

多變數微積分

仙女國公主

最後編輯: 2026 年 8 月 28 日

目錄

6	多變數函數的極限	5
6.1	* 高維空間中點列的極限	5
6.2	多變數函數極限的定義與性質	7
6.3	合成函數的極限運算	11
6.4	* 累次極限	16
6.5	多變數函數的連續性	19
7	多變數函數的微分學	27
7.1	偏導數	27
7.2	* 雅可比矩陣與微分量	30
7.3	合成函數的微分	35
7.4	* 多變數函數的泰勒公式	41
7.5	隱函數的求導公式	44
7.6	方向導數	52
7.7	多變數微分學在幾何學中的應用	54
7.8	多變數微分學於求極值問題中的應用	61
8	重積分	77
8.1	重積分的概念與基本性質	77
8.2	重積分的計算	81
8.3	變數變換法	95
8.4	反常重積分	104
8.5	重積分的應用	115
8.6	* 含參變數定積分	125
9	曲面積分與曲線積分	131
9.1	曲線積分	131
9.2	曲面積分	138
9.3	格林定理	149
9.4	向量微分算子	158
9.5	高斯散度定理	159
9.6	斯托克斯旋度定理	165
9.7	曲線積分與曲面積分的應用	170

10 簡易常微分方程式	175
10.1 微分方程的基本概念	175
10.2 一階微分方程式	177
10.3 高階微分方程式	191
10.4 * 微分方程組	207
10.5 * 微分方程式的冪級數解	211
10.6 * 全微分方程	214
參考資料	217

單元 6

多變數函數的極限

6.1 * 高維空間中點列的極限

定義 6.1.1 設 $\{\mathbf{x}_k\}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中一點列, 如果存在一個向量 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 對於任意給定的正數 ε , 總存在正整數 K , 使得對於 $k > K$ 時的一切 k , 不等式 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ 均成立, 則稱點 (或向量) $\mathbf{x}_0$ 是點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的**極限**, 或者稱點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ **收斂**於 $\mathbf{x}_0$, 記作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 \quad \text{或} \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

如果這樣的點 $\mathbf{x}_0$ 不存在, 則稱點列極限不存在或沒有極限, 或稱點列**發散**.

註記 6.1.2 以後皆使用如下記號來表示 $\mathbb{R}^n$ 中的點:

$$\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad \mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

命題 6.1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收斂於點 $\mathbf{x}_0$ 的充要條件為: 對每個 $i \in \{1, \dots, n\}$, 均有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}.$$

證明 對每個 $i \in \{1, \dots, n\}$ 及所有 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$0 \leq |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(0)}|.$$

由此不等式及數列的夾擠定理, 即證得命題. □

注意 6.1.4 雖然上述證明中不等式各邊均為「數列」. 即使 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|$ 看起來像是「向量項」, 使人覺得很陌生、納悶自己何曾見過「點列版夾擠定理」, 但實際上這項是該向量的長度, 即

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_j^{(0)})^2},$$

這相當於數列 $\{y_k\}$, 其中

$$y_k = f(x_j^{(k)}), \quad f(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x - x_j^{(0)})^2}.$$

$\mathbb{R}$ 中數列極限的一些在高維空間有意義的性質可以平行地推廣至 $\mathbb{R}^n$ 中的點列, 下面不加證明地列出 $\mathbb{R}^n$ 中收斂點列的一些性質:

命題 6.1.5 (收斂點列之極限的唯一性) 若 $\mathbb{R}^n$ 中的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收斂, 則其極限必唯一。

命題 6.1.6 (收斂點列的有界性) 若 $\mathbb{R}^n$ 中的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收斂, 則存在 $M > 0$ 使得對一切 $k \in \mathbb{N}$, 均有 $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$ (稱此性質為點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的**有界性**)。

命題 6.1.7 (點列極限的運算性質) 設 $\mathbb{R}^n$ 中的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 及 $\{\mathbf{y}_k\}$ 分別收斂於 $\mathbf{x}_0$ 及 $\mathbf{y}_0$, $\mathbb{R}$ 中的數列 $\{c_k\}$ 收斂於 c_0 , 再設 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 則有

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha \mathbf{x}_k + \beta \mathbf{y}_k) = \alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{y}_0 = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k \text{ (線性性);}$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k \mathbf{x}_k) = c_0 \mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k;$$

$$(3) \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k) = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k;$$

$$(4) \text{ 對於 } n = 3, \text{ 有 } \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k \times \mathbf{y}_k) = \mathbf{x}_0 \times \mathbf{y}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \times \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k.$$

證明 僅證明 (3). 依定理 6.1.3, 對於 $i \in \{1, \dots, n\}$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)} \quad \text{及} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_i^{(k)} = y_i^{(0)}.$$

由數列極限的運算性質, 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} y_i^{(k)} = x_i^{(0)} y_i^{(0)},$$

從而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} y_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(0)} y_i^{(0)} = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0.$$

(3) 的證明也類似。 □

以下介紹點列發散的一種情形。

定義 6.1.8 設 $\{\mathbf{x}_k\}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一點列. 若對所有 $M > 0$, 均有 $K \in \mathbb{N}$, 只要 $k > K$, 便有 $\|\mathbf{x}_k\| > M$, 則稱點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ **發散至無窮遠點**, 記作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \infty \quad \text{或} \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

這相當於 $\{\|\mathbf{x}_k\|\}$ 是無窮大數列, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k\| = +\infty.$$

注意 6.1.9 與 $\mathbb{R}$ 中的數列的不同點在於, $\mathbb{R}$ 上只有兩個方向的無窮遠點 ($+\infty$ 及 $-\infty$), 而空間 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中有無窮多個方向的無窮遠點, 但我們不區分方向¹, 均統稱為 $\mathbf{x}_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). 幾何直觀上來看, 點列最終會離開任一個有界區域 (有界集 E 是指滿足 $\exists R > 0, E \subseteq B_R(\mathbf{0})$ 的集合, 其中 $B_R(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < R\}$).

¹這在拓撲學中對應「單點緊化」的概念, 即把所有無窮遠點看作同一個「無窮遠點」。

附錄: $\mathbb{R}^n$ 中的叉積

$\mathbb{R}^n$ 中也可以定義叉積, 一般微積分課程不太會用到此觀念, 忽略也暫時不影響學習, 讀者可斟酌閱讀此補充材料. 設 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一組線性獨立²的向量, 將它們的叉積

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}_1 \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1}$$

定義成對所有 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 都滿足

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} \end{pmatrix}$$

的唯一向量 $\mathbf{x}$. 注意到

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(\mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1} \end{pmatrix}$$

是線性映射³, 故 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的各分量為 $x_i = T(\mathbf{e}_i)$ ($i = 1, \dots, n$), 其中 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的標準基向量⁴.

若 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ 線性相依, 則規定 $\mathbf{x}_1 \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1} := \mathbf{0}$. 不難看出, 形式上可將 $\mathbf{x}_1 \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1}$ 寫成

$$\mathbf{x}_1 \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_j & \cdots & \mathbf{e}_n \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_j^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(i)} & \cdots & x_j^{(i)} & \cdots & x_n^{(i)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_j^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

將上述行列式按第一列⁵降階展開, 即得叉積的分量表達式, 此處寫成行列式只是為了簡便.

顯然, 若點列 $\{\mathbf{x}_{i,k}\}_{k=1}^\infty$ 收斂於 $\mathbf{x}_{i,0}$ ($i = 1, \dots, n-1$), 則點列 $\{\mathbf{x}_{1,k} \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1,k}\}$ 收斂於 $\mathbf{x}_{1,0} \times \cdots \times \mathbf{x}_{n-1,0}$, 這是因為點列 (向量) 的叉積的各分量只是一些收斂數列的和、差與積.

6.2 多變數函數極限的定義與性質

定義 6.2.1 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ ⁶. 若存在向量 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$, 對於任意給定的正數 ε , 皆存在正數 δ , 使得只要 $\mathbf{x} \in D \cap B'_\delta(\mathbf{x}_0)$, 便有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\| < \varepsilon$, 則稱向量 $\mathbf{A}$ 為函數 $\mathbf{f}$ 當 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 時的**極限**, 記作

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad \text{或} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A} \quad (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0).$$

若滿足上述敘述的 $\mathbf{A}$ 不存在, 則稱函數 $\mathbf{f}$ 當 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 時**發散**或極限不存在.

²即只要 $a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{0}$, 便有 $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, 否則稱該向量組**線性相依**.

³即對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 均有 $T(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \lambda T(\mathbf{v})$.

⁴ $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

⁵本講義將橫排稱為「列」, 縱排稱為「行」.

⁶此符號表示 $\mathbf{x}_0$ 為 D 的聚點, 詳見 [9, 單元一, 第一節].

註記 6.2.2 上述多變數函數極限的定義適用於非常廣泛的函數類。不難驗證，對於定義在區間 (a, b) 上的單變數函數 f ，上述定義實際上給出了變數 x 趨近於 $x_0 \in (a, b)$ 時的極限以及 x 趨近於 a 或 b 時的單側極限的統一定義。另外，上述極限也不要求函數在一個區間上處處有定義，其定義域可為更一般的集合（只要該集合有聚點，如 $\mathbb{Q}$ 等，今後不再特別說明所討論的函數定義域含有聚點）。

註記 6.2.3 若集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 無界，則可視 ∞ 為 A 的「聚點」。雖然 $A' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \delta > 0, A \cap B'_\delta(\mathbf{x}) \neq \emptyset\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，照理來說 $\infty \notin A'$ （因為 $\infty \notin \mathbb{R}^n$ ），但為了接下來方便敘述，我們強行約定：

$$A \text{ 是無界集} \iff \infty \in A'.$$

注意 $B'_\delta(\infty) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| > 1/\delta\}$ 為 ∞ 的去心 δ 鄰域。

有了上述約定，定義 6.2.1 就有如下特殊情形：

定義 6.2.4 設 $\mathbf{f}$ 的定義域 $\text{dom}(\mathbf{f})$ 無界（即 $\infty \in \text{dom}(\mathbf{f})'$ ）。若存在向量 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ ，對於任意給定的正數 ε ，皆存在正數 X ，對一切 $\mathbf{x} \in \text{dom}(\mathbf{f})$ ，只要 $\|\mathbf{x}\| > X$ ，便有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\| < \varepsilon$ ，則稱向量 $\mathbf{A}$ 為函數 $\mathbf{f}$ 當 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ 時的極限，記作

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad \text{或} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A} \quad (\mathbf{x} \rightarrow \infty).$$

根據極限的定義，立刻可得以下結論：

命題 6.2.5

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \iff \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\| = 0.$$

特別地，當 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 時，有

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = 0.$$

與單變數函數類似地，我們可以定義多變數函數的無窮小量及無窮大量。下面給出無窮大量的定義，而無窮小量的定義請讀者自行給出。

定義 6.2.6 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ ， $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{x}_0 \in D'$ （若 D 無界，則 $\mathbf{x}_0$ 可為 ∞ ）。若對於任意給定的正數 Y ，總存在正數 δ ，使得只要 $\mathbf{x} \in D \cap B'_\delta(\mathbf{x}_0)$ ，便有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| > Y$ ，則稱 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 當 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 時發散至無窮遠處，或稱 $\mathbf{f}$ 是當 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 時的無窮大量，記作

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{或} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0).$$

特別地，當 $m = 1$ 時， $\mathbf{f} = f$ 為實函數，此時把 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| > Y$ 替換成 $f(\mathbf{x}) > Y$ 或 $f(\mathbf{x}) < -Y$ ，就得到 $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$) 或 $f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$) 的定義。

今後，除非有特殊情况，否則接下來的敘述將略去「若 D 無界，則 $\mathbf{x}_0$ 可為 ∞ 」的註記。考慮一般（含聚點的）集合作為函數的定義域，自然會囊括定義域為無界集的情形，此時 ∞ 作為聚點也可一並考慮進來。

例 6.2.7 求證

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

證明 該函數的定義域為 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ，點 $(0,0)$ 是 D 的聚點。由於

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2 = \|(x, y) - (0, 0)\|^2,$$

因此對任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 則當 $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ (即 $(x, y) \in D \cap B'_\delta((0, 0))$) 時, 有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon,$$

故得證. □

例 6.2.8 證明

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 1.$$

證明 該函數的定義域 $\mathbb{R}^2$ 無界, 無窮遠點 ∞ 是 $\mathbb{R}^2$ 的聚點. 給定 $\varepsilon > 0$, 觀察

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{x^2 + y^2 + 1} \right| = \frac{1}{\|(x, y)\|^2 + 1},$$

要使

$$\frac{1}{\|(x, y)\|^2 + 1} < \varepsilon, \quad (6.1)$$

需要

$$\|\mathbf{x}\|^2 > 1/\varepsilon - 1. \quad (6.2)$$

若 $\varepsilon \geq 1$, 則 $1/\varepsilon - 1 < 0$, 從而 (6.2) 式恆成立, 此時可任取 $X > 0$ (或 $1/\delta$), 我們取 $X = 1$, (6.1) 當然成立.

若 $0 < \varepsilon < 1$, 則 $1/\varepsilon - 1 > 0$, 此時取 $X = \sqrt{1/\varepsilon - 1}$, 就有 $\varepsilon = 1/(X + 1)$, 從而當 $\|(x, y)\| > X$ 時,

$$\frac{1}{\|(x, y)\| + 1} < \frac{1}{X + 1} = \varepsilon,$$

即 (6.1) 也成立. 因此, 取

$$X = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geq 1; \\ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}, & 0 < \varepsilon < 1, \end{cases}$$

則當 $\|(x, y)\| > X$ 時, 無論 $0 < \varepsilon < 1$ 還是 $\varepsilon \geq 1$, 都有 (6.1) 式成立. □

以下不加證明地列出多變數函數的極限的一些性質.

命題 6.2.9 (函數極限的唯一性) 函數極限若存在, 則必唯一.

命題 6.2.10 (收斂函數的局部有界性) 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$. 若 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 存在, 則存在正數 M 及 δ , 使得只要 $\mathbf{x} \in D \cap B'_\delta(\mathbf{x}_0)$, 便有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M$.

命題 6.2.11 (函數極限的四則運算) 設 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 若 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) = L$ 皆存在, 則

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} = \alpha \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x});$$

$$(2) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})) = L \mathbf{A} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x});$$

$$(3) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x});$$

$$(4) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{A}\| = \left\| \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\|;$$

$$(5) \text{ 當 } m = 1 \text{ 時, 記 } \mathbf{f} = f, \mathbf{g} = g, \mathbf{A} = A, \mathbf{B} = B, \text{ 那麼只要 } B \neq 0, \text{ 便有 } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})};$$

(6) 當 $m = 3$ 時, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

命題 6.2.12 (實函數極限的保序性) 設 $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ⁷, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$, $f(\mathbf{x}) \rightarrow A$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$), $g(\mathbf{x}) \rightarrow B$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$). 若存在 $\delta > 0$, 使得對於 $B'_\delta(\mathbf{x}_0)$ 中的所有 $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ 恆成立, 則 $A \leq B$.

注意 6.2.13 若把命題 6.2.12 中的 $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ 替換成 $f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})$, 則無法推出 $A < B$, 仍只能推得 $A \leq B$.

