

生日問題

Timo Chang

timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 8 月 30 日

「要不要來跟我賭一把？我說我們班上至少有兩人同一天生日，你信嗎？」此問題在數學上稱為生日悖論或生日問題。不考慮閏年，一年有 365 天，我們當然會很直覺地認為隨便兩個人要在同一天生日的機率微乎其微，但你心中是否存疑：憑什麼我的臉書好友常有人在同一天生日？根本是巧合吧！

肯定不是！我們將在本文深入探討這麼「奇特」的現象，並用數學來解釋這種事情確實是可能的，我們先把問題寫出來：

問題 1 設有 n 人，試問：他們之中至少有兩人在同一天生日的機率為何？

解 欲求至少有兩人在同一天生日的機率，我們常用「對立事件機率的加法原理」，考慮其對立事件——大家都在不同天生日，求其機率，再由對立事件的機率公式求出原問題之解。那麼，現在讓我們來計算 n 人均在不同天生日的機率。為了方便說明，我們給每個人編號 $1, 2, \dots, n$ 。

- 1 號沒有約束，有 365 種可能。
- 2 號不能和 1 號在同一天生日，故只有 364 種可能。
- 3 號不能和前兩者同一天生日，故只有 363 種可能。
- ...
- n 號不能和前 $n - 1$ 者在同一天生日，故有 $365 - (n - 1) = 365 - n + 1$ 種可能。

因此，此 n 人在不同天生日有

$$365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)$$

種可能性。同時，若沒有限制，則可能性共有

$$365^n$$

種. 所以, 此 n 人在不同天生日的機率為

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

最後, 至少有兩人在同一天生日的機率為

$$P(n) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.$$

□

將 n 賦值, 可得下表:

n	$P(n)$
10	11.69%
20	41.14%
23	50.73%
50	97.04%
57	99.01%
60	99.41%

我們可從中得到什麼資訊?

- 如果僅有 10 人, 那麼至少有兩人同一天生日的機率只有 11.69%.
- 但如果有 20 人, 機率跳躍性地上升至 41.14%.
- 如果有 23 人, 機率竟然超過 50%.
- 如果有 57 人, 那麼至少有兩人同一天生日的機率超過了 99%!

所以, 當有人跟你說「我說我們班有兩人在同一天生日, 要跟我打賭 1000 臺幣嗎?」時, 你千萬不要跟他下注, 因為賠率比韓國瑜的髮際線還高. 不過當然, 99% 並不保證一定發生. 如果你想要 100% 確定一定有至少兩人在同一天生日, 那麼依鴿籠原理, 你的班上必須要有 366 位同學 (考慮閏年的話, 367 才是穩賺不賠). 可是如果只考慮賭注, 99% 已經很有說服力了, 不是嗎?

透過這個例子, 我想告訴你, 我們認為很多「巧合」的事物未必真的那麼令人吃驚, 因為其背後常有數學道理, 而只有我們往往以錯誤的看法去看待問題, 才會讓這些現象看起來那麼不可思議. 當有人遭遇某個看似巧合的事件時, 我們往往誤以為重點在於這件事發生在該人士身上的機率, 從而忽略了整體的機率架構. 我們應該問的是「於某人發生該事的機率為何?」

讓我們再探生日問題一遍, 我們考慮的是任兩人, 而不是特定某人 (比如你), 是否和其他人同一天生日的機率, 這些是不一樣的問題. 我們已經得出前者的機率相當之高, 但如果我們再問「有人和你同一天生日的機會多高?」——這就太低了! 如果想要這個機率超過 50%, 你至少需要 253 人 (證明給讀者留作習題).

看看一則故事來闡明這個想法¹. 一位美國女性——瓊 · 金瑟 (Joan Ginther) 在她的人生中中了 4 次樂透:

¹聽聽 Podcast: [Hidden Brain –What Are The Odds.](#)

- 1993 年中了五百四十萬;
- 2006 年中了兩百萬;
- 2008 年中了三百萬;
- 2010 年中了一千萬,

就樂透而言，她贏了兩千零四十萬美元，你羨慕嗎？你嫉妒嗎？你恨都來不及。

你或許會想：能在樂透中贏四次百萬美元是有多麼的離譜？簡直駭人聽聞！再重申一遍，如我所說，「她（或我）中四次樂透」和「這個世界上某人中了四次樂透」是兩碼子截然不同的事，前者的機率低得難以想像，那後者呢？試著想想，歷史上有多少人買過樂透、有多少種不同的樂透、這些樂透的開獎頻率有多高、已經存在了多久，再加上贏過一次的人更有可能繼續投注這件事。把這些因素都考慮進去後，再問問你自己：「在人類歷史上，有任何一個人中四次樂透的機率有多大？」這樣一想，好像也沒那麼扯了，對吧？反正中樂透的不會是你。