4AC$
(1) 若 $\delta \neq 0$（有心錐線），則先平移再旋轉
(2) 若 $\delta = 0$（無心錐線），則先旋轉再平移</td></tr>
<tr><td>目的</td><td colspan="2">移軸——消去一次項 x、y
轉軸——消去交叉項 xy</td></tr>
<tr><td rowspan="4">移軸</td><td>平移公式</td><td>$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$ 或 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>原點</td><td><table>
<tr><td></td><td>新坐標系 (x', y')</td><td>舊坐標系 (x, y)</td></tr>
<tr><td>新原點 O'</td><td>$(0, 0)$</td><td>(h, k)</td></tr>
<tr><td>舊原點 O</td><td>$(-h, -k)$</td><td>$(0, 0)$</td></tr>
</table>觀念：將坐標軸往上下左右平移，相當於將圖像下上右左平移</td></tr>
<tr><td>代入法</td><td>(1) 把平移公式代入方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$（$A, B, C$ 三者不同時爲 0）並整理
(2) 若 $AC \neq 0$，則令一次項係數 $= 0$；若 $AC = 0$，則令常數項和一個一次項係數 $= 0$，求出 h, k
(3) 把 h、k 的值代入化簡</td></tr>
<tr><td>配方</td><td>適用於缺 xy 項的方程；應分別使 x, y 的係數爲 0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">轉軸</td><td>公式</td><td>繞原點旋轉：$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$ 或 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$
繞點 (h, k) 旋轉：$\begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - h \\ y' - k \end{bmatrix}$
觀念：將坐標軸逆時針旋轉，相當於將圖像順時針旋轉</td></tr>
<tr><td>性質</td><td>$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$,
$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>方法</td><td>求出旋轉角 θ 和 $\sin\theta$、$\cos\theta$，並寫出轉軸公式，代入方程化簡</td></tr>
<tr><td>角的公式</td><td>$\cot 2\theta = \dfrac{a-b}{2h}, \cos 2\theta = \dfrac{\cot 2\theta}{\sqrt{1 + \cot^2 2\theta}}\ (0 < 2\theta < \pi)$,
$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}, \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$</td></tr>
</table>

表 30：圓錐曲線的一般極坐標方程

<table>
<tr><td>方程</td><td>$r = \dfrac{ed}{1 + e\sin(\theta - \varphi)}$（相當於將標準型逆時針旋轉 φ）其中：一焦點在極點，d 爲到極點的距離</td></tr>
<tr><td>兩條準線</td><td>$y = (\tan\varphi)x + d\sec\varphi$，$y = (\tan\varphi)x - \dfrac{d(1+e^2)}{1-e^2}\sec\varphi$</td></tr>
<tr><td>頂點</td><td>橢圓或雙曲線：$\left(\dfrac{ed}{1+e}, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{ed}{1-e}, \varphi + \dfrac{3\pi}{2}\right)$（長軸與實軸）
拋物線：$\left(\dfrac{d}{2}, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$
橢圓：$\left(\dfrac{ed}{e^2-1}, \varphi + \dfrac{\pi}{2} + \cos^{-1} e\right)$，$\left(\dfrac{ed}{e^2-1}, \varphi + \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1} e\right)$（短軸）</td></tr>
<tr><td>焦點</td><td>橢圓或雙曲線：$(0,0)$，$\left(\dfrac{ed}{1+e} - \dfrac{ed}{1-e}, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$
拋物線：$(0,0)$</td></tr>
<tr><td>有心錐線的中心</td><td>$\left(\dfrac{e^2 d}{e^2-1}, \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>對稱軸</td><td>$y = (-\cot\varphi)x$，$y = (\tan\varphi)x + \dfrac{e^2 d}{e^2-1}\sec\varphi \left(r = \dfrac{\frac{e^2 d}{e^2-1}\sec\varphi}{\sin\varphi - \tan\varphi\cos\theta}\right)$</td></tr>
<tr><td>半軸長</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>半長軸/半實軸</td><td>半焦距</td><td>半短軸/半虛軸</td></tr>
<tr><td>橢圓</td><td rowspan="2">$a = \dfrac{ed}{1-e^2}$</td><td rowspan="2">$c = \dfrac{e^2 d}{e-1}$</td><td>$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \dfrac{ed}{\sqrt{1-e^2}}$</td></tr>
<tr><td>雙曲線</td><td>$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \dfrac{ed}{\sqrt{e^2-1}}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>雙曲線的漸近線</td><td>$y = x\cot\left(\pm\cos^{-1}\dfrac{1}{e} - \varphi\right) + \dfrac{e^2 d}{e^2-1}\sin\varphi\cot\left(\pm\cos^{-1}\dfrac{1}{e} - \varphi\right) + \dfrac{e^2 d}{e^2-1}\cos\varphi$</td></tr>
</table>