由實函數的夾擠定理及命題 6.2.5, 還可以得到如下結果:

命題 6.2.14 (夾擠定理) 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$. 若存在正數 δ , 使得對於 $B'_\delta(\mathbf{x}_0)$ 中的所有 $\mathbf{x}$,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}| \leq g(\mathbf{x})$$

總成立, 且 $g(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$), 則

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}.$$

類似於單變數向量函數, 多變數向量函數亦有如下結論:

命題 6.2.15 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$. 又設 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, 其中 $f_i \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, m$). 那麼, 有

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \iff \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = A_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

有了命題 6.2.15, 可知一般上如果要求一個向量函數的極限, 只需分別求出各分量函數 (實函數) 的極限即可. 因此, 本單元將著重提供實函數的極限計算例子.

例 6.2.16 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

解 函數 $\sin(xy)/x$ 的定義域為 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, $(0, 2) \in D'$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right) = \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = 1 \cdot 2 = 2.$$

例 6.2.17 計算 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

證明 使用等價無窮小代換

$$\sin(x^3 + y^3) \sim x^3 + y^3 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)),$$

由於

$$\begin{aligned} |x^3 + y^3| &= |x + y| |x^2 + y^2 - xy| \leq |x + y| (|x^2 + y^2| + |-xy|) \\ &\leq |x + y| \left(|x^2 + y^2| + \frac{1}{2} |x^2 + y^2| \right) = \frac{3}{2} |x + y| (x^2 + y^2), \end{aligned}$$

因此對所有 $(x, y) \neq (0, 0)$, 有

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{3}{2} |x + y|.$$

⁷此處 f, g 的定義域未必完全相等, 而 $D = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$. 如果 $D \subsetneq \text{dom}(f)$, 那麼就把 f 視為其在 D 上的限制 $f|_D$, 仍記作 f . 函數 g 亦是如此. 今後若要在一個命題中討論兩個以上的函數, 則直接預設在它們同時有意義的集合上討論, 不再贅述.

不難算出

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{2} |x+y| = 0,$$

從而

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = 0,$$

故得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0.$$

□

6.3 合成函數的極限運算

與單變數函數極限與數列極限的關係類似地, 不難證出如下結論:

命題 6.3.1 (* 點列極限與函數極限的關係) 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D'$, 則 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ 的充要條件為: 對於 $D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ 中任一滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ 的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}$.

另外, 與單變數合成函數的極限類似地, 不難證出如下結論:

命題 6.3.2 (合成函數的極限) 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(D_g, \mathbb{R}^l)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_g \subseteq \mathbb{R}^m$, 考慮合成函數 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^l)$, 其中 $D = \{\mathbf{x} \in D_f : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in D_g\}$. 又設 $\mathbf{x}_0 \in D'$ (當然, 只要 D 無界, $\mathbf{x}_0$ 也可以是 ∞), $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^l \cup \{\infty\}$. 若以下兩個極限條件成立:

(1) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ (內層極限廣義存在⁸);

(2) $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{L}$ (外層極限廣義存在),

並且下列至少一項附加條件成立:

(一) 存在 $\delta_0 > 0$, 使得對所有 $\mathbf{x} \in D \cap B'_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 都有 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ (去心條件);

(二) $\mathbf{y}_0 \in D_g (\subseteq \mathbb{R}^m)$ (即 $\mathbf{y}_0$ 為有限點) 且 $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{L}$ (連續條件),

則 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處的極限存在, 且

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{L}.$$

注意 6.3.3 在命題 6.3.2 中, 如果 $\mathbf{y}_0 = \infty$, 那麼條件 (一) 就會自動成立. 因此, 當內層函數 $\mathbf{f}$ 趨向 ∞ 時, 完全不需要去檢查函數 $\mathbf{g}$ 是否連續, 也不用擔心函數 $\mathbf{g}$ 提早「踩中」極限點. 只要內層函數 $\mathbf{f}$ 趨向 ∞ 且外層函數 $\mathbf{g}$ 在 ∞ 處的極限存在, 合成函數的極限就必然成立.

註記 6.3.4 (1) 若 $\mathbf{x}$ 以某種特殊的方式 (如沿曲線、曲面、點列等) 趨於 $\mathbf{x}_0$ 時, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的極限不存在, 則 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 必不存在.

(2) 若 $\mathbf{x}$ 以兩種特殊的方式趨於 $\mathbf{x}_0$ 時, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 分別趨於兩個不同的極限, 則 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 必不存在.

⁸ 極限廣義存在是指極限或者為有限點, 或者為無窮遠點.

證明 (1) 假設 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ 存在.

情況一：沿點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 趨近. 已知存在一點列 $\{\mathbf{x}_k\} \subseteq D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$. 根據命題 6.3.1, 既然 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, 對於該點列, 必然有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}.$$

此結果表示該極限存在, 與前提「沿點列趨近時 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ 極限不存在」矛盾.

情況二：沿路徑 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ 趨近. 設當 $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0$ 時, 路徑 $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{x}_0$. 在極限過程中, 存在 $\mathbf{t}_0$ 的去心鄰域使得 $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{x}_0$. 將 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ 視為內層函數, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 視為外層函數, 套用命題 6.3.2:

- (1) 內層極限: $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0} \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0$;
- (2) 外層極限: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$;
- (3) 附加條件: 由於 $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{x}_0$, 滿足去心條件,

可知合成函數的極限必然存在, 且:

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = \mathbf{A},$$

這與題目給定「沿此路徑極限不存在」的前提矛盾.

綜合上述矛盾, 假設不成立, 故 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 必不存在.

(2) 假設 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ 存在.

情況一：沿兩個不同的點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 與 $\{\mathbf{x}'_k\}$ 趨近. 設 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}'_k = \mathbf{x}_0$. 已知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{L}_1$ 以及 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) = \mathbf{L}_2$, 且 $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{L}_2$. 根據命題 6.3.1, 既然函數在 $\mathbf{x}_0$ 的極限為 $\mathbf{A}$, 那麼任何趨於 $\mathbf{x}_0$ 的點列, 其函數值的極限都必須是 $\mathbf{A}$. 因此:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A} \quad \text{即} \quad \mathbf{A} = \mathbf{L}_1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) = \mathbf{A} \quad \text{即} \quad \mathbf{A} = \mathbf{L}_2.$$

由此推得 $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$, 與前提 $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{L}_2$ 矛盾.

情況二：沿兩條不同的路徑 $\mathbf{x}_1(\mathbf{t})$ 與 $\mathbf{x}_2(\mathbf{s})$ 趨近. 設當 $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0$ 時 $\mathbf{x}_1(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{x}_0$, 且當 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$ 時 $\mathbf{x}_2(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{x}_0$. 已知 $\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(\mathbf{t})) = \mathbf{L}_1$ 且 $\lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(\mathbf{s})) = \mathbf{L}_2$, 其中 $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{L}_2$. 同理, 根據命題 6.3.2, 因為這兩條路徑最終都趨向 $\mathbf{x}_0$ 且滿足去心條件, 合成函數的極限都必須等於外層函數的極限 $\mathbf{A}$. 也就是說:

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(\mathbf{t})) = \mathbf{A} \quad \text{即} \quad \mathbf{A} = \mathbf{L}_1,$$

$$\lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(\mathbf{s})) = \mathbf{A} \quad \text{即} \quad \mathbf{A} = \mathbf{L}_2.$$

再次推導出 $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$, 與前提矛盾.

綜合上述矛盾, 假設不成立, 故 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 必不存在.

□

註記 6.3.5 欲證明某多變數函數極限不存在, 可以如註記 6.3.4 的內容那樣直接找出使極限不存在的特殊路徑 (點列), 或直接找出兩條使極限不相等的路徑 (點列); 也可以模仿註記 6.3.4 的證明 (即把抽象的符號換成具體的式將證明重新演繹一遍), 用反證法假設極限存在, 再選一極限不存在 (或兩極限不相等) 的路徑或點列來導出矛盾.

例 6.3.6 設

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $f(x, y)$ 是否存在極限?

解 (解一) 取點列 $\{(0, 1/k)\}$, 則

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(0, \frac{1}{k}\right) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}\right) = (0, 0) \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

再取點列 $\{(1/k, 1/k)\}$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}\right) = (0, 0) \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k^2}{2/k^2} = \frac{1}{2}.$$

因此, 當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $f(x, y)$ 不存在極限.

解 (解二) 固定 $k \in \mathbb{R}$, 取路徑 $y = kx$, 即考慮路徑 (x, kx) , 則當 $x \rightarrow 0$ 時, $(x, kx) \rightarrow (0, 0)$. 由於

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{k^2}{1 + k^2},$$

這表示點 (x, y) 沿著直線 $y = kx$ 趨於 $(0, 0)$ 時, $f(x, y)$ 的極限依賴於直線斜率 k 的選取, 從而當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $f(x, y)$ 不存在極限.

解 (解三) 在 xy 平面上取極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

其中 $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, 則

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta,$$

且當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $r \rightarrow 0^+$. 又 $\frac{1}{2} \sin 2\theta$ 與 r 無關但不是常數函數, 故極限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

例 6.3.7 設

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $f(x, y)$ 是否存在極限?

解 取路徑 $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$), 則當 (x, y) 沿該直線趨於 $(0, 0)$ 時, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{(x^2 + k^2)x^2} = 0.$$

另一方面, 取路徑 $y = x^2$, 則當 (x, y) 沿該拋物線趨於 $(0, 0)$ 時, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

這表示 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

此例即為函數沿任何直線的極限都存在且相等不足以保證該函數極限存在的例子.

例 6.3.8 設函數

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = (\sin 1 - \sin(x^2 + y^2 + z^2)) \ln(1 - (x^2 + y^2 + z^2)) \quad (\mathbf{x} \in D),$$

其中 $D = \{\mathbf{x} = (x, y, z) : |\mathbf{x}| < 1\}$, 並設 $\mathbf{x}_0 \in \partial D = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$, 求極限 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

解 顯然當 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 時, $R = |\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow 1^-$, 故

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 1^-} (\sin 1 - \sin R) \ln(1 - R) = 0.$$

最後一步的極限可由單變數函數極限的方法求得.

例 6.3.9 求下列極限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + x^2 y^2}{2x^2 + 3y^2}; \quad (3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{x^6 + y^4}.$$

解 (1) 方法一: 設 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 則 $|y| \leq r$ 及 $|\sin x| \leq |x| \leq r$. 於是, 對於 $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left| \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|y|^2 |\sin x|}{r} \leq \frac{r^2 \cdot r}{r^2} = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

因 $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$), 故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} = 0.$$

方法二: 如果沒注意到 $|\sin x| \leq |x|$ 的話, 可以注意到 $\sin x \sim x$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$), 故原式可化為有理函數 $xy^2/(x^2 + y^2)$ 當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時的極限. 接下去的操作和方法一差不多.

(2) 設 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 則 $|x| \leq r$, $|y| \leq r$. 於是, 對於 $(x, y) \neq (0, 0)$, 因為

$$0 < r^2 = x^2 + y^2 \leq 2x^2 + 3y^2,$$

所以

$$\left| \frac{x^4 + x^2 y^2}{2x^2 + 3y^2} - 0 \right| = \frac{x^4 + x^2 y^2}{2x^2 + 3y^2} \leq \frac{r^4 + r^2 r^2}{r^2} = 2r^2 = 2(x^2 + y^2).$$

因 $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$), 故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + x^2 y^2}{2x^2 + 3y^2} = 0.$$

(3) 設 $f(x, y) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$). 當沿著路徑 $(x, y) = (0, t)$ (即 y 軸) 時, $t \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$), 於是

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{0 + t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} \quad \text{不存在}.$$

因此, 所求極限不存在.

(4) 依算幾不等式, 有

$$\frac{x^6 + y^4}{2} \geq \sqrt{x^6 y^4} = |x|^3 y^2,$$

兩邊同乘以 $|x|$ 並整理, 得

$$0 \leq \frac{x^4 y^2}{x^6 + y^4} \leq \frac{1}{2} |x|.$$

由於 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} |x| = 0$, 因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^2}{x^6 + y^4} = 0.$$

注意 6.3.10 先前我們已經在例 6.3.6 的方法三中使用了「極座標代換」來說明極限不存在, 而例 6.3.8 也幾乎與「球座標代換」(看作極座標代換的推廣) 擦邊. 如果只是如例 6.3.6 的方法三那樣用來說明極限不存在, 那就沒什麼大問題, 可以視為一條特殊路徑. 實際上, 有時候極座標代換可以簡化計算過程, 但很多學生經常會因為將 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 替換成 $r \rightarrow 0^+$ 後, 無意識地將 θ 看成是一個與 r 無關的常數. 另外, 極座標的計算無畏複雜且推廣性差, 到了三變數以上的球座標, 計算會非常繁瑣. 比起依賴極座標和三角函數, 學會用「三角不等式」或「絕對值」來做不等式放縮 (也就是夾擠定理) 才是更正統且不易出錯的數學分析訓練. 以下先提供一個極座標代換的誤用, 再給出使用極座標代換不會出現問題的時機及一些例子.

例 6.3.11 如例 6.3.7 中的 $f(x, y)$, 我們嘗試使用極座標代換. 設 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, 其中 $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, 則當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $r \rightarrow 0^+$. 於是, 代入極座標後, 函數化為

$$\frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

當固定 θ 的時候 (要分開討論 $\sin \theta$ 是否為 0), 上式會趨近於 0 (即使 $\sin \theta = 0$ 亦是如此), 很容易讓人誤判答案就是 0. 這與例 6.3.7 的結果不相符!

問題出現在以下幾點:

- (1) 擅自固定 θ , 相當於沿著射線趨近於原點, 所以這樣的操作並沒有討論到「所有可能」的路徑.
- (2) r 和 θ 未必是相互獨立的參數, 當 r 在變化的時候, θ 也有可能隨之變化, 因為要沿著「任意」路徑, 比如說其中囊括了沿著螺線 $r = k\theta$ 或拋物線 $\sin \theta = r \cos^2 \theta$ 的情形, 此時當 $r \rightarrow 0^+$ 時, θ 也會跟著變動.

雖然因容易誤用不太推薦, 但極座標並非絕對不能用. 要安全地使用極座標來證明極限存在, 必須確保你的放縮與 θ 完全無關. 詳言之, 如果猜測極限值為 L , 就必須利用不等式證明:

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta) - L| \leq g(r).$$

這裡的 $g(r)$ 必須滿足兩個條件:

- 它是一個只與 r 有關, 與 θ 完全無關的函數;
- $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$.

原理很簡單, 一旦放縮到完全沒有 θ 後, 所有 r 都可以完全地直接換回 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 此時就會得到只含 x 和 y 的不等式, 再讓 (x, y) 變動就能避開變數變換帶來的問題.

例 6.3.12 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

解 設 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, 其中 $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, 則當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 時, $r \rightarrow 0^+$ 且 θ 任意變動. 於是,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{(r \cos \theta)^3 + (r \sin \theta)^3}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta). \quad (6.3)$$

方法一：由不等式

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = |r(\cos^3 \theta + r \sin^3 \theta)| \leq r(|\cos \theta|^3 + |\sin \theta|^3) \leq r(1^3 + 1^3) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

及 $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$) 可推得所求極限為 0.

方法二：注意到 (6.3) 式的計算並沒有固定任何一個 θ ，並且最後一個等式的右邊為無窮小量與有界量之積，其極限（在不特別固定任何 θ 的情況下）必為 0.

