劉維爾在丟番圖逼近論中的定理與劉維爾數

Timo Chang
timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 12 月 25 日

其實早在數百年前就已經有數學家提出數的有理性與超越性的概念. 對於「有理性」的研究, 18 世紀已有一些重要的成果, 例如歐拉 (Euler) 在 1744 年證明了 e 是無理數, 而蘭伯特 (Lambert) 則在 1761 年證明了 π 也是無理數. 不過, 超越數的存在性直到 1844 年才首次被證實. 那年, 約瑟夫·劉維爾 (Joseph Liouville) 在研究無理代數數的某種近似性質時, 做出了關鍵的突破, 並利用此性質首先明確地構造出一個超越數的例子. 本文將介紹他所開啓的這樣理論的起點.

1 劉維爾在丟番圖逼近論中的定理

定理 1.1 (劉維爾在丟番圖逼近論中的定理) 設 α 爲滿足 n 次不可約多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ 的無理代數數. 那麼, 存在一數 $A > 0$ 使得對一切 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, 均有

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}.$$

粗略來說, 定理 1.1 表明, 所有無理代數數 α 無法用有理數「很好地」去近似, 這是因爲在 α 及任意有理數 p/q 之間一定有 A/q^n 的差距. 換言之, 若有無理數 α 可以由有理數很好地近似到一定程度, 則 α 必爲超越數.

證明 由於 f 是多項式, 其導數 f' 必爲連續函數, 故依最值定理, $M := \max_{[\alpha-1,\alpha+1]} |f'(x)|$ 必存在. 設 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ 爲 f 的所有異於 α 的根構成的集合, 且設

$$0 < A < \min\{1, 1/M, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\},$$

我們斷言該 A 有定理描述中的性質.

假設不然, 即存在 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ 滿足

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{A}{q^n}, \tag{1}$$

由此可知,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{A}{q^n} \le A < 1,$$

故 $p/q \in [\alpha-1, \alpha+1]$. 依均值定理, α 和 p/q 之間至少有一點 ξ 滿足

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\xi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right). \tag{2}$$

因爲 p/q 也在該區間中, 所以 $\xi \in [\alpha-1, \alpha+1]$. 於是, 根據 M 的定義, 我們有

$$M \geq |f'(\xi)|.$$

另外, α 是 f 的一根, 即 $f(\alpha)=0$, 而由對於每個 $i=1,\ldots,m$, $|\alpha - p/q| \leq A < |\alpha - \alpha_i|$ 可知, $p/q \notin \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$. 換言之, $f(p/q) \neq 0$. 有了這兩個條件, 連同 (2) 可推得 $f'(\xi) \neq 0$, 因此有

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(\alpha) - f(p/q)|}{|f'(\xi)|} = \frac{|f(p/q)|}{|f'(\xi)|}.$$

由此可見, 其分子

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|c_0 + c_1\frac{p}{q} + \cdots + c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n\right| \\ &= \frac{1}{q^n}\left|c_0q^n + c_1pq^{n-1} + \cdots + c_np^n\right| \\ &\geq \frac{1}{q^n},\end{aligned}$$

其中, 最後一個等式成立是因爲 $c_0,\ldots,c_n,p,q$ 均爲整數, 且它們在最後一個絕對值中的組合非零 (由於 $f(p/q) \neq 0$). 現在, 我們可將一切不等式綜合在一起, 可得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|f(p/q)|}{|f'(\xi)|} \geq \frac{1}{|f'(\xi)|q^n} \geq \frac{1}{Mq^n} > \frac{A}{q^n},$$

但這與 (1) 衝突. □

2 劉維爾數

在上一節中, 我們介紹並證明了劉維爾關於無理代數數近似型的重要定理, 正是憑藉著這個結果, 他得以首次明確構造出一個超越數的例子. 接下來, 我們將具體探討他的構造方式.

定義 2.1 (劉維爾數) 設 $\alpha \in \mathbb{R}$, 若對一切 $n \in \mathbb{N}$, 皆存在 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, 使得

$$0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}, \tag{3}$$

則稱 α 爲**劉維爾數**.

根據定義, 劉維爾數皆可在某種程度上被有理數良好地近似. 定理 1.1 暗示了所有劉維爾數均爲超越數——而事實也確實如此, 我們將透過兩個步驟加以證明.

命題 2.2 所有劉維爾數均爲無理數.

證明 假設不然, 即存在有理劉維爾數 α, 則可記 $\alpha = p/q$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$. 取充分大的正整數 n 使得 $2^{n-1} > q$. 我們斷言: 此特定的 n 與定義 2.1 矛盾, 即對一切 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, (3) 中其中一個不等式不成立 (從而 α 不會是劉維爾數).

注意到 $|\alpha - a/b| = |p/q - a/b| = |(pb - aq)/qb|$.

- 情況 1: $|pb - aq| = 0$, 此時 $|\alpha - a/b| = 0$, 但這與 (3) 的第一個不等式矛盾.
- 情況 2: $|pb - aq| \geq 1$, 此時
$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{b2^{n-1}} \geq \frac{1}{b \cdot b^{n-1}} = \frac{1}{b^n},$$
第二個不等式成立於 n 的選取, 而第三個不等式成立於 $b \geq 2$, 但這與 (3) 中的第二個不等式矛盾.

得證. □

命題 2.3 所有劉維爾數均爲超越數.

證明 再次採矛盾證法, 假設有劉維爾數 α 是代數數. 依命題 2.2 可知 α 是無理數, 故滿足定理 1.1 的假設, 因此, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 及 $A > 0$, 對於一切 $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, 均有
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}. \tag{4}$$

取充分大的正整數 r 使得 $2^r > 1/A$, 那麼由於 α 是劉維爾數, 依定義 2.1, 存在 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, 使得 $0 < |\alpha - a/b| < 1/b^{n+r}$, 但由此可推得
$$0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+r}} = \frac{1}{b^n b^r} \leq \frac{1}{b^n 2^r} < \frac{A}{b^n},$$
這與 (4) 矛盾, 證畢. □

我們已證明所有劉維爾數均爲超越數, 接下來將舉一個劉維爾數的例子, 稱爲**劉維爾常數**, 是由劉維爾他自己提出的.

例 2.4 (劉維爾常數) 定義無窮和
$$L := \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{m!}} = 0.110\,001\,000\,00\cdots.$$

注意到其小數表示在小數點後的每第 $m!$ 位均爲 1, 餘者均爲 0. 特別來說, L 是無理數.[1] 我們斷言 L 是劉維爾數, 從而由命題 2.1 可推得 L 是超越數.

給定 $n \in \mathbb{N}$, 將 L 寫成
$$L = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{10^{m!}} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{m!}} = \frac{a'}{10^{n!}} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{m!}},$$

[1] 某實數是有理數的充要條件爲: 其小數表示或者只有有限位, 或者有循環節.

其中, a' 是使得第一個和式可寫成單個分數的某數. 現, 取 $a := a'$, $b := 10^{n!}$, 由此可得

$$\begin{aligned}0 < \left|L - \frac{a}{b}\right| &= \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{m!}} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{m=n+2}^{+\infty} \frac{1}{10^{m!-(n+1)!}} \\ &\leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{10^{(n+1)!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!-1}} \leq \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^n,\end{aligned}$$

其中, 最後一個不等式用到了 $(n+1)! - 1 \geq n(n!)$ $(n \in \mathbb{N})$. 因此, 依定義 2.1, L 是劉維爾數.