表 31：柱坐標與球坐標

<table>
<tr>
<td rowspan="2">柱坐標</td>
<td>直角坐標 (x,y,z) $\underset{\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}}{\overset{\begin{cases}r^2=x^2+y^2\\ \tan\theta=y/x\\ z=z\end{cases}}{\rightleftarrows}}$ 柱坐標 (r,θ,z)

其中 (r,θ) 是 xy 平面上的極坐標</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">各變數分別爲常數時的圖像：
<table>
<tr>
<td>$r=c$，柱面

</td>
<td>$\theta=c$，鉛直半平面

</td>
<td>$z=c$，水平平面

</td>
</tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">球坐標</td>
<td>直角坐標 (x,y,z) $\underset{\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}}{\overset{\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2+z^2\\ \tan\theta=y/x\\ \varphi=\cos^{-1}(z/\rho)\end{cases}}{\rightleftarrows}}$ 球坐標 (ρ,θ,φ)

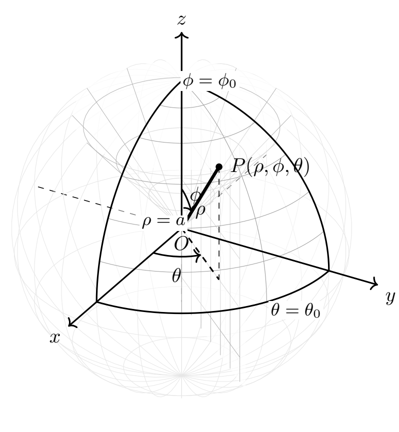
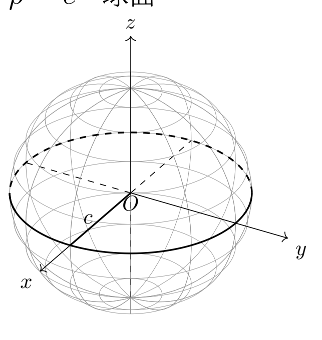
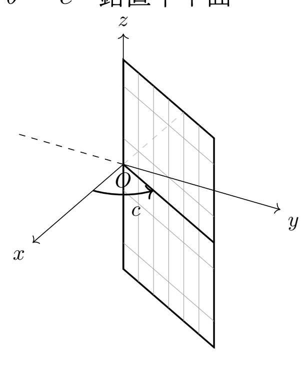
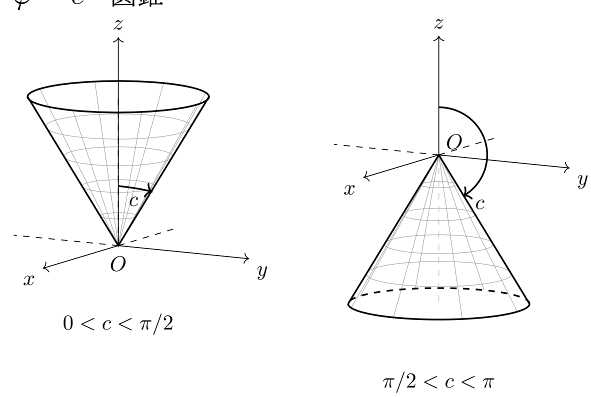
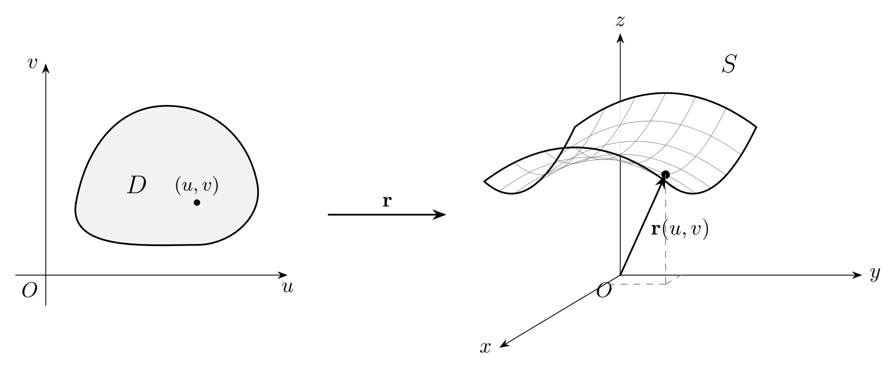
其中：
ρ 是與原點的距離（徑向距離）
θ 是 xy 平面上的點到原點的連線與正 x 軸的夾角（方位角）
φ 是球半徑與正 z 軸的夾角（天頂角）
$\rho\geq 0, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq\pi$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">各變數分別爲常數時的圖像：
<table>
<tr>
<td>$\rho=c$，球面