6.4 * 累次極限

先前所介紹的極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 中，兩個變數同時以任何方式分別趨於 x_0 及 y_0 ，這種極限也稱為**重極限**（如果 $f(x,y)$ 當 $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ 時為無窮大量，則稱該極限為**廣義重極限**）。本節要考察 x 與 y 依一定的先後順序相繼趨於 x_0 和 y_0 時 f 的極限。對於 n ($n \geq 3$) 變數函數的情形也類似，只是形式更複雜而已。

定義 6.4.1 設函數 $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D 在 x 軸、 y 軸上的投影分別為 $\pi_1(D)$, $\pi_2(D)$, 即

$$\pi_1(D) = \{x : (x, y) \in D\}, \quad \pi_2(D) = \{y : (x, y) \in D\},$$

x_0, y_0 分別是 $\pi_1(D), \pi_2(D)$ 的聚點（允許 ∞ 或 $\pm\infty$ ）。若對一切 $y \in \pi_2(D) \setminus \{y_0\}$ ，廣義極限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在，它一般與 y 有關，故記作

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

如果進一步極限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = L$$

還廣義存在，則稱此極限 L 為 $f(x, y)$ 先對 $x \rightarrow x_0$ ，後對 $y \rightarrow y_0$ 的**累次極限**（若為無窮大，則稱為**廣義累次極限**），記作

$$L = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

類似地可以定義先對 y 後對 x 的累次極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

注意 6.4.2 累次極限與重極限是兩個不同的概念，它們的存在性並無必然的蘊含關係。以下先看幾個例子，再來看重極限與累次極限在哪些條件下有著什麼樣的關聯。

例 6.4.3 考慮

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)),$$

由例 6.3.6 可知其當 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 的重極限不存在。但當 $y \neq 0$ 時，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

從而

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

同理可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

也就是說， f 的兩個累次極限都存在且相等。

例 6.4.4 設

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \quad (x + y \neq 0),$$

它關於原點的兩個累次極限分別為

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1$$

及

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (y - 1) = -1.$$

現在來計算 $f(x, y)$ 關於原點的重極限. 沿著直線 (x, kx) ($k \neq -1$) 時,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - kx + x^2 + k^2 x^2}{x + kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - k + x + k^2 x}{1 + k} = \frac{1 - k}{1 + k}$$

與 k 有關, 故 $f(x, y)$ 關於原點的重極限不存在.

例 6.4.5 設

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \quad (xy \neq 0),$$

它關於原點的兩個累次極限都不存在, 而由

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$$

可知 $f(x, y)$ 關於原點的重極限存在, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

例 6.4.6 設

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

則對於 $y \neq 0$, 由不等式

$$|f(x, y)| = \left| x \cos \frac{1}{y} \right| \leq |x|$$

可知 $f(x, y)$ 關於原點的重極限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0,$$

以及先 x 後 y 的累次極限

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

但因極限 $\lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{1}{y}$ 不存在, 故累次極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在.

定理 6.4.7 若 $f(x, y)$ 關於點 (x_0, y_0) 的重極限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

與累次極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

均廣義存在, 則它們必相等.

證明 給定 $\varepsilon > 0$. 設重極限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

廣義存在, 則存在正數 δ_1 , 只要 $(x,y) \in \text{dom}(f) \cap B'_{\delta_1}((x_0,y_0))$ ⁹, 便有

$$f(x,y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A). \quad (6.4)$$

另一方面, 由累次極限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ 的廣義存在性, 存在正數 δ_2 , 使得對於 $\pi_1(\text{dom}(f))$ 中滿足 $x \in B'_{\delta_2}(x_0)$ 的 x , 均存在極限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \varphi(x). \quad (6.5)$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 對於任意滿足 $x \in B'_\delta(x_0)$ 的 x , 在 (6.4) 式中令 $y \rightarrow y_0$, 由 (6.5) 式及極限保號性可得

$$\varphi(x) \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)} = B_\varepsilon(A) \cup \partial B_\varepsilon(A) \subseteq B_\varepsilon(A). \quad (6.6)$$

因為已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ 存在, 由 (6.6) 式直接可得該極限值必定落入 $B_\varepsilon(A)$ 中 (由於 ε 為任意正數, 該極限只能為 A), 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$$

□

系理 6.4.8 若累次極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

和重極限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

都廣義存在, 則三者相等.

系理 6.4.9 若累次極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$$

都存在但不相等 (可以是兩個相異實數, 或者一個為有限值而另一個為無窮大, 或者兩者為異號無窮大量), 則廣義重極限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

必不存在.

注意 6.4.10 定理 6.4.7 只保證在重極限與一個累次極限都存在的情況下, 它們會相等, 但對另一個累次極限的存在性並推不出任何結論. 系理 6.4.8 給出了累次極限次序可交換的一個充分條件, 而系理 6.4.9 則可用於否定重極限的存在性, 如例 6.4.4.

定理 6.4.11 設雙變數函數 f 滿足:

- 極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 廣義存在;
- 對於 y_0 的某去心圓鄰域內的 y , 廣義極限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ 存在,

則

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = A = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$$

⁹ 此處 $B'_\delta((x_0, y_0))$ 及 $B'_\varepsilon(A)$ 雖然使用類似的記號, 但前者是指 $\mathbb{R}^2$ 中的去心開球或二維無窮遠點的去心鄰域, 後者是指 $\mathbb{R}$ 中的去心開區間或一維無窮遠點的去心鄰域. 如果 $A \in \mathbb{R}$, 那麼 $f(x) \in B_\varepsilon(A)$ 表示 $|f(x) - A| < \varepsilon$; 如果 $A = \infty$, 那麼 $f(x) \in B_\varepsilon(A)$ 表示 $|f(x)| > 1/\varepsilon$.

證明 給定 $\varepsilon > 0$. 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 可知, 存在正數 δ , 只要 $(x,y) \in \text{dom}(f) \cap N'_\delta((x_0,y_0))$ ¹⁰, 便有

$$f(x,y) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A). \quad (6.7)$$

對任意的 $y \neq y_0$, 當 $(x,y) \in N_\delta((x_0,y_0))$ 時, 由於 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \varphi(y)$ 廣義存在, 因此可在 (6.7) 式中令 $x \rightarrow x_0$, 從而當 $y \in B'_\delta(y_0)$ 時, 有

$$\varphi(y) \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)} \subseteq B_\varepsilon(A),$$

即 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A$. □

6.5 多變數函數的連續性

函數連續性的定義與性質

定義 6.5.1 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\mathbf{x}_0$ 是 D 的孤點, 或者當 $\mathbf{x}_0 \in D'$ 時, 滿足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{x}_0), \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 則稱函數 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處連續. 若 $\mathbf{f}$ 在 $D_1 \subseteq D$ 中每一點處都連續, 則稱 $\mathbf{f}$ 在 D_1 上連續. 若 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{f}$ 處不連續, 則稱 $\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbf{f}$ 的間斷點.

注意 6.5.2 (1) 孤點一律視為函數的間斷點.

(2) 與極限的定義不同點在於, 條件「 $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 」中並不是 $\mathbf{x}_0$ 的「去心」鄰域 $B'_\delta(\mathbf{x}_0)$.

(3) 連續點本來就有要求是函數定義域中的點, 所以既然討論的是 $\mathbb{R}^n$ 的子集中的點, 就不會出現 $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ 的情形.

(4) 函數 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處連續等價於

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}.$$

不難看出多變數向量函數與其各分量函數有如下關係:

命題 6.5.3 設 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, 則 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處連續的充要條件為: 對每個 $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i 在點 $\mathbf{x}_0$ 處連續.

例 6.5.4 函數

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

的定義域為 $D = \mathbb{R}^2$, 點 $(0,0)$ 是 D 的聚點. 因 $f(x,y)$ 當 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 時的極限不存在, 所以點 $(0,0)$ 是該函數的一個間斷點.

例 6.5.5 函數

$$f(x,y) = \cos \frac{1}{x^2+y^2-4}$$

的定義域為 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 4\}$, 圓周 $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ 上的點均為 D 的聚點, 但 f 在 C 上沒有定義, 當然就在 C 上各點都不連續, 故 C 上各點均為 f 的間斷點.

命題 6.5.6 (連續函數的運算) 設 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $\mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. 若 $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \varphi$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處均連續, 則下列函數在點 $\mathbf{x}_0$ 處亦連續:

¹⁰ $N_\delta(\mathbf{A}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n, |x_i - a_i| < \delta\}$ 稱為點 $\mathbf{A}$ 的 δ 方鄰域, 集合 $N'_\delta(\mathbf{A}) = N_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}$ 稱為 $\mathbf{A}$ 的去心 δ 方鄰域, 類似地可定義 ∞ 的 (去心) 方鄰域.

- (1) $\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), (3) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, (5) $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ ($m = 3$).
 (2) $\varphi \mathbf{f}$, (4) $\mathbf{f}/\varphi$ ($\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$),

例 6.5.7 與單變數基本函數類似，多變數基本函數是指可用一個式子表示的多變數函數，這個式子是由常數及具有不同變數的單變數基本函數經過有限次的四則運算和合成運算而得到的。例如，

$$\frac{y + y^2 - x^2}{1 + x^2}, \quad \cos(x - y), \quad e^{z^2 - x^2 - y^2}, \quad \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

等都是多變數基本函數。多變數基本函數在各自的定義域上都是連續函數。

例 6.5.8 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{xy}$.

解

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 1 - 1}{xy(\sqrt{xy+1} + 1)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

以上運算之最後一個等式用到了雙變數函數 $1/(\sqrt{xy+1} + 1)$ 在點 $(0,0)$ 處的連續性。

定理 6.5.9 (連續函數的合成) 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(D_g, \mathbb{R}^l)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_g \subseteq \mathbb{R}^m$, 考慮合成函數 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^l)$, 其中 $D = \{\mathbf{x} \in D_f : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in D_g\}$. 若 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處連續, 且 $\mathbf{g}$ 在點 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 處連續, 則合成函數 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}_0$ 處亦連續。

若 $\mathbf{f}$ 在 D 上連續, 且 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{f}(D)$ 上連續, 則 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 在 D 上亦連續。

多變數函數的最值定理

引理 6.5.10 (n 維閉區間套定理) 若 $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 維閉區間列, 且當 $k \rightarrow \infty$ 時, n 維閉區間的各邊長皆趨近於 0, 則存在唯一的點 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\mathbf{p} \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k.$$

證明 對於任意的 $k \geq 0$, 可將第 k 個 n 維閉區間寫成 n 個一維閉區間的積集:

$$I_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times [a_2^{(k)}, b_2^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}] = \prod_{i=1}^n [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}].$$

由 $I_{k+1} \subseteq I_k$ 可知, 對於每個 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 對應的一維區間滿足包含關係 $[a_i^{(k+1)}, b_i^{(k+1)}] \subseteq [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}]$, 這意味著左端點數列遞增且右端點數列遞減:

$$a_i^{(0)} \leq a_i^{(1)} \leq \cdots \leq a_i^{(k)} \leq \cdots \leq b_i^{(k)} \leq \cdots \leq b_i^{(1)} \leq b_i^{(0)}.$$

固定 $i \in \{1, \dots, n\}$, 考慮集合

$$A_i = \{a_i^{(k)} : k \geq 0\},$$

顯然該集合非空且有上界 $b_i^{(0)}$, 故可令

$$p_i = \sup A_i.$$

斷言: 對所有 $k \geq 0$, $p_i \leq b_i^{(k)}$. 給定任意正整數 m 與 k , 若 $m \leq k$, 則 $a_i^{(m)} \leq a_i^{(k)} \leq b_i^{(k)}$; 若 $m > k$, 則 $a_i^{(m)} \leq b_i^{(m)} \leq b_i^{(k)}$. 也就是說, 每一個右端點 $b_i^{(k)}$ 都是集合 A_i 的上界. 由於 p_i 為 A_i 的上確界, 理應小於或等於任何一個上界, 因此對所有 k , 均有 $p_i \leq b_i^{(k)}$. 又根據 p_i 為 A_i 的上界, 自然有 $a_i^{(k)} \leq p_i$.

綜上, 得對所有 k , 皆有 $a_i^{(k)} \leq p_i \leq b_i^{(k)}$, 這代表若令 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, 則 $p \in I_k$ 對所有 k 皆成立.

最後證明唯一性. 依據假設, 當 $k \rightarrow \infty$ 時, $b_i^{(k)} - a_i^{(k)} \rightarrow 0$. 假設存在另一點 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 也落在所有的 n 維閉區間中, 則對所有的 k , 均有 $a_i^{(k)} \leq q_i \leq b_i^{(k)}$. 由此可得 $|p_i - q_i| \leq b_i^{(k)} - a_i^{(k)}$. 由於右側極限可任意小, 必定有, $|p_i - q_i| = 0$, 即 $p_i = q_i$. 因此, 點 $\mathbf{p}$ 是唯一存在的. $\square$

引理 6.5.11 若實函數 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界閉集 D 上連續, 則 f 在 D 上有界.

證明 因集合 D 為有界集, 故可將其完全包含於一個足夠大的 n 維閉區間中, 令其為 I_0 .

假設 f 在 D 上無界. 將 I_0 的每個維度皆從中平分, 將其均等切割成 2^n 個 n 維閉子區間. 由於 f 在 D 上無界, 這 2^n 個閉子區間中, 至少存在一個子區間與 D 的交集非空, 且 f 在該交集上無界. 選取該閉區間並令其為 I_1 .

對 I_1 重複上述平分過程, 如此無限反覆, 可得一系列的 n 維閉區間:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k \supseteq \dots,$$

且對於所有的 $k \geq 0$, f 在 $I_k \cap D$ 上皆無界. 由於每次切割皆將邊長減半, 當 $k \rightarrow \infty$ 時, 盒子的各邊長皆趨近於 0. 依閉區間套定理 (引理 6.5.10), 存在點 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k = \{\mathbf{p}\}.$$

斷言: $p \in D$. 假設 $p \notin D$, 即 p 屬於 D 的補集 $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$. 由於 D 為閉集, 其補集 D^c 必為開集, 故有 $\mathbf{p}$ 的鄰域 U 使得 $U \subseteq D^c$, 即 $U \cap D = \emptyset$. 然而, 因盒子 I_k 的邊長不斷向 p 收縮, 當 k 充分大時, 必有 $I_k \subseteq U$, 這意味著 $I_k \cap D = \emptyset$, 與 I_k 構造時「 $I_k \cap D$ 非空」之事實矛盾, 因此 $\mathbf{p} \in D$.

依 f 在 D 上的連續性, 既然 $\mathbf{p} \in D$, f 在點 $\mathbf{p}$ 必連續. 存在 $\varepsilon = 1 > 0$ 及以 $\mathbf{p}$ 的鄰域 V , 使得對所有 $\mathbf{x} \in D \cap V$, 皆有 $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < 1$, 據此可得 $|f(\mathbf{x})| < |f(\mathbf{p})| + 1$, 即 f 在 $D \cap V$ 上有界. 又因閉區間 I_k 逐步向 $\mathbf{p}$ 收縮, 故當 k 充分大時, 區間 I_k 將完全落在鄰域 V 內, 這使得 $I_k \cap D \subseteq V \cap D$. 根據先前的論證, 可知 f 在 $I_k \cap D$ 上亦有界.

綜上, 可得 f 在 $I_k \cap D$ 上有界, 這與先前 I_k 集列的構造條件 (f 在 $I_k \cap D$ 上無界) 產生矛盾, 因此假設錯誤, 即 f 在 D 上必有界. $\square$

系理 6.5.12 若 m 維向量函數 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界閉集 D 上連續, 則 $\mathbf{f}$ 在 D 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得對所有 $\mathbf{x} \in D$, 均有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M$.

