聖誕襪定理

Timo Chang

timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 8 月 15 日

本文介紹組合數學中一個有趣的定理:

定理 1 (聖誕襪定理) 對於 $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, 有

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

所以這和聖誕襪有什麼關係? 假如我們考慮以二項式係數表示的巴斯卡三角形, 並將定理 1 中相關的元素用顏色標記出來, 我們就可以立刻看出來. 下圖以 $n = 5$ 及 $k = 2$ 爲例:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

定理 1 表明: 將綠色部分的二項式係數加起來, 便能得到紅色部分, 眞是何其美好!

我們將給出定理 1 的兩種證明, 第一個證明是以算兩次原理爲出發點.

證明 (定理 1 證一) 注意到定理 1 等式的右端表示從 $n+1$ 物中選取 $k+1$ 者的方法數, 故欲證該等式, 我們需要以選取方法數來解釋等式的左端.

考慮下述情境: 將該 $n+1$ 物依次編號爲 $1, 2, \ldots, n+1$. 我們逐物考慮, 從 1 號開始, 接著是 2 號, 依此類推, 依序決定是否選擇每一物. 持續進行這些選擇, 直到總共選出了 $k+1$ 物. 接著, 考慮最後一個被選到的物, 有下列可能:

- $k+1$ 號是最後一個被選到的;
- $k+2$ 號是最後一個被選到的;
- $\ldots$
- $n+1$ 號是最後一個被選到的.

注意到, 因爲我們欲選取恰好 $k+1$ 物, 所以 k 號以前都不會是最後一個被選到的.

現, 考慮第一個情形. 若 $k+1$ 號是最後一個被選到的, 則在選到它之前, 我們必須已經選好了它之前的所有物中的 k 個. 又好死不死它之前恰好只有 k 物, 所以在此情形下的選取方法數爲

$$\binom{k}{k}.$$

接下來, 考慮第二個情形. 與情形一類似地, 如果 $k+2$ 號是最後一個被選到的, 那麼在選到它之前, 我們必須要選好 k 物. 又它之前有 $k+1$ 物, 所以在此情形下的選取方法數爲

$$\binom{k+1}{k}.$$

依此類推, 我們可以得到在最後一個情形, 選取方法數爲

$$\binom{n}{k}.$$

將所有情形的結果加起來, 即得從 $n+1$ 物之中選取 $k+1$ 物有

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k}$$

種方式, 證畢. $\square$

第二種方法是以代數運算論證, 並且需要用到以下引理:

引理 2 (巴斯卡定理) 對於 $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$, 有

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}.$$

證明 用組合數的定義直接計算:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{r\cdot n!}{r!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)\cdot n!}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n!}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \binom{n+1}{r}.
\end{aligned}
$$

□

證明 (定理 1 證二) 注意到

$$\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1},$$

因此, 反覆使用巴斯卡定理 (引理 2), 可得

$$
\begin{aligned}
\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k} &= \binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k} \\
&= \binom{k+2}{k+1}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n}{k+1}+\binom{n}{k} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}
$$

□