</td>
<td>$\theta=c$，鉛直半平面

</td>
<td>$\varphi=c$，圓錐

</td>
</tr>
</table></td>
</tr>
</table>

表 32：曲面的方程式

顯函數	$z = f(x, y)$
隱函數	$F(x, y, z) = 0$
參數	$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \omega(u, v) \end{cases}$（要有兩個參數）
向量	$\mathbf{r}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v))$



【對照】曲線方程式

平面曲線方程

顯函數	$y = f(x)$
隱函數	$F(x, y) = 0$
參數	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$
向量	$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$

空間曲線方程

參數	$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$
向量	$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$
交面	$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

表 33：空間參數方程常見的例子——螺旋線

直角坐標方程	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$（螺旋半徑爲 $\lvert a\rvert$，螺距爲 $h = 2\pi b$）
柱坐標方程	$\begin{cases} r = a \\ \theta = bt \\ z = bt \end{cases}$

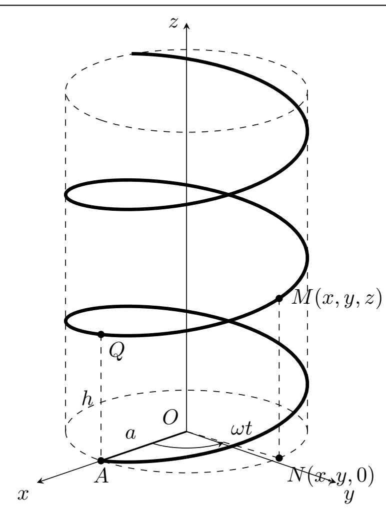


表 34：柱面與一些常見的例子

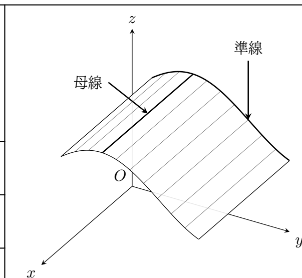
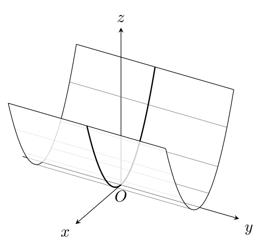
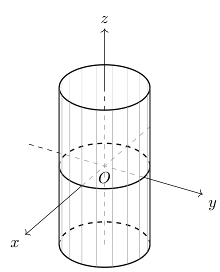
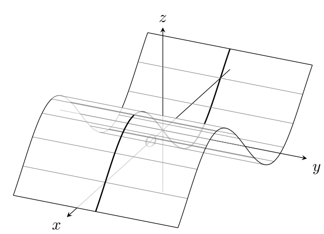
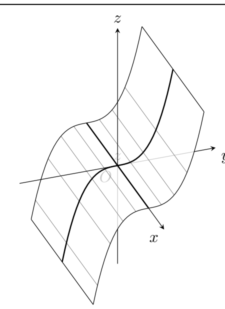
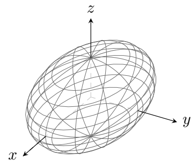
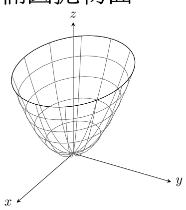
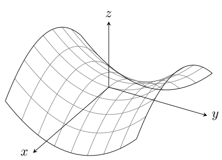
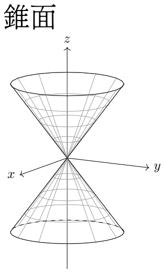
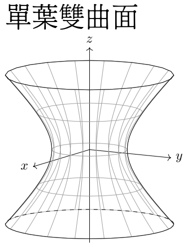
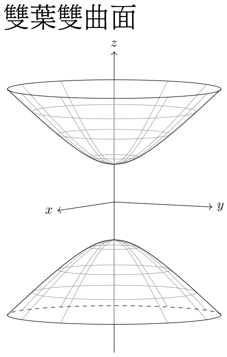
<table>
<tr><td colspan="3">若一動直線 L 沿已知曲線 C 移動，且始終與某一定直線平行，則這樣形成的曲面稱爲柱面，此時稱曲線 C 爲準線，動直線 L 稱爲母線
註：柱面是直紋面的一個例子</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>$F(x,y)=0$</td><td colspan="2">母線 $//z$ 軸</td></tr>
<tr><td>$F(y,z)=0$</td><td colspan="2">母線 $//x$ 軸</td></tr>
<tr><td>$F(x,z)=0$</td><td colspan="2">母線 $//y$ 軸</td></tr>
<tr><td>
拋物柱面 $z=x^2$</td><td>
直圓柱面 $x^2+y^2=1$</td><td>
波浪面 $z=\sin x$</td><td>
立方拋物柱面 $z=y^3$</td></tr>
</table>