證明 注意到函數

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$$

是連續函數, 則函數

$$g \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$$

也是連續函數. 依引理 6.5.11, 可知 $g \circ \mathbf{f}$ 是有界函數, 即 $\mathbf{f}$ 是有界函數. $\square$

定理 6.5.13 (最值定理) 若實函數 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界閉集 D 上連續, 則該函數在 D 上必有最大值與最小值.

證明 依引理 6.5.11, f 在 D 上有界, 令

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}),$$

希望證明: 存在 $\mathbf{c} \in D$, 使得 $f(\mathbf{c}) = M$. 令

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

若 f 取不到 M , 則 g 在 D 上連續, 依引理 6.5.11, g 在 D 上有界. 但當 $f(x) \rightarrow M^-$ 時, $g(x) \rightarrow +\infty$, 即 g 在 D 是無界函數, 矛盾. 因此, f 在 D 上取得最大值. 最小值之情形的證明雷同. $\square$

系理 6.5.14 (最值定理) 若 m 維向量函數 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界閉集 D 上連續, 則存在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, 使得對所有 $\mathbf{x} \in D$, 均有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|.$$

證明 注意到函數

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$$

是連續函數, 則函數

$$g \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$$

也是連續函數. 依定理 6.5.13, 存在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, 使得對所有 $\mathbf{x} \in D$, 均有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\|.$$

□

集合的連通性

定義 6.5.15 設 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, 通常稱 $[\alpha, \beta]$ 上的 n 維連續函數

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

為 $\mathbb{R}^n$ 中的一條連續曲線或道路.

定義 6.5.16 設 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空. 若對所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, 都存在一條道路 $\mathbf{h}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 使得 $\mathbf{h}(\alpha) = \mathbf{x}$, $\mathbf{h}(\beta) = \mathbf{y}$, 且對所有 $t \in [\alpha, \beta]$, 均有 $\mathbf{h}(t) \in C$, 則稱 C 是道路連通的.

注意 6.5.17 對於一般集合的連通性在後續課程中有更廣泛的定義與討論, 但本講義提到的「連通性」則是指上述定義中的「道路連通性」, 即我們將省略「道路」二字, 稱定義 6.5.16 中的集合 C 是連通集.

註記 6.5.18 $\mathbb{R}$ 的子集 I 為連通集的充要條件為 I 是一個區間.

定義 6.5.19 若 D 是連通的開集, 則稱 D 是一個區域或開域, 且稱 $D \cup \partial D$ 為閉域.

定義 6.5.20 設 A 是一個集合. 若對所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ 及所有 $t \in [0, 1]$, 均有 $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in A$ (即連接 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的線段完全落在 A 中), 則稱 A 為凸集. 若凸集 A 是一個區域, 則稱 A 為凸域.

定理 6.5.21 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為連通集, m 維向量函數 $\mathbf{f}$ 在 D 上連續, 則 $\mathbf{f}(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的連通集.

證明 設 $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in \mathbf{f}(D) \subseteq \mathbb{R}^m$, 則存在 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$, 使得 $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ ($i = 0, 1$). 因為 D 連通, 所以存在道路 $\mathbf{h}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), 使得 $\mathbf{h}([0, 1]) \subseteq D$ 且 $\mathbf{h}(i) = \mathbf{x}_i$ ($i = 0, 1$). 於是, $(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})(t)$ 是 $\mathbf{f}(D)$ 中連接 $\mathbf{y}_0$ 與 $\mathbf{y}_1$ 的一條道路. 這意味著 $\mathbf{f}(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的連通集. □

系理 6.5.22 (介值定理) 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是連通集, 實函數 f 在 D 上連續, $y_0, y_1 \in f(D)$ 且 $y_0 < y_1$, 則對一切 $c \in (y_0, y_1)$, 存在 $\boldsymbol{\xi} \in D$ 使得 $f(\boldsymbol{\xi}) = c$.

證明 取 $\mathbf{x}_i \in D$ 使得 $y_i = f(\mathbf{x}_i)$ ($i = 0, 1$), 並任取 D 中的道路 $\mathbf{h}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 連接 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$, 則 $f \circ \mathbf{h}$ 是 $[0, 1]$ 上的連續函數. 依單變數函數的介值定理, 可知存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $(f \circ \mathbf{h})(\eta) = c$. 記 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{h}(\eta) \in D$, 即得 $f(\boldsymbol{\xi}) = c$. □

註記 6.5.23 對於一個區間上的單變數連續函數, 若它有反函數, 則其反函數必連續, 但對於多變數來說, 此結論未必為真.

例 6.5.24 考慮 $D = \{(r, \theta) : 0 < r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $\mathbf{f}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($(r, \theta) \in D$). 不難看出 $\mathbf{f}$ 為 D 映至 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 的連續雙射, 故其反函數 $\mathbf{f}^{-1}$ 存在, 並且

$$\mathbf{f}^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}(y/x) \right), & x > 0, y \geq 0, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \pi/2 \right), & x = 0, y > 0, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \tan^{-1}(y/x) \right), & x < 0, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 3\pi/2 \right), & x = 0, y < 0, \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\pi + \tan^{-1}(y/x) \right), & x > 0, y \leq 0. \end{cases}$$

觀察: 若 $r_0 > 0$, 則

$$\lim_{(r, \theta) \rightarrow (r_0, 0)} \mathbf{f}(r, \theta) = (r_0, 0), \quad \lim_{(r, \theta) \rightarrow (r_0, 2\pi)} \mathbf{f}(r, \theta) = (r_0, 0).$$

從幾何上來看, 對於 $\mathbf{f}$ 來說, 當 $(r, \theta) \rightarrow (r_0, 0)$ 時, 相應的 (x, y) 從第一象限趨於 $(r_0, 0)$; 而當 $(r, \theta) \rightarrow (r_0, 2\pi)$ 時, 相應的 (x, y) 從第四象限趨於 $(r_0, 0)$. 因此, 當 $(x, y) \rightarrow (r_0, 0)$ 時, $\mathbf{f}^{-1}(x, y)$ 不存在極限, 即 $\mathbf{f}^{-1}$ 在正 x 軸上處處不連續.

* 一致連續性

定義 6.5.25 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, 其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$. 若對於任意給定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得對於任意的 $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in D$, 只要 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta$, 就有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| < \varepsilon,$$

則稱函數 $\mathbf{f}$ 在區域 D 上是一致連續的.

定理 6.5.26 若 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為有界閉集, 且 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 在 D 上連續, 則 $\mathbf{f}$ 在 D 上必一致連續.

證明 採用反證法. 假設 $\mathbf{f}$ 在 D 上連續, 但在 D 上不一致連續. 這意味著存在某個 $\varepsilon_0 > 0$, 使得對於任意的正整數 $k \in \mathbb{N}$, 都存在 $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in D$, 滿足 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < 1/k$, 但卻有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| \geq \varepsilon_0.$$

由於 D 是有界集, 必定存在一個夠大的 n 維閉區間 I_0 使得 $D \subseteq I_0$. 因此, 點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 完全包含在 I_0 中.

現在將 I_0 的各個邊平分, 從而將 I_0 分割成 2^n 個全等的 n 維小閉區間. 由於 $\{\mathbf{x}_k\}$ 有無限多個點, 根據鴿籠原理, 這 2^n 個小閉區間中至少有一個包含了 $\{\mathbf{x}_k\}$ 中的無限多個點. 將這個小閉區間記為 I_1 . 接著, 再將 I_1 的各邊平分, 分割成 2^n 個更小的閉區間. 同樣地, 其中至少有一個閉區間包含了 $\{\mathbf{x}_k\}$ 中的無限多個點, 記為 I_2 .

將此過程無限進行下去, 得到一個 n 維閉區間列:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m \supseteq \cdots$$

若設 I_0 的最大邊長為 L , 則 I_m 的最大邊長為 $L/2^m$. 當 $m \rightarrow \infty$ 時, I_m 的各邊長皆趨近於 0. 根據 n 維閉區間套定理 (引理 6.5.10), 存在唯一的點 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\mathbf{p} \in \bigcap_{m=1}^{+\infty} I_m.$$

接下來證明 $\mathbf{p} \in D$. 因每個 I_m 中都包含 $\{\mathbf{x}_k\}$ 中的無限多個點, 故可從中選取一項 $\mathbf{x}_{k_m} \in I_m$, 且為了確保點列是往後推進的, 要求下標遞增 $k_1 < k_2 < \cdots < k_m < \cdots$. 因為 $\mathbf{p} \in I_m$ 且 $\mathbf{x}_{k_m} \in I_m$, 兩點的距離必然不大於區間 I_m 的對角線長度, 即

$$\|\mathbf{x}_{k_m} - \mathbf{p}\| \leq \frac{\sqrt{n}L}{2^m}.$$

當 $m \rightarrow \infty$ 時, $\|\mathbf{x}_{k_m} - \mathbf{p}\| \rightarrow 0$, 即 $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_m} = \mathbf{p}$. 因為 D 是閉集, 且點列 $\{\mathbf{x}_{k_m}\} \subseteq D$, 由閉集包含其聚點的性質 ($D = \overline{D} = D' \cup \partial D \supseteq D'$) 可知, 聚點 $\mathbf{p}$ 亦屬於 D .

同時, 考慮對應的另一個點列 $\{\mathbf{y}_{k_m}\}$. 因為 $\|\mathbf{x}_{k_m} - \mathbf{y}_{k_m}\| < 1/k_m$, 且 $k_m \geq m \rightarrow \infty$, 所以 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{k_m} - \mathbf{y}_{k_m}\| = 0$. 這推導出:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{k_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{y}_{k_m} - \mathbf{x}_{k_m} + \mathbf{x}_{k_m}) = \mathbf{0} + \mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

已知 $\mathbf{f}$ 在 D 上連續, 特別是在點 $\mathbf{p} \in D$ 處連續. 根據連續函數的點列極限等價性質, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_m}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}_{k_m}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}).$$

從而得到

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_m}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_{k_m})\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})\| = 0.$$

這與最初的構造條件 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k_m}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_{k_m})\| \geq \varepsilon_0 > 0$ 產生了明顯的矛盾. 因此, 原假設不成立, $\mathbf{f}$ 在 D 上必為一致連續. $\square$

定理 6.5.27 設 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$), 則 $\mathbf{f}$ 在 D 上一致連續的充分必要條件是: 對於 D 中的任意兩個點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 與 $\{\mathbf{y}_k\}$, 只要它們滿足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = 0,$$

便有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| = 0.$$

證明 必要性: 假設 $\mathbf{f}$ 在 D 上一致連續. 對於任意給定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對於任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, 當 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ 時, 恆有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon$. 對於滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = 0$ 的任意兩點列, 針對上述的 $\delta > 0$, 存在正整數 K , 使得當 $k > K$ 時, 恆有 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < \delta$. 因此, 當 $k > K$ 時, 根據一致連續性定義, 必有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| < \varepsilon$. 故得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| = 0$.

充分性: 採用反證法. 假設對滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = 0$ 的任意兩點列皆有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| = 0$, 但 $\mathbf{f}$ 在 D 上不一致連續. 不一致連續意味著: 存在某個 $\varepsilon_0 > 0$, 使得對任意的 $k \in \mathbb{N}$, 都存在 $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in D$, 雖然滿足 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < 1/k$, 卻有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| \geq \varepsilon_0$. 這構造出了兩個點列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 與 $\{\mathbf{y}_k\}$, 其滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| = 0$, 但是 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| \neq 0$. 這與充分性前提矛盾. 因此, $\mathbf{f}$ 在 D 上必一致連續. $\square$

例 6.5.28 證明向量函數 $\mathbf{f}(x, y) = (\sin x, \cos x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致連續.

解 對於 $\mathbb{R}^2$ 中的任意兩點 $\mathbf{x}' = (x_1, y_1)$ 與 $\mathbf{x}'' = (x_2, y_2)$, 計算其函數值的距離:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| = \sqrt{(\sin x_1 - \sin x_2)^2 + (\cos y_1 - \cos y_2)^2}.$$

利用三角函數的和差化積公式, 有

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2|,$$

同理

$$|\cos y_1 - \cos y_2| = 2 \left| \sin \frac{y_1 + y_2}{2} \right| \left| \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \right| \leq |y_1 - y_2|.$$

因此

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|.$$

所以對一切 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 當 $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^2$ 且 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta$ 時, 恆有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta = \epsilon.$$

這就證明了 $\mathbf{f}(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致連續.

例 6.5.29 設向量函數 $\mathbf{f}(x, y) = (\cos xy, \sin xy)$, 證明 $\mathbf{f}(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的任何有界閉集上是一致連續的, 但它在 $\mathbb{R}^2$ 中不是一致連續的.

解 顯然 $\mathbf{f}(x, y)$ 的各個分量函數在 $\mathbb{R}^2$ 內處處連續, 故 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上連續. 由定理 6.5.26 可知, $\mathbf{f}(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的任何有界閉集上是一致連續的.

下證 $\mathbf{f}(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中不一致連續. 事實上, 對一切 $k \in \mathbb{N}$, 構造兩個點列 $\mathbf{x}'_k = (k, 0)$ 和 $\mathbf{x}''_k = (k, \frac{\pi}{k})$, 則

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(k - k)^2 + \left(0 - \frac{\pi}{k}\right)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{k} = 0.$$

但對於該函數值列的距離, 有

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}''_k) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0).$$

對一切 $k \in \mathbb{N}$, 恆有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}''_k)\| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - 0)^2} = 2 \neq 0.$$

這就證明了 $\mathbf{f}(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中不一致連續.

定理 6.5.30 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為有界開集, 函數 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 在 D 上連續. 證明: $\mathbf{f}$ 在 D 上一致連續的充要條件是: 對於其邊界 ∂D 上的任意一點 $\mathbf{x}_0$, 極限 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 皆存在.

證明 必要性: 若 $\mathbf{f}$ 在 D 上一致連續, 由一致連續的定義及函數極限的柯西收斂準則知, 給定 ∂D 上任意一點 $\mathbf{x}_0$, 任取一點列 $\{\mathbf{x}_k\} \subseteq D$ 滿足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$. 因 $\{\mathbf{x}_k\}$ 為柯西點列, 故對應的函數值列 $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\}$ 亦為柯西點列, 極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ 必然存在. 從而極限 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 存在.

充分性: 令 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 為 D 的閉包 (由於 D 有界, $\bar{D}$ 為有界閉集), 並且定義

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D} \mathbf{f}(\mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \partial D, \end{cases}$$

則 $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$. 由極限的性質可知它在 $\bar{D}$ 上連續. 於是根據定理 6.5.26 知, 它在 $\bar{D}$ 上一致連續, 從而其限制在 D 上的原函數 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上一致連續. $\square$

例 6.5.31 證明向量函數 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{v}_0$ (其中 $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^m$ 為單位常向量) 在 $D = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上不一致連續, 但對任意的 $r > 0$, 它在 $D_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq r\}$ 上一致連續.

解 由定理 6.5.27 注意到, 「 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上不一致連續」與以下斷言等價: 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及點列 $\{\mathbf{x}'_k\}, \{\mathbf{x}''_k\} \subseteq D$ 滿足 $\|\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) 且 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}''_k)\| \geq \varepsilon_0$.

對 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{v}_0$ 而言, 取 $\varepsilon_0 = 1$, $\mathbf{x}'_k = \frac{1}{k} \mathbf{e}_1$, $\mathbf{x}''_k = \frac{1}{k+1} \mathbf{e}_1$ ($k = 1, 2, \dots$), 則有

$$\|\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k\| = \frac{1}{k(k+1)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

且

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}'_k\|} \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\|\mathbf{x}''_k\|} \mathbf{v}_0 \right\| = \|k\mathbf{v}_0 - (k+1)\mathbf{v}_0\| = \|-\mathbf{v}_0\| = 1.$$

此即證明了 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上不一致連續.

對任意給定的 $r > 0$, 由於對 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_r$, 有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|} \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\|\mathbf{x}_2\|} \mathbf{v}_0 \right\| = \frac{|\|\mathbf{x}_2\| - \|\mathbf{x}_1\||}{\|\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{x}_2\|} \leq \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{r^2},$$

所以對一切 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = r^2\varepsilon > 0$, 則當 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_r$ 且 $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \delta$ 時, 就有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| < \varepsilon.$$

此時的 δ 只依賴於 ε , 所以 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D_r 上一致連續.

例 6.5.32 證明向量函數 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{v}_0$ (其中 $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^m$ 為常數單位向量) 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致連續.

解 顯然 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 連續. 下面我們證明 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 一致連續.

事實上, 任取 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_1 = \varepsilon$, 則當 $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$ 且 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta_1$ 時, 有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| = |\sqrt{\|\mathbf{x}'\|} - \sqrt{\|\mathbf{x}''\|}| = \frac{|\|\mathbf{x}'\| - \|\mathbf{x}''\||}{\sqrt{\|\mathbf{x}'\|} + \sqrt{\|\mathbf{x}''\|}} \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \varepsilon.$$

其次, 由定理 6.5.26, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在有界閉集 $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ 上連續, 從而一致連續. 因此對上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得當 $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in K$ 且 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta_2$ 時, 有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| < \varepsilon.$$

因此取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$, 對任意的 $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^n$, 當 $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta$ 時, 必有 $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ 同時落在 K 或 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq 1\}$ 上. (若有一點如 $\|\mathbf{x}'\| \leq 1$, 則 $\|\mathbf{x}''\| \leq \|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < 1 + \delta \leq 2$, 兩者皆落於 K 內). 因此, 由上所證, 有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| < \varepsilon.$$

這就證明了 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{v}_0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致連續.

單元 7

多變數函數的微分學

7.1 偏導數

定義 7.1.1 設實函數 f 在點 $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 附近有定義. 對於 $i \in \{1, \dots, n\}$, 若單變數函數

$$g(x_i) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

在 $x_i^{(0)}$ 處的導數

$$\lim_{x_i \rightarrow x_i^{(0)}} \frac{g(x_i) - g(x_i^{(0)})}{x_i - x_i^{(0)}} = \lim_{x_i \rightarrow x_i^{(0)}} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(\mathbf{x}_0)}{x_i - x_i^{(0)}}$$

存在, 則稱 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於 x_i 可偏導, 並稱上述極限為 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於 x_i 的偏導數, 常記作

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}(\mathbf{x}_0), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

等.

若函數 f 在區域 $D \subseteq \text{dom}(f)$ 內每一點 $\mathbf{x}$ 處對 x_i 的偏導數都存在, 則該偏導數即為 $\mathbf{x}$ 的函數, 就稱其為函數 f 對變數 x_i 的偏導函數 (簡稱偏導數), 記作

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{或} \quad f'_{x_i}.$$

註記 7.1.2 從偏導數的定義中不難注意到, 欲求 f 關於 x_i 的偏導數, 只需將其他變數全看作常數, 將 f 視為 x_i 的單變數函數來求其關於 x_i 的導數即可. 既然偏導數可以看作單變數函數的導數, 那麼當 $n = 3$ 時 (即在三維空間中), 若記 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, 則 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示在平面 $y = y_0$ 內曲面 $z = f(x, y)$ 與平面 $y = y_0$ 的交線在點 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 處的切線斜率. 同理, $f'_y(x_0, y_0)$ 也具有類似的幾何意義.

定義 7.1.3 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一區域, $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in D$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$. 固定 $j \in \{1, \dots, n\}$, 若對每個 $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i 在 $\mathbf{x}_0$ 處對 x_j 可偏導, 則稱向量

$$\left(\frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \right)$$

為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於 x_j 的偏導數, 記作

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \mathbf{f}'_{x_i}(\mathbf{x}_0) \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}_0}.$$

若 $\mathbf{f}$ 在 D 內每一點 $\mathbf{x}$ 處均對 x_i 可偏導, 則該偏導數即為 $\mathbf{x}$ 的函數, 稱其為 $\mathbf{f}$ 對 x_i 的**偏導函數**, 記作

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \quad \text{或} \quad \mathbf{f}'_{x_i}.$$

注意 7.1.4 函數在某點處的偏導數存在與否與該函數在該點處的連續性無關. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0, \end{cases}$$

顯然 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 但 f 在點 $(0, 0)$ 處不連續.

例 7.1.5 設 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$, 求 $f'_x(1, 0)$ 及 $f'_y(1, 0)$.

解 把 y 視為常數, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y;$$

把 x 視為常數, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y.$$

把 $(1, 0)$ 代入上述結果, 得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 2, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 4.$$

例 7.1.6 求函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

關於各變數的偏導數.

解 對於 $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{3x^2y^2 + 2x^3y + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在點 $(0, 0)$ 處,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

定義 7.1.7 設 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內具有關於各變數的偏導數, 則它的每個偏導數 $\partial f / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$) 是 D 上的一個 n 變數函數. 若它們仍具有各個偏導數, 則稱它們的偏導數為 f 的**二階偏導數**. 類似地可定義三階以上的偏導數. 二階以上的偏導數統稱為**高階偏導數**.

若 f 關於 x_i 的偏導數具有關於 x_j 的偏導數 ($i, j \in \{1, \dots, n\}$), 則記作

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{或} \quad (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

例 7.1.8 設函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

求 $f''_{xy}(0, 0)$ 及 $f''_{yx}(0, 0)$.

解 不難計算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \begin{cases} y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \begin{cases} x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

特別地, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x.$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

定理 7.1.9 (克萊羅定理) 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一區域, f 在 D 上具有二階偏導數. 若 f 的二階混合偏導數

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

在區域 D 內的點 $\mathbf{x}_0$ 處皆連續, 則在該點處兩偏導數相等, 即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

證明 雖然這是一個 n 變數函數, 但在計算 $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ 與 $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$ 時, 除了 x_i 與 x_j 之外, 其餘的 $n - 2$ 個變數皆視為常數. 因此, 不失一般性, 可將這個定理證明簡化為雙變數函數的證明. 為了方便書寫, 設這兩個變數為 x 與 y , 並證明在點 (x_0, y_0) 處, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

在點 (x_0, y_0) 的一鄰域內, 取非零實數 h 與 k , 構造函數 $\Delta(h, k)$ 如下:

$$\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0). \quad (7.1)$$

定義一輔助函數 φ :

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad (7.2)$$

如此一來, (7.1) 式可表示為 $\Delta(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$. 因 f 存在一階偏導數, 故 φ 在閉區間 $[x_0, x_0 + h]$ 上連續, 在開區間 $(x_0, x_0 + h)$ 內可導. 根據拉格朗日均值定理, 存在 $\theta_1 \in (0, 1)$, 使得

$$\Delta(h, k) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) = h[f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)]. \quad (7.3)$$

同理, 由於 f'_x 存在且關於 y 可導, 對上式中括號內的函數再次使用均值定理, 可知存在 $\theta_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\Delta(h, k) = hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k). \quad (7.4)$$

另一方面, 亦可定義另一輔助函數 ψ :

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y). \quad (7.5)$$

此時, (7.1) 式可改寫為 $\Delta(h, k) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0)$. 藉由對稱的推導過程, 連續使用兩次均值定理, 可知存在 $\theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$, 使得

$$\Delta(h, k) = hk f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k). \quad (7.6)$$

比較 (7.4) 式與 (7.6) 式, 由於 $h, k \neq 0$, 因此可將兩式同除以 hk , 得

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k). \quad (7.7)$$

對上式兩端取極限, 令 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. 根據定理之假設, 二階混合偏導數 f''_{xy} 與 f''_{yx} 在點 (x_0, y_0) 處連續. 因此, 當增量趨近於零時, 極限運算可直接代入該點坐標, 即

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) &= f''_{xy}(x_0, y_0), \\ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) &= f''_{yx}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

故有

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (7.8)$$

此結果對於任意兩個變數皆成立. 推廣至 n 變數之情形, 即證得對於任意 i, j , 皆有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

□

例 7.1.10 設 $f(x, y) = x^2 y^3 + 2x^3 y - 3xy + 4$, 求 $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}, f'''_{xxx}$.

解

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2xy^3 + 6x^2 y - 3y, & f'_y(x, y) &= 3x^2 y^2 + 2x^3 - 3x, \\ f''_{xx}(x, y) &= 2y^3 + 12xy, & f''_{xy}(x, y) &= 6xy^2 + 6x^2 - 3, \\ f''_{yx}(x, y) &= 6xy^2 + 6x^2 - 3, & f''_{yy}(x, y) &= 6x^2 y, \\ f'''_{xxx}(x, y) &= 6y^2 + 12x. \end{aligned}$$

7.2 * 雅可比矩陣與微分量

定義 7.2.1 設函數 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^\top$. 若存在僅依賴於 $\mathbf{x}$ 而與 $\mathbf{h}$ 無關的 $m \times n$ 矩陣 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_{ij}(\mathbf{x}))$, 使得當 $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ 時, 下式成立:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h} + \alpha(\|\mathbf{h}\|),$$

其中 $\alpha(\|\mathbf{h}\|) = (\alpha_1(\|\mathbf{h}\|), \dots, \alpha_m(\|\mathbf{h}\|))$ 僅依賴於 $\|\mathbf{h}\|$, 並且滿足 $\alpha_j(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ ($\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$), $j = 1, \dots, m$, 則稱 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}$ 處可導或可微, 映射 $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h}$ 稱為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處的全微分, 記作 $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 即

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

註記 7.2.2 考慮線性映射

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$

記 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. 顯然, 有

$$\Delta\pi_i(\mathbf{x}; \mathbf{h}) := \pi_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \pi_i(\mathbf{x}) = (x_i + h_i) - x_i = h_i = \pi_i(\mathbf{h}) + 0.$$

由於 π_i 是線性映射, 且 $0 = o(\mathbf{h})$ ($\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$), 因此 π_i 在點 $\mathbf{x}$ 可微, 且 $\Delta\pi_i(\mathbf{x}; \mathbf{h}) = d\pi_i(\mathbf{x})\mathbf{h}$. 另外, 因為在任何點 $\mathbf{x}$, 總有 $d\pi_i(\mathbf{x}) = \pi'_i(\mathbf{x})\mathbf{h} = \pi_i(\mathbf{h}) = h_i$, 所以映射 $d\pi_i(\mathbf{x}) = d\pi_i$ 與 $\mathbf{x}$ 無關. 如果把 $\pi_i(\mathbf{x})$ 寫成 $x_i(\mathbf{x})$, 那麼有 $d\pi_i(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = dx_i(\mathbf{h}) = h_i$.

對於在點 $\mathbf{x} \in D$ 可微的函數 $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, 存在從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的線性映射 $A(\mathbf{x})$ 及當 $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ 時比 $\|\mathbf{h}\|$ 更高階的無窮小量 $\alpha(\mathbf{x}; \mathbf{h})$, 使得

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}; \mathbf{h}).$$

因為 $A(\mathbf{x})$ 是線性函數, 所以必可用坐標形式表示線性函數 $A(\mathbf{x})\mathbf{h} = a_1(\mathbf{x})h_1 + \cdots + a_n(\mathbf{x})h_n$, 其中 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, 於是根據上面的約定, $h_i = dx_i(\mathbf{h})$, 故

$$df(\mathbf{x})\mathbf{h} = a_1(\mathbf{x})dx_1(\mathbf{h}) + \cdots + a_n(\mathbf{x})dx_n(\mathbf{h}).$$

因此, 今後可將 f 全微分記作

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})dx_i,$$

或

$$df = \sum_{i=1}^n a_i dx_i.$$

對於向量函數 $\mathbf{f}$, 記其全微分作

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

命題 7.2.3 設實函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處可微, 其全微分爲 $df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}_0)dx_i$, 則

- (1) f 在 $\mathbf{x}_0$ 處連續;
- (2) 對於 $i \in \{1, \dots, n\}$, f 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於 x_i 可偏導, 並且有

$$a_i(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}.$$

證明 (1) 記 $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (h_1, \dots, h_n)$, 則 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ 等價於 $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, 又等價於 $h_i \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, n$). 於是,

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left(\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}_0)h_i + o(\|\mathbf{h}\|) \right) = 0,$$

即 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處連續.

- (2) 固定 $i \in \{1, \dots, n\}$, 對於 $j \neq i$, 令 $h_j = 0$. 此時, $\mathbf{h} = (0, \dots, h_i, \dots, 0) = h_i \mathbf{e}_i$ 和 $\|\mathbf{h}\| = |h_i|$, 故

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \left(a_i(\mathbf{x}_0) + \frac{o(|h_i|)}{h_i} \right) = a_i(\mathbf{x}_0).$$

因此,

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} dx_i.$$

□

定理 7.2.4 設實函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, 且 f 在 $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 的鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內存在各個偏導數. 若這些偏導數在 $\mathbf{x}_0$ 處連續, 則 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微.

證明 對 n 作歸納法.

當 $n = 1$ 時, 結論顯然成立.

假設當 $n = k$ 時, 結論成立, 即

$$\begin{aligned} f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}) \\ = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)})}{\partial x_i} h_i + o(1) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^k h_i^2} \right) \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^k h_i^2} \rightarrow 0 \right). \end{aligned}$$

當 $n = k + 1$ 時,

$$\begin{aligned} f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + h_{k+1}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) \\ = \left(f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + h_{k+1}) - f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)}) \right) \\ + \left(f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) \right). \end{aligned}$$

依單變數函數的拉格朗日均值定理及 $\partial f / \partial x_{k+1}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處的連續性, 可知存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + h_{k+1}) - f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)}) \\ = f'_{x_{k+1}}(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + \theta h_{k+1}) h_{k+1} \\ = f'_{x_{k+1}}(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) h_{k+1} \\ + \left(f'_{x_{k+1}}(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + \theta h_{k+1}) - f'_{x_{k+1}}(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) \right) h_{k+1} \\ = f'_{x_{k+1}}(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) h_{k+1} + o(1)(|h_{k+1}|) \quad (|h_{k+1}| \rightarrow 0). \end{aligned}$$

根據歸納假設, 有

$$\begin{aligned} f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}) \\ = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)})}{\partial x_i} h_i + o(1) \left(\sum_{i=1}^k h_i^2 \right) \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^k h_i^2} \rightarrow 0 \right). \end{aligned}$$

不難看出, 當 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} h_i^2} \rightarrow 0$ 時, 有

$$\frac{o(1)(|h_{k+1}|) + o(1) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^k h_i^2} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} h_i^2}} \rightarrow 0,$$

因此,

$$\begin{aligned} f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)} + h_{k+1}) - f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_k^{(0)} + h_k, x_{k+1}^{(0)}) \\ = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)})}{\partial x_i} h_i + o(1) \left(\sum_{i=1}^{k+1} h_i^2 \right) \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} h_i^2} \rightarrow 0 \right), \end{aligned}$$

即 $f(x_1, \dots, x_{k+1})$ 在 $(x_1^{(0)}, \dots, x_{k+1}^{(0)})$ 處可微, 且

$$df(x_1^{(0)}, \dots, x_{k+1}^{(0)}) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k+1}^{(0)})}{\partial x_i} dx_i.$$

□

註記 7.2.5 若函數 f 在區域 D 上關於自變數的各個分量都具有連續偏導數, 則稱 f 在 D 內是 C^1 的, 記作 $f \in \mathcal{C}^1(D)$, 此時亦稱 f 在 D 內**連續可微**.