表 35：二次曲面的標準式

<table>
<tr>
<td>橢球面
</td>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^1}=1$$
所有截痕爲橢圓
當 $a=b=c$ 時爲球面</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>平行於軸</td><td>橢圓</td></tr></table>（橢球面有三個軸）</td>
</tr>
<tr>
<td>橢圓抛物面
</td>
<td>$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$
橢圓抛物面的軸對應於一次的變數</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>垂直於軸</td><td>橢圓</td></tr><tr><td>平行於軸</td><td>抛物線</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>雙曲抛物面（鞍面）
</td>
<td>$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$
雙曲抛物面的軸對應於一次的變數</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>垂直於軸</td><td>雙曲線</td></tr><tr><td>平行於軸</td><td>抛物線</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>錐面
</td>
<td>$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$
錐面的軸取決於係數爲負的變數</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>垂直於軸</td><td>橢圓</td></tr><tr><td>平行於軸</td><td>雙曲線</td></tr><tr><td>包含軸</td><td>直線對</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>單葉雙曲面
</td>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
雙曲面的軸取決於係數爲負的變數</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>垂直於軸</td><td>橢圓</td></tr><tr><td>平行於軸</td><td>雙曲線</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>雙葉雙曲面
</td>
<td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
雙曲面的軸取決於係數爲正的變數</td>
<td><table><tr><th>平面</th><th>截痕</th></tr><tr><td>垂直於軸</td><td>橢圓</td></tr><tr><td>平行於軸</td><td>雙曲線</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