例 7.2.6 讀者可自行驗證, 函數

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 處可微, 但 f'_x, f'_y 在 $(0, 0)$ 處不連續.

定義 7.2.7 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一區域, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x} \in D$. 若對每個 $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i 在 $\mathbf{x}$ 處對各個變數均可偏導, 則稱矩陣

$$\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{m \times n}$$

為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處的**導數**或**雅可比矩陣**, 記作 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, 即

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

特別地, 當 $m = n$ 時, 行列式 $\det(\mathbf{f}'(\mathbf{x}))$ 稱為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處的**雅可比行列式**. 記作

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad \text{或} \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{\mathbf{x}}.$$

又當 $m = 1$ 時, 記 $\mathbf{f} = f$, 則稱向量

$$f'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^\top$$

為 f 在 $\mathbf{x}$ 的**梯度**, 記作 ∇f 或 $\mathbf{grad} f$, 故 n 變數 m 維向量函數 $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$ 的雅可比矩陣也可寫成

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)^\top \\ \vdots \\ (\nabla f_m)^\top \end{pmatrix}.$$

命題 7.2.8 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一區域, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x} \in D$, 則 f 在點 $\mathbf{x}$ 可微的充要條件為: 對每個 $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ 在點 $\mathbf{x}$ 可微. 更進一步, 當 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處可微時, $d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

證明 必要性: 設 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 可微, 則存在矩陣 $\mathbf{A} = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 使得當 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^\top \rightarrow \mathbf{0}$ 時, 有

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j}h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj}h_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(\|\mathbf{h}\|) \\ \vdots \\ \alpha_m(\|\mathbf{h}\|) \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_i(\|\mathbf{h}\|)$ 依賴於 $\mathbf{h}$, 且 $\alpha_i(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ ($\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$), $i = 1, \dots, m$. 比較上式兩邊向量的分量, 對於 $i = 1, \dots, m$, 當 $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ 時, 有

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n A_{ij}h_j + \alpha_i(\|\mathbf{h}\|).$$

由多變數函數可微的定義知, f_i 在 $\mathbf{x}$ 處可微, 並且

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

充分性: 設對所有 $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i 在 $\mathbf{x}$ 處可微, 則有

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} h_j + \alpha_i(\|\mathbf{h}\|),$$

其中 $\alpha_i(\|\mathbf{h}\|)$ 依賴於 $\mathbf{h}$, 且 $\alpha_i(\|\mathbf{h}\|)/\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ ($\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$). 因此,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(\|\mathbf{h}\|) \\ \vdots \\ \alpha_m(\|\mathbf{h}\|) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h} + \boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|), \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)$ 滿足

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

由定義可知, $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處可微, 且 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})$. □

註記 7.2.9 若對每個 $j \in \{1, \dots, m\}$, f_j 的各個偏導數在區域 D 上連續, 則稱 $\mathbf{f}$ 在 D 上是 C^1 的, 記作 $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, 此時亦稱 $\mathbf{f}$ 在 D 內連續可微.

系理 7.2.10 多變數向量函數亦滿足如下蘊含關係:

$$\text{連續可微} \implies \text{可微} \implies \text{連續}.$$

例 7.2.11 設 $\mathbf{w} = (r, \varphi, \theta)$, 向量函數

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = (x(\mathbf{w}), y(\mathbf{w}), z(\mathbf{w}))^\top = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)^\top$$

的定義域為 $D = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < r < +\infty, 0 < \varphi, \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$, 求 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{w}$ 處的雅可比行列式.

解 因函數 x, y, z 均在 D 上具有連續偏導數, 故 $\mathbf{f}'(\mathbf{w})$ 存在. 不難算出

$$\mathbf{f}'(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

取行列式, 即得

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \varphi.$$

命題 7.2.12 設函數 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 及 $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內可導, 則對所有 $\mathbf{x} \in D$, 有

- (1) $(\mathbf{f} + \lambda \mathbf{g})'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{g}'(\mathbf{x})$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);
- (2) $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})^\top \mathbf{g}'(\mathbf{x})$;
- (3) $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(\mathbf{x}) = -[\mathbf{g}(\mathbf{x})]_\times \mathbf{f}'(\mathbf{x}) + [\mathbf{f}(\mathbf{x})]_\times \mathbf{g}'(\mathbf{x})$ ($m = 3$), 其中

$$[\mathbf{v}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

$$(4) \left(\frac{f}{g} \right)'(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})f'(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})}{(g(\mathbf{x}))^2} \quad (m = 1, \mathbf{f} = f, \mathbf{g} = g, g(\mathbf{x}) \neq 0);$$

$$(5) (\varphi \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\mathbf{f}'(\mathbf{x})^1;$$

$$(6) \text{ 若 } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \text{ 爲常向量, 則 } \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \text{ (}\mathbf{O} \text{ 爲 } m \times n \text{ 階零矩陣);}$$

$$(7) \text{ 設 } \text{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ 爲恆等映射 (id} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)), \text{ 則 } \text{id}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_n \text{ (}\mathbf{I}_n \text{ 爲 } n \text{ 階單位矩陣).}$$

證明 證明留給讀者作為練習. □

系理 7.2.13 設 f, g 均爲可微函數, 則

- (1) $\nabla C = \mathbf{0}$ (C 是常數);
- (2) $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$);
- (3) $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$;
- (4) $\nabla \frac{f}{g} = \frac{1}{g^2} (g \nabla f - f \nabla g)$ ($g \neq 0$).

7.3 合成函數的微分

連鎖律

引理 7.3.1 設實函數 g 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 上有定義, 並且在 $\mathbf{y}_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})^\top \in \Omega$ 處可微. 又設向量函數 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, 在 $\mathbf{x}_0 \in (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 處可微, 並且 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 則 $g \circ \mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微, 且

$$d(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}.$$

證明 因 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微之故,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\|\mathbf{h}\|),$$

其中 $\alpha(\|\mathbf{h}\|)$ 依賴於 $\mathbf{h}$, 且滿足 $\alpha(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ ($\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$).

另一方面, 因 g 在 $\mathbf{y}_0$ 處可導, 故

$$g(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - g(\mathbf{y}_0) = g'(\mathbf{y}_0)\mathbf{k} + \beta(\|\mathbf{k}\|),$$

其中 $\beta(\|\mathbf{k}\|)$ 依賴於 $\mathbf{k}$, 且滿足 $\beta(\|\mathbf{k}\|) = o(\|\mathbf{k}\|)$ ($\|\mathbf{k}\| \rightarrow 0$). 不妨設 $\beta(\mathbf{0}) = 0^2$, 如此一來, $\beta(\|\mathbf{k}\|)$ 在 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$

¹ $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 m 維行向量 (column vector), $\varphi'(\mathbf{x})$ 是 n 維列向量 (row vector) (或 $(\mathbf{grad} \varphi)^\top$), $\mathbf{f}(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{x})$ 是矩陣乘法, 不能隨意交換 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 及 $\varphi'(\mathbf{x})$ 的順序. 第二項同理.

²此規定是合理且必要的.

- 合理性: 當 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 時, 函數自然無增量 ($g(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - g(\mathbf{y}) = 0$), 代入微分等式必然得出 $\beta(\mathbf{0}) = 0$. 這同時填補了「可去奇點」, 保證誤差函數在 $\mathbf{0}$ 處的連續性.
- 在證明中, 即使變數 $\mathbf{x}$ 的變化量 $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{f}$ 的變化量 $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 仍有可能恰好爲 $\mathbf{0}$. 若不特別定義 $\beta(\mathbf{0}) = 0$, 接下去在處理 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 這個分段條件時, 算式將失去定義而無法嚴謹收尾.

處連續.

現在有

$$\begin{aligned} g(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) - g(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) &= g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) (\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)) + \beta(\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|) \\ &= g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \gamma(\|\mathbf{h}\|), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma(\|\mathbf{h}\|) &= g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|) + \beta(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|) \\ &= g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|) + \beta(\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|). \end{aligned}$$

斷言: $\gamma(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ ($\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$). 首先, 依柯西-施瓦茲不等式, 有

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\| \|\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (7.9)$$

再來, 注意到當 $\|\mathbf{h}\|$ 充分小時, 有

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &\leq \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{h}\| + \|\boldsymbol{\alpha}(\|\mathbf{h}\|)\|) \\ &\leq \|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\| + 1, \end{aligned}$$

其中 $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\|$ 是矩陣 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ 的範³. 因此, 當 $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ 時, 必有 $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \rightarrow 0$. 於是,

$$\frac{|\beta(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|)|}{\|\mathbf{h}\|} = \begin{cases} \frac{|\beta(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|)|}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|} \cdot \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{h}\|}, & \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \neq 0, \\ 0, & \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| = 0, \end{cases}$$

從而

$$\frac{|\beta(\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|)|}{\|\mathbf{h}\|} \rightarrow 0 \quad (\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0). \quad (7.10)$$

結合 (7.9) 式及 (7.10) 式, 斷言即得證.

最後, 有

$$(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - (g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \gamma(\|\mathbf{h}\|),$$

其中 $\gamma(\|\mathbf{h}\|)$ 依賴於 $\|\mathbf{h}\|$ 且 $\gamma(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|)$ ($\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$). 由微分的定義, 可知 $g \circ \mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微, 且

$$d(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}.$$

□

定理 7.3.2 (合成函數的求導法; 連鎖律) 設向量函數 $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_l)^\top$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 上可微, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微, 且 $\mathbf{f}(D) \subseteq \Omega$, 則 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 在 D 上可微, 且

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

即

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

³ $m \times n$ 階矩陣 $\mathbf{A}$ 的範 (或範數) 定義為

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

證明 不難看出

$$d(g_j \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = g'_j(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (j = 1, \dots, l),$$

於是

$$d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g'_1(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ \vdots \\ g'_l(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

□

系理 7.3.3 設 $D, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 為兩區域, $\mathbf{f}$ 是 D 到 Ω 的 C^1 雙射, 則對所有 $\mathbf{x} \in D$, 有

$$(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))' \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_n;$$

對所有 $\mathbf{y} \in \Omega$, 有

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) (\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{I}_n.$$

特別地, 有

$$(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))^{-1}.$$

證明 依 C^1 變換的定義, 知 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{f}^{-1}$ 皆可微, 故可在 $(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \text{id}_D(\mathbf{x})$ 兩邊對 $\mathbf{x}$ 求導, 或在 $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = \text{id}_\Omega(\mathbf{y})$ 兩邊對 $\mathbf{y}$ 求導, 即得結論. □

系理 7.3.4 在 $(\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{y}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))^{-1}$. 兩邊取行列式, 可得

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = 1.$$

系理 7.3.5 設實函數 g 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 上有定義, 且在 $\mathbf{y}_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})^\top \in \Omega$ 處可微. 又設向量函數 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, 在 $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 處可微, 且 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 則對每個 $i \in \{1, \dots, n\}$, $g \circ \mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於 x_i 可偏導, 並且

$$\frac{\partial(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g(\mathbf{y}_0)}{\partial f_j} \cdot \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right).$$

證明 注意到

$$(g \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \\ &= \left(\frac{\partial(g(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)))}{\partial f_1}, \dots, \frac{\partial(g(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)))}{\partial f_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g(\mathbf{y}_0)}{\partial f_j} \cdot \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \right), \dots, \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g(\mathbf{y}_0)}{\partial f_j} \cdot \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \right). \end{aligned}$$

由 $(g \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}_0) = g'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, 再比較它們的各分量即得結論. □

註記 7.3.6 (1) 「 $\partial g / \partial f_j$ 」表示把「一整個」 f_j 看成一個變數, 求 g 關於 f_j 的偏導數.

(2) 可以證明, 系理 7.3.5 中的條件「 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微」弱化稱「 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處存在各個偏導數」, 系理仍成立. 但條件「 g 在 $\mathbf{y}_0$ 處可微」不能弱化成「 g 在 $\mathbf{y}_0$ 處存在各個偏導數」, 例如

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & y_1 y_2 \neq 0, \\ 0, & y_1 y_2 = 0, \end{cases}$$

考慮路徑 $(y_1, y_2) = (t, t)$ ($t \in (-\infty, +\infty)$), 則

$$\varphi(t) = g(t, t) = \begin{cases} 1, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

在 $t = 0$ 處不連續, 故不可導.

例 7.3.7 設 $z = e^u \cos v$, 而 $u = xy$, $v = x + y$, 求 z'_x 和 z'_y .

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \cos v \cdot y + e^u (-\sin v) \cdot 1 = e^{xy} (y \cos(x+y) - \sin(x+y)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \cos v \cdot x + e^u (-\sin v) \cdot 1 = e^{xy} (x \cos(x+y) - \sin(x+y)).$$

例 7.3.8 設 $z = f(u, v, t) = uv + \cos t$, 而 $u = e^t$, $v = \sin t$, 求全導數 dz/dt .

解

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = ve^t + u \cos t - \sin t \\ &= e^t \sin t + e^t \cos t - \sin t = e^t (\sin t + \cos t) - \sin t. \end{aligned}$$

例 7.3.9 設 $w = f(x + y + z, xyz)$, f 具有二階連續偏導數, 求 $\partial w / \partial y$ 及 $\partial^2 w / \partial z \partial y$.

解 令 $u = x + y + z$, $v = xyz$, 則 $w = f(u, v)$.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f'_u + xz f'_v,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (f'_u + xz f'_v) = \frac{\partial f'_u}{\partial z} + x f'_v + xz \frac{\partial f'_v}{\partial z}.$$

又

$$\frac{\partial f'_u}{\partial z} = \frac{\partial f'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{uu} + xy f''_{uv},$$

$$\frac{\partial f'_v}{\partial z} = \frac{\partial f'_v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f'_v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = f''_{vu} + xy f''_{vv},$$

故

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = f''_{uu} + xy f''_{uv} + xz f''_{vu} + x^2 y f''_{vv} = f''_{uu} + x(y+z) f''_{uv} + x^2 y f''_{vv}.$$

* 一階微分形式的不變性與高階微分

定義 7.3.10 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是區域, 實函數 f 在 $\mathbf{x} \in D$ 處可微, 則

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i.$$

若對所有 $i \in \{1, \dots, n\}$, f'_{x_i} 仍可微, 則稱

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} dx_j \right) dx_i$$

為 $f(\mathbf{x})$ 的**二階微分**, 記作 $d^2 f(\mathbf{x})$, 即

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} dx_j dx_i.$$

對於 $k \geq 2$, 可歸納地給出多變數實函數 f 的 **k 階微分**

$$d^k f(\mathbf{x}) = d((d^{k-1} f(\mathbf{x}))).$$

註記 7.3.11 如果形式地記

$$df(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f(\mathbf{x}),$$

那麼當 f 的每個 k 階偏導數皆連續時, 可將 $d^k f(\mathbf{x})$ 記作

$$d^k f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}).$$

事實上,

$$d^k f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n=k \\ k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x}) dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n}.$$

特別地, 對於雙變數函數 f , 其 k 階微分為

$$d^k f(x, y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x, y) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} dx^{k-i} dy^i.$$

註記 7.3.12 設 $g(\mathbf{u}) = g(u_1, \dots, u_m)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 上可微, 則 $df(\mathbf{u}) = f'(\mathbf{u})d\mathbf{u}$. 又設 $\mathbf{u} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微, 且 $\mathbf{u}(D) \subseteq \Omega$. 於是, 合成函數 $g \circ \mathbf{u}$ 在 D 上可微, 且

$$d(g(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) = g'(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

由於 $d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, 因此若視 $\mathbf{u}$ 為中間變量, 則

$$dg(\mathbf{u}) = g'(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{u}'(\mathbf{x})d\mathbf{x} = g'(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

此性質稱為多變數函數的一階微分的形式**不變性**.

例 7.3.13 設 $z = e^u \sin v$, $u = xy$, $v = x + y$, 求 $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$.

解 不難算出:

$$dz = d(e^u \sin v) = e^u \sin v du + e^u \cos v dv,$$

$$du = d(xy) = ydx + xdy,$$

$$dv = d(x + y) = dx + dy,$$

將以上式子結合在一起並合併含 dx 及 dy 的項, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dz = e^{xy} (y \sin(x + y) + \cos(x + y)) dx + e^{xy} (x \sin(x + y) + \cos(x + y)) dy.$$

比較等式兩邊 dx 及 dy 的係數, 即得偏導數.

均值定理

定理 7.3.14 (多變數實函數的均值定理) 設 n 變數實函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微, 固定 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$, 且設線段 $\overline{\mathbf{pq}} := \{(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} : 0 \leq t \leq 1\}$ 完全落在 D 內, 則存在滿足

$$f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})$$

的 $\mathbf{r} \in \overline{\mathbf{pq}}$.

證明 定義函數

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}),$$

則 g 在 $[0, 1]$ 上連續且在 $(0, 1)$ 內可微. 依單變數實函數的均值定理, 存在滿足 $g(1) - g(0) = g'(c)$ 的 $c \in (0, 1)$. 取 $\mathbf{r} = (1-c)\mathbf{p} + c\mathbf{q}$, 則 $\mathbf{r} \in \overline{\mathbf{pq}}$. 又 $g(0) = f(\mathbf{p})$, $g(1) = f(\mathbf{q})$, 以及

$$g'(c) = f'((1-c)\mathbf{p} + c\mathbf{q}) \cdot \frac{d}{dt}((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}) \Big|_{t=c} = f'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p}),$$

故

$$f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

□

定理 7.3.15 (多變數向量函數的均值定理) 設 m 維向量函數 $\mathbf{f}$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上可微, 固定 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$, 且設線段 $\overline{\mathbf{pq}} := \{(1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} : 0 \leq t \leq 1\}$ 完全落在 D 內, 則存在滿足

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})\| \leq \|f'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})\|$$

的 $\mathbf{r} \in \overline{\mathbf{pq}}$.

證明 令 $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$. 若 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 則不等式顯然成立. 若 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 定義函數

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}),$$

則 g 在 $[0, 1]$ 上連續且在 $(0, 1)$ 內可微. 依單變數實函數的均值定理, 存在滿足 $g(1) - g(0) = g'(c)$ 的 $c \in (0, 1)$. 取 $\mathbf{r} = (1-c)\mathbf{p} + c\mathbf{q}$, 則 $\mathbf{r} \in \overline{\mathbf{pq}}$. 又 $g(0) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{p})$, $g(1) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q})$, 即

$$g(1) - g(0) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})) = \|\mathbf{v}\|^2,$$

以及

$$g'(c) = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{f}'((1-c)\mathbf{p} + c\mathbf{q}) \frac{d}{dt}((1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}) \Big|_{t=c} \right) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})),$$

故

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f}'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})).$$

依柯西-施瓦茨不等式,

$$\|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{f}'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})\|.$$

因 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 兩側同除以 $\|\mathbf{v}\|$, 代回 $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$, 即得

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})\| \leq \|\mathbf{f}'(\mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{p})\|.$$

□

7.4 * 多變數函數的泰勒公式

定理 7.4.1 (多變數泰勒公式 (帶拉格朗日餘項)) 設實函數 f 在 $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 的某鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內具有 $k+1$ 階連續偏導數, 則對所有 $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} = (x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_n^{(0)} + h_n) \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}),$$

即

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} \frac{h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{j_1 + \dots + j_n = k+1} \frac{h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})$$

或

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k+1}=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}). \end{aligned}$$

證明 定義輔助函數

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}),$$

由於 f 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內具有 $k+1$ 階連續偏導數, 且線段 $\{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} : 0 \leq t \leq 1\}$ 完全落在凸集 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內, 故 g 在 $[0, 1]$ 上具有 $k+1$ 階連續導數. 依多變數函數的連鎖律, 對 g 求一階導數可得

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \frac{d}{dt}(x_i^{(0)} + th_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}).$$

利用數學歸納法可進一步推得, 對任意 $1 \leq j \leq k+1$, 有

$$g^{(j)}(t) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}).$$

依單變數實函數的泰勒公式 (帶拉格朗日餘項型), 將 $g(t)$ 在 $t = 0$ 處展開至 k 階, 取 $t = 1$, 則存在滿足 $0 < \theta < 1$ 的 θ , 使得

$$g(1) = g(0) + \sum_{j=1}^k \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

由 g 的定義可知 $g(1) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$, $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$. 接著將各階導數

$$g^{(j)}(0) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0)$$

以及餘項導數

$$g^{(k+1)}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})$$

代入上述展開式, 即得

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}).$$

□

註記 7.4.2 當 f 在區域 D 內具有 $k+1$ 階連續偏導數時, 餘項

$$R_{k+1}(\mathbf{h}) = \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h})$$

稱為拉格朗日餘項, 並稱定理 7.4.1 的公式為 f 帶拉格朗日餘項的泰勒公式.

系理 7.4.3 (多變數泰勒公式 (帶皮亞諾餘項)) 設實函數 f 在 $\mathbf{x}_0$ 的某鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內具有 k 階連續偏導數, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, 則

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|^k) \quad (\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0).$$

此公式稱為 f 帶皮亞諾餘項的泰勒公式, $o(\|\mathbf{h}\|^k)$ 稱為皮亞諾餘項.

證明 由於 f 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 內具有 k 階連續偏導數, 依帶有拉格朗日餘項的多變數泰勒公式 (展開至 $k-1$ 階), 存在滿足 $0 < \theta < 1$ 的 θ , 使得

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0) + R_k,$$

其中 k 階餘項 R_k 為

$$R_k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}).$$

將 R_k 展開, 並加上與減去在 $\mathbf{x}_0$ 處的 k 階偏導數項, 可得

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{1}{k!} \sum_{j_1 + \dots + j_n = k} \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}) \\ &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j_1 + \dots + j_n = k} \frac{h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}) - \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0) \right). \end{aligned}$$

由於 f 的 k 階偏導數在 $\mathbf{x}_0$ 處連續, 當 $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ 時有 $\theta\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, 故

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}) - \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(\mathbf{x}_0) \right) = 0.$$

又因為對所有 $1 \leq i \leq n$ 皆有 $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$, 故 $|h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n}| \leq \|\mathbf{h}\|^{j_1 + \cdots + j_n} = \|\mathbf{h}\|^k$. 結合上述兩點可知, 上式中右側的第二個求和項為 $o(\|\mathbf{h}\|^k)$, 即

$$R_k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|^k).$$

最後將此餘項 R_k 代回至原本的 $k-1$ 階展開式中, 即得

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|^k) \quad (\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0).$$

□

系理 7.4.4 於 f 帶拉格朗日餘項的泰勒公式中, 取 $k=0$, 也可以得到多變數實函數的拉格朗日微分均值定理 (參見定理 7.3.14):

設 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內具有連續偏導數, 且對所有 $t \in [0, 1]$, 均有 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in D$, 則存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(0)}) = f'(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

系理 7.4.5 設函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內的各個偏導數均為 0, 則 f 在 D 內為常函數.

註記 7.4.6 當 $k=1$ 時, f 帶皮亞諾餘項的泰勒公式為

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|^2) \quad (\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0),$$

其中

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

稱為 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處的**海瑟矩陣**.

例 7.4.7 求函數 $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ 在 $(2, 1)$ 附近帶皮亞諾餘項的泰勒公式 (直到二次項).

解 對於這類函數, 一般可直接求偏導, 然後寫出泰勒公式, 但下面利用單變數函數已知的泰勒公式來求之. 令 $u = x - 2$, $v = y - 1$, 由於

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{(u+2) + (v+1)}{(u+2) - (v+1)} \\ &= \frac{3 + (u+v)}{1 + (u-v)} \\ &= (3 + (u+v)) (1 - (u-v) + (u-v)^2 + o(u^2 + v^2)) \quad (u^2 + v^2 \rightarrow 0), \end{aligned}$$

將上式展開並合併同次項得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3 - 3(u - v) + 3(u - v)^2 + (u + v) - (u^2 - v^2) + o(u^2 + v^2) \\ &= 3 - 3u + 3v + 3u^2 - 6uv + 3v^2 + u + v - u^2 + v^2 + o(u^2 + v^2) \\ &= 3 - 2u + 4v + 2u^2 - 6uv + 4v^2 + o(u^2 + v^2) \quad (u^2 + v^2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

將 $u = x - 2$ 及 $v = y - 1$ 代回, 整理得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3 - 2(x - 2) + 4(y - 1) + 2(x - 2)^2 - 6(x - 2)(y - 1) \\ &\quad + 4(y - 1)^2 + o((x - 2)^2 + (y - 1)^2) \quad ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

例 7.4.8 求函數 $f(x, y) = y \sin(x + y)$ 在原點 $(0, 0)$ 處的所有四階偏導數.

解 由 $\sin(x + y)$ 在 $(0, 0)$ 處的泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y \sin(x + y) \\ &= y \left(\sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x + y)^{2k+1} + o((\sqrt{x^2 + y^2})^{2K+1}) \right) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

令 $K = 1$, 得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y \left((x + y) - \frac{1}{3!} (x + y)^3 + o\left((\sqrt{x^2 + y^2})^3\right) \right) \\ &= xy + y^2 - \frac{1}{6} y(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + o\left((\sqrt{x^2 + y^2})^4\right) \\ &= xy + y^2 - \frac{1}{6} x^3y - \frac{1}{2} x^2y^2 - \frac{1}{2} xy^3 - \frac{1}{6} y^4 + o\left((\sqrt{x^2 + y^2})^4\right) \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0), \end{aligned}$$

於是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!} \binom{4}{4} \cdot \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^4} &= 0, \quad \frac{1}{4!} \binom{4}{3} \cdot \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4!} \binom{4}{2} \cdot \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4!} \binom{4}{1} \cdot \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x \partial y^3} &= -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4!} \binom{4}{0} \cdot \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial y^4} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

從而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^4} &= 0, \quad \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^3 \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x^2 \partial y^2} = -2, \\ \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial x \partial y^3} &= -3, \quad \frac{\partial^4 f(0, 0)}{\partial y^4} = -4. \end{aligned}$$

7.5 隱函數的求導公式

本節的理論及證明部分相當困難, 讀者可依自己需求自行取捨. 最重要的是能夠正確運用定理來解決問題.

單個方程的情形

定理 7.5.1 (雙邊數函數的隱函數存在定理) 設雙邊數函數 $F(x, y)$ 在鄰域 $B_\delta((x_0, y_0))$ 內滿足以下條件:

$$(1) \quad F(x_0, y_0) = 0;$$

(2) $F(x, y)$ 與 $F_y(x, y)$ 在 $B_\delta((x_0, y_0))$ 內連續;

(3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

則存在 $\delta_0 > 0$, 使得在鄰域 $B_{\delta_0}(x_0)$ 內存在唯一滿足下述條件的連續函數 $y = f(x)$:

(一) $y_0 = f(x_0)$;

(二) 對所有 $x \in B_{\delta_0}(x_0)$, 均有 $F(x, f(x)) = 0$;

(三) 若 $F'_x(x, y)$ 在 $B_\delta((x_0, y_0))$ 內亦連續, 則 $f(x)$ 在 $B_{\delta_0}(x_0)$ 內有連續導數, 且

$$f'(x) = \frac{-F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

證明 (一) 存在性與唯一性: 不妨設 $F'_y(x_0, y_0) > 0$. 由於 F'_y 在 $B_\delta((x_0, y_0))$ 內連續, 根據保號性, 必定存在一個充分小的閉矩形區域 $R = [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \subset B_\delta((x_0, y_0))$, 使得對於 R 內的所有的點 (x, y) 皆有 $F'_y(x, y) > 0$. 固定 $x = x_0$, 考慮單變數函數 $F(x_0, y)$, 由於其對 y 的導數 $F'_y(x_0, y) > 0$, 故 $F(x_0, y)$ 在區間 $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ 上嚴格遞增. 搭配已知條件 $F(x_0, y_0) = 0$, 可推得

$$F(x_0, y_0 - \epsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \epsilon) > 0.$$

又因為 $F(x, y)$ 是連續函數, 對於上述固定的 $y_0 - \epsilon$ 與 $y_0 + \epsilon$, 必定存在 $\delta_0 > 0$ (且 $\delta_0 \leq \eta$), 使得當 $x \in B_{\delta_0}(x_0) = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ 時, 以下不等式仍然成立:

$$F(x, y_0 - \epsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \epsilon) > 0.$$

現在對於任意固定的 $x \in B_{\delta_0}(x_0)$, 定義單變數函數 $g(y) = F(x, y)$. 由於 $g(y)$ 在 $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ 上連續, 且兩端點函數值異號, 依據勘根定理, 區間 $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ 內至少存在一點 y , 使得 $g(y) = F(x, y) = 0$. 再者, 因為在此區域內恆有 $F'_y(x, y) > 0$, $g(y)$ 為嚴格遞增函數, 故使得 $g(y) = 0$ 的 y 值必定唯一. 既然對於每一個 $x \in B_{\delta_0}(x_0)$ 都有唯一的 y 對應, 便可定義此對應關係為函數 $y = f(x)$, 且該函數滿足 $y_0 = f(x_0)$ 與 $F(x, f(x)) = 0$.

(二) 連續性: 對於任意 $x_1 \in B_{\delta_0}(x_0)$, 設 $y_1 = f(x_1)$. 若給定任意 $\epsilon' > 0$ (不妨設 $\epsilon' < \epsilon$), 仿照前述邏輯, 必定能找到對應的 $\delta' > 0$, 使得當 $|x - x_1| < \delta'$ 時, 其對應的根 $f(x)$ 會落在 $(y_1 - \epsilon', y_1 + \epsilon')$ 之內, 亦即 $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon'$. 此即證明了 $f(x)$ 在 x_1 處連續. 故 $f(x)$ 在 $B_{\delta_0}(x_0)$ 內為連續函數.