單葉雙曲面和雙葉雙曲面區分法：雙葉雙負號，單葉單負號

表 36：常見曲面的參數式

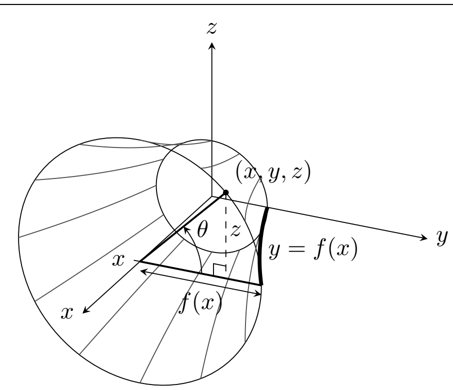
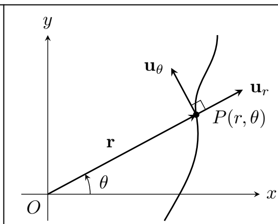
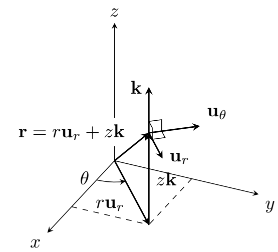
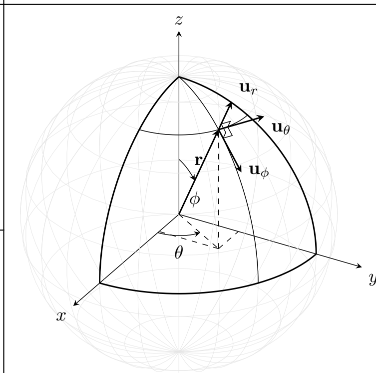
球面	$x^2+y^2+z^2=r^2$	旋轉曲面： $(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi), 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi$ 經緯坐標： $(r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi), 0\le\theta\le 2\pi, -\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$
橢球面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	球坐標系： $(a\cos\theta\sin\phi, b\sin\theta\sin\phi, c\cos\phi), 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi$ 經緯坐標： $(a\cos\theta\cos\phi, b\sin\theta\cos\phi, c\sin\phi), 0\le\theta\le 2\pi, -\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$
橢圓柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	柱坐標系：$(a\cos\theta, b\sin\theta, z), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty$
拋物柱面	$y^2=4px$	柱坐標系：$(pt^2, 2pt, z), t, z\in\mathbb{R}$
雙曲柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	柱坐標系：$(a\sec\theta, b\tan\theta, z), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty$
圓錐面	$z^2=r^2x^2+r^2y^2$	旋轉曲面： $\left(\dfrac{z}{r}\cos\theta, \dfrac{z}{r}\sin\theta, z\right), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty$ 球坐標系： $\left(\dfrac{\rho\cos\theta}{\sqrt{1+r^2}}, \dfrac{\rho\sin\theta}{\sqrt{1+r^2}}, \dfrac{r\rho}{\sqrt{1+r^2}}\right), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<\rho<+\infty, \varphi=\tan^{-1}\dfrac{1}{r}$
橢圓錐面	$\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$	柱坐標系：$\left(\dfrac{a}{c}z\cos\theta, \dfrac{b}{c}z\sin\theta, z\right), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty$
橢圓拋物面	$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$	柱坐標系：$\left(a\sqrt{\dfrac{z}{c}}\cos\theta, b\sqrt{\dfrac{z}{c}}\sin\theta, z\right), 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\dfrac{z}{c}<+\infty$
雙曲拋物面	$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$	柱坐標系：$\left(a\sqrt{\dfrac{z}{c}}\sec\theta, b\sqrt{\dfrac{z}{c}}\tan\theta, z\right), 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\dfrac{z}{c}<+\infty$
單葉雙曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$(a\cosh t\cos\theta, b\cosh t\sin\theta, c\sinh t), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<t<+\infty$
雙葉雙曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	$(a\sinh t\cos\theta, b\sinh t\sin\theta, c\cosh t), 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<t<+\infty$
旋轉曲面	繞 x 軸：$\mathbf{r}(x,\theta)=(x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta), 0\le\theta\le 2\pi$ 繞 y 軸：$\mathbf{r}(y,\theta)=(f(y)\sin\theta, y, f(y)\cos\theta), 0\le\theta\le 2\pi$ 繞 z 軸：$\mathbf{r}(z,\theta)=(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z), 0\le\theta\le 2\pi$	

表 37：極坐標系、柱坐標系和球坐標系中的單位基向量

<table>
<tr>
<td>極坐標系與柱坐標系中的標準基向量</td>
<td>
<table>
<tr><th>向量</th><th>方向</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{u}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$</td><td>平行於水平面，沿徑向外</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$</td><td>平行於水平面且與 $\mathbf{u}_r$ 垂直，若從水平面上方來看，其指向逆時針方向</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{k} = \mathbf{k}$</td><td>$+z$ 方向</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">




</td>
</tr>
<tr>
<td>柱坐標系中標準基向量之間的關係</td>
<td>$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta &= \mathbf{k}\\ \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} &= \mathbf{u}_r\\ \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_\theta\end{aligned}\right\}$ 滿足右手系
$\dfrac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta$，$\dfrac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$</td>
</tr>
<tr>
<td>球坐標系中的標準基向量</td>
<td>
<table>
<tr><th>向量</th><th>方向</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$</td><td>沿徑向外</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k}$</td><td>沿緯切向由西指向東</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}$</td><td>沿經切向由北指向南</td></tr>
</table>
</td>
<td rowspan="2">


</td>
</tr>
<tr>
<td>球坐標系中標準基向量之間的關係</td>
<td>$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_r\\ \mathbf{e}_r \times {}_\varphi &= \mathbf{e}_\theta\\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\right\}$ 滿足右手系</td>
</tr>
</table>

表 38：二次錐面（橢圓錐面）

標準方程	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ 頂點：原點；主軸：z 軸；準線：$z = C$ 平面上的橢圓
有關係的曲面	該錐面是 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1$ 的漸近錐面
截平面	設 $\Gamma : F(x,y,z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, abc \neq 0, \Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ (1) Π 與 Γ 相切 $\iff \dfrac{A^2}{a} + \dfrac{B^2}{b} + \dfrac{C^2}{c} = 0, D = 0$ (2) 截 Γ 於一條無心曲線 $\iff \dfrac{A^2}{a} + \dfrac{B^2}{b} + \dfrac{C^2}{c^2} = 0, D \neq 0$ (3) Π 截 Γ 於一條有心曲線 $\iff \dfrac{A^2}{a} + \dfrac{B^2}{b} + \dfrac{C^2}{c^2} \neq 0$ (4) 一平面截 Γ 於一條中心爲 $M(x_0,y_0,z_0)$ 之有心曲線（$M \neq 0$），則該截平面方程爲 $ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0$ (5) 設點 $M(x_0,y_0,z_0)$ 滿足 $F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ 且 Γ 過點 M 的切線存在，則以 M 爲頂點之 Γ 的切線軌跡（即切錐面）爲 $(ax_0x + by_0y + cz_0z)^2 = (ax^2 + by^2 + cz^2)(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2)$
二直母線夾角	直母線方程爲 $\begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$，方向數爲 $X : Y : Z$，設 $l = \dfrac{X}{Z}, m = \dfrac{Y}{Z}$，則由 $al^2 + bm^2 + c = 0, Al + Bm + C = 0$ 解出兩直線的方向數，從而求得兩直線的夾角

表 39：二次曲面類型的判定

<table>
<tr><td>一般式</td><td colspan="6">$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$</td></tr>
<tr><td>不變量與
半不變量</td><td colspan="6">$S=A+B+C$，$\Delta=\begin{vmatrix}A&F&E&G\\F&B&D&H\\E&D&C&I\\G&H&I&J\end{vmatrix}$，$\delta=\begin{vmatrix}A&F&E\\F&B&D\\E&D&C\end{vmatrix}$，
$\delta_0=\begin{vmatrix}A&F\\F&B\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A&E\\E&C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}B&D\\D&C\end{vmatrix}$，$\Delta_1=\begin{vmatrix}A&F&G\\F&B&H\\G&H&J\end{vmatrix}$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}B&D&H\\D&C&I\\H&I&J\end{vmatrix}$，
$\Delta_3=\begin{vmatrix}A&E&G\\E&C&I\\G&I&J\end{vmatrix}$，$\Delta_0=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$，$\begin{matrix}S_1=A+B\\S_2=B+C\\S_3=A+C\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">判據</td><td>圖形</td><td>標準方程</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\delta>0$</td><td>$\Delta=0$</td><td></td><td></td><td></td><td>點（實頂點的虛錐面）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta\neq 0$</td><td></td><td></td><td>$\Delta S>0$</td><td>虛橢球面（無圖形）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Delta S<0$</td><td>橢球面（特例：球面）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\delta<0$</td><td>$\Delta>0$</td><td></td><td></td><td></td><td>單葉雙曲面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td></td><td></td><td></td><td>二次錐面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td></td><td></td><td></td><td>雙葉雙曲面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="11">$\delta=0$</td><td>$\Delta<0$</td><td></td><td></td><td></td><td>橢圓拋物面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$</td></tr>
<tr><td>$\Delta>0$</td><td></td><td></td><td></td><td>雙曲拋物面（鞍面）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$\Delta=0$</td><td rowspan="3">$\delta_0>0$</td><td>$\Delta_0=0$</td><td></td><td>線（具有實交線的虛平面對）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta_0\neq 0$</td><td>$\Delta_1S_1+\Delta_2S_2+\Delta_3S_3>0$</td><td>虛橢圓柱面（無圖形）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$</td></tr>
<tr><td>$\Delta_1S_1+\Delta_2S_2+\Delta_3S_3<0$</td><td>橢圓柱面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta_0<0$</td><td>$\Delta_0=0$</td><td></td><td>相交平面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta\neq 0$</td><td></td><td>雙曲柱面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\delta_0=0$</td><td>$\Delta_0\neq 0$</td><td></td><td>拋物柱面</td><td>$y^2=2px$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta_0=0$</td><td>$G^2+H^2+I^2-JS>0$</td><td>平行平面</td><td>$x^2=a^2$</td></tr>
<tr><td>$G^2+H^2+I^2-JS=0$</td><td>重合平面</td><td>$x^2=0$</td></tr>
<tr><td>$G^2+H^2+I^2-JS<0$</td><td>平行虛平面（無圖形）</td><td>$x^2=-a^2$</td></tr>
</table>