(三) 可微性: 假設 $F'_x(x, y)$ 在 $B_\delta((x_0, y_0))$ 內亦連續. 給定 $x, x + \Delta x \in B_{\delta_0}(x_0)$, 令其函數值的增量為 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. 由於 $f(x)$ 連續, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時必有 $\Delta y \rightarrow 0$. 由隱函數的定義可知 $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ 與 $F(x, y) = 0$, 兩式相減得

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y).$$

將上式等號右側加上並減去 $F(x + \Delta x, y)$, 並分別對兩個變數使用單變數均值定理, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= (F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)) + (F(x + \Delta x, y) - F(x, y)) \\ &= F_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + F_x(x + \theta_2 \Delta x, y) \Delta x, \end{aligned}$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. 由於 $F_y > 0$, 可將各項移項並同除以 $\Delta x \cdot F_y$, 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x + \theta_2 \Delta x, y)}{F'_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y)}.$$

最後令 $\Delta x \rightarrow 0$ (同時 $\Delta y \rightarrow 0$), 根據偏導數 F_x 與 F_y 的連續性取極限, 即可得

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{-F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

因爲 F'_x, F'_y 與 $f(x)$ 皆連續, 且分母 $F'_y \neq 0$, 故 $f'(x)$ 爲連續函數. $\square$

定理 7.5.2 (n 變數函數的隱函數定理) 記 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$, 假設函數 $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(y_0)$ ($\delta > 0$) 內有定義, 並且滿足:

- (1) $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$;
- (2) $F(\mathbf{x}, y)$ 和 $F'_y(\mathbf{x}, y)$ 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(y_0)$ 內連續;
- (3) $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$,

則存在 $\delta_0 > 0$ ($0 < \delta_0 < \delta$), 使得在 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 內存在唯一滿足下述條件的連續函數 $y = f(\mathbf{x})$:

- (一) $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$;
- (二) 對所有 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$;
- (三) 如果 $F(\mathbf{x}, y)$ 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(y_0)$ 內存在各個連續偏導數, 那麼 $y = f(\mathbf{x})$ 在 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 具有各個連續偏導數, 並且對於 $i = 1, 2, \dots, n$ 及所有 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}} = f'_{x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F'_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)},$$

其中 $y = f(\mathbf{x})$.

證明 (一) 存在性與唯一性: 不妨設 $F'_y(\mathbf{x}_0, y_0) > 0$. 由於 F'_y 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(y_0)$ 內連續, 根據局部保號性, 必定存在充分小的 $\eta > 0$ 與 $\epsilon > 0$, 使得當 $\mathbf{x} \in B_\eta(\mathbf{x}_0)$ 且 $y \in [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ 時, 皆有 $F'_y(\mathbf{x}, y) > 0$. 固定 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, 考慮單變數函數 $F(\mathbf{x}_0, y)$, 由於其對 y 的導數 $F'_y(\mathbf{x}_0, y) > 0$, 故 $F(\mathbf{x}_0, y)$ 在區間 $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ 上嚴格遞增. 搭配已知條件 $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$, 可推得

$$F(\mathbf{x}_0, y_0 - \epsilon) < 0, \quad F(\mathbf{x}_0, y_0 + \epsilon) > 0.$$

又因爲 $F(\mathbf{x}, y)$ 是連續函數, 對於上述固定的 $y_0 - \epsilon$ 與 $y_0 + \epsilon$, 必定存在 $\delta_0 > 0$ (且 $\delta_0 \leq \eta$), 使得當 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 時, 以下不等式仍然成立:

$$F(\mathbf{x}, y_0 - \epsilon) < 0, \quad F(\mathbf{x}, y_0 + \epsilon) > 0.$$

現在對於任意固定的 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 定義單變數函數 $g(y) = F(\mathbf{x}, y)$. 由於 $g(y)$ 在 $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ 上連續, 且兩端點函數值異號, 依據勘根定理, 區間 $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ 內至少存在一點 y , 使得 $g(y) = F(\mathbf{x}, y) = 0$. 再者, 因爲在此區域內恆有 $F'_y(\mathbf{x}, y) > 0$, $g(y)$ 爲嚴格遞增函數, 故使得 $g(y) = 0$ 的 y 值必定唯一. 既然對於每一個 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 都有唯一的 y 對應, 便可定義此對應關係爲函數 $y = f(\mathbf{x})$, 且該函數滿足 $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ 與 $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$.

(二) 連續性: 對於任意 $\mathbf{x}_1 \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 設 $y_1 = f(\mathbf{x}_1)$. 若給定任意 $\epsilon' > 0$ (不妨設 $\epsilon' < \epsilon$), 仿照前述邏輯, 利用 $F(\mathbf{x}_1, y_1 - \epsilon') < 0$ 及 $F(\mathbf{x}_1, y_1 + \epsilon') > 0$ 與 F 的連續性, 必定能找到對應的 $\delta' > 0$, 使得當 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| < \delta'$ 時, 其對應的根 $f(\mathbf{x})$ 會落在 $(y_1 - \epsilon', y_1 + \epsilon')$ 之內, 亦即 $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_1)| < \epsilon'$. 此即證明了 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_1$ 處連續. 故 $f(\mathbf{x})$ 在 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 內爲連續函數.

(三) 可微性: 假設 $F(\mathbf{x}, y)$ 在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(y_0)$ 內存在各個連續偏導數. 給定 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 固定其他變數, 僅讓第 i 個變數 x_i 產生增量 Δx_i , 使得 $\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 其中 $\mathbf{e}_i$ 爲第 i 個標準單位向量.

令其函數值的增量為 $\Delta y = f(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})$. 由於 $f(\mathbf{x})$ 連續, 當 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 時必有 $\Delta y \rightarrow 0$. 由隱函數的定義可知 $F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y + \Delta y) = 0$ 與 $F(\mathbf{x}, y) = 0$, 兩式相減得

$$0 = F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y + \Delta y) - F(\mathbf{x}, y).$$

將上式等號右側加上並減去 $F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y)$, 並分別對第 i 個變數及 y 使用單變數均值定理, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= (F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y + \Delta y) - F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y)) + (F(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y) - F(\mathbf{x}, y)) \\ &= F'_y(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y + F'_{x_i}(\mathbf{x} + \theta_2 \Delta x_i \mathbf{e}_i, y) \Delta x_i, \end{aligned}$$

其中 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. 由於 $F'_y > 0$, 可將各項移項並同除以 $\Delta x_i \cdot F'_y$, 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{-F'_{x_i}(\mathbf{x} + \theta_2 \Delta x_i \mathbf{e}_i, y)}{F'_y(\mathbf{x} + \Delta x_i \mathbf{e}_i, y + \theta_1 \Delta y)}.$$

最後令 $\Delta x_i \rightarrow 0$ (同時 $\Delta y \rightarrow 0$), 根據偏導數 F'_{x_i} 與 F'_y 的連續性取極限, 即可得

$$f'_{x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{-F'_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F'_y(\mathbf{x}, y)} = \frac{-F'_{x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{F'_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}.$$

因為 F'_{x_i}, F'_y 與 $f(\mathbf{x})$ 皆連續, 且分母 $F'_y \neq 0$, 故偏導數 $f'_{x_i}(\mathbf{x})$ 為連續函數. 對所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 皆同理可證. $\square$

例 7.5.3 驗證方程式 $xe^y + y - 1 = 0$ 在點 $(0, 1)$ 的某一鄰域內能唯一確定一個有連續導數, 當 $x = 0, y = 1$ 時的隱函數 $y = f(x)$, 並求這函數的一階與二階導數在 $x = 0$ 的值.

解 設 $F(x, y) = xe^y + y - 1$, 則 $F'_x = e^y$, $F'_y = xe^y + 1$, $F(0, 1) = 0$, $F'_y(0, 1) = 1 \neq 0$. 因此由隱函數存在定理可知, 方程式 $xe^y + y - 1 = 0$ 在點 $(0, 1)$ 的某鄰域內能唯一確定一個有連續導數, 當 $x = 0, y = 1$ 時的函數 $y = f(x)$. 下面求這函數的一階及二階導數.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y}{xe^y + 1}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,1)} = -\frac{e^1}{0+1} = -e; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{e^y y'(xe^y + 1) - e^y(e^y + xe^y y')}{(xe^y + 1)^2} = -\frac{e^y(y' - e^y)}{(xe^y + 1)^2}, \end{aligned}$$

將 $x = 0, y = 1$ 及 $y' = -e$ 代入上式, 得

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(0,1)} = -\frac{e^1(-e - e^1)}{(0+1)^2} = -\frac{e(-2e)}{1} = 2e^2.$$

例 7.5.4 設 $2x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, 求 $\partial^2 z / \partial x^2$.

解 設 $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2z$, 則 $F'_x = 4x$, $F'_z = 2z - 2$. 當 $z \neq 1$ 時, 應用隱函數求導公式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{4x}{2z-2} = \frac{2x}{1-z}.$$

再一次對 x 求偏導數, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(1-z) - 2x \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(1-z)^2} = \frac{2(1-z) + 2x \left(\frac{2x}{1-z} \right)}{(1-z)^2} = \frac{2(1-z)^2 + 4x^2}{(1-z)^3}.$$

* 方程組的情形

定理 7.5.5 (多變數向量函數的隱函數組存在定理) 設向量函數

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), F_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$$

在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(\mathbf{u}_0)$ ($\delta > 0$) 內有定義, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in B_\delta(\mathbf{u}_0)$, 並且滿足以下條件:

- (1) $F_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0, j = 1, 2, \dots, m$;
- (2) 對於 $j = 1, 2, \dots, m$, $F_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 以及它的各個偏導數在 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \times B_\delta(\mathbf{u}_0)$ 內連續;
- (3) 雅可比行列式在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 處不為零, 即

$$\left. \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \neq 0,$$

則存在 $\delta_0 > 0$ ($0 < \delta_0 < \delta$), 使得在 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 內存在唯一的 m 維 n 元向量函數

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

滿足

- (一) $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$;
- (二) 對所有 j ($1 \leq j \leq m$) 及一切 $\mathbf{x} \in B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$, 有

$$F_j(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = 0;$$

- (三) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的每個分量函數 $f_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 在 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 內存在連續偏導數. 記

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_m} \end{pmatrix},$$

那麼

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A},$$

其中 $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

證明 對方程的個數 m 使用數學歸納法來證明.

當 $m = 1$ 時, 本定理退化為單一 n 變數方程的隱函數存在定理, 依先前的推導可知定理成立.

假設對於 $m - 1$ 個方程的隱函數組定理成立, 來證明 m 個方程的情形. 由於在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 處雅可比行列式 $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, 矩陣 $\mathbf{B}$ 中至少有一個元素非零. 不失一般性, 假設矩陣 $\mathbf{B}$ 右下角的元素 $(F_m)'_{u_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \neq 0$. (若否, 僅需重新排列變數 $u_1, \dots, u_m$ 及方程式的順序即可).

單獨考慮第 m 個方程式 $F_m(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m) = 0$. 根據 $m = 1$ 時的隱函數定理, 存在 $(\mathbf{x}_0, u_1^{(0)}, \dots, u_{m-1}^{(0)})$ 的某個鄰域, 使得在該鄰域內可唯一確定一個具有連續偏導數的隱函數 $u_m = \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1})$, 滿足: (1) $u_m^{(0)} = \phi(\mathbf{x}_0, u_1^{(0)}, \dots, u_{m-1}^{(0)})$; (2) 恆有 $F_m(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1}, \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1})) = 0$.

將 $u_m = \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1})$ 代入前 $m - 1$ 個方程式中, 定義新的函數組:

$$G_j(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1}) = F_j(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1}, \phi(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1})), \quad j = 1, 2, \dots, m - 1.$$

顯然 G_j 皆具有連續的偏導數, 且滿足 $G_j(\mathbf{x}_0, u_1^{(0)}, \dots, u_{m-1}^{(0)}) = 0$. 接著計算 G_j 對 u_k ($1 \leq j, k \leq m-1$) 的雅可比行列式. 依連鎖律有

$$(G_j)'_{u_k} = (F_j)'_{u_k} + (F_j)'_{u_m} \phi'_{u_k}.$$

另一方面, 將 $F_m(\dots, \phi) = 0$ 對 u_k 求偏導可得

$$(F_m)'_{u_k} + (F_m)'_{u_m} \phi'_{u_k} = 0 \implies \phi'_{u_k} = -\frac{(F_m)'_{u_k}}{(F_m)'_{u_m}}.$$

代回前式得到

$$(G_j)'_{u_k} = (F_j)'_{u_k} - (F_j)'_{u_m} \frac{(F_m)'_{u_k}}{(F_m)'_{u_m}}.$$

利用行列式區塊矩陣的消去性質 (或舒爾補公式), 原雅可比行列式 $\det(\mathbf{B})$ 可展開為

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \det((F_j)'_{u_k})_{1 \leq j, k \leq m} \\ &= (F_m)'_{u_m} \cdot \det \left((F_j)'_{u_k} - (F_j)'_{u_m} \frac{(F_m)'_{u_k}}{(F_m)'_{u_m}} \right)_{1 \leq j, k \leq m-1} \\ &= (F_m)'_{u_m} \cdot \frac{\partial(G_1, \dots, G_{m-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{m-1})}. \end{aligned}$$

因為 $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ 且 $(F_m)'_{u_m} \neq 0$, 故必有

$$\frac{\partial(G_1, \dots, G_{m-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{m-1})} \neq 0.$$

至此, 函數組 $G_j(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_{m-1}) = 0$ ($j = 1, \dots, m-1$) 完全滿足 $m-1$ 個方程的隱函數組定理的條件. 依歸納假設, 存在唯一的 $m-1$ 個連續可微的函數 $u_k = f_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, m-1$), 滿足 $u_k^{(0)} = f_k(\mathbf{x}_0)$ 及 $G_j(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x})) = 0$. 最後, 只要令 $f_m(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x}))$, 即可證明隱函數組 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的存在性、唯一性與連續可微性.

可微性與導數矩陣公式的證明: 由恆等式 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, 兩邊對 x_i ($1 \leq i \leq n$) 求偏導數, 依多變數連鎖律可得

$$(F_j)'_{x_i} + \sum_{k=1}^m (F_j)'_{u_k} (f_k)'_{x_i} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

將這 $m \times n$ 個方程寫成矩陣形式, 恰好為

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{O}.$$

由於定理條件保證了 $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, 矩陣 $\mathbf{B}$ 為可逆矩陣, 兩邊同乘 $\mathbf{B}^{-1}$ 並移項即可得

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}.$$

得證. □

例 7.5.6 證明方程組

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + u^2 + v^2 = 2, \\ xu + yv = 0 \end{cases}$$

在 $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, -1)$ 的某個鄰域 $B_\delta((1, 1, 1, -1))$ ($\delta > 0$) 內確定隱函數組

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

並在該鄰域內求 $\partial u / \partial x$ 與 $\partial v / \partial y$.

解 顯然點 $(1, 1, 1, -1)$ 滿足給定的方程組. 記

$$F(x, y, u, v) = x^2 - y^2 + u^2 + v^2 - 2,$$

$$G(x, y, u, v) = xu + yv,$$

則 F, G 都具有連續偏導數, 且雅可比行列式

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{(1, 1, 1, -1)} = \det \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ x & y \end{pmatrix} \Big|_{(1, 1, 1, -1)} = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - (-2) = 4 \neq 0.$$

因此, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得原方程組在 $B_{\delta_0}((1, 1, 1, -1))$ 內唯一確定隱函數組

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

並且 $u(x, y)$ 與 $v(x, y)$ 在 $B_{\delta_0}((1, 1))$ 內存在連續偏導數. 下面來求偏導數. 對原方程組兩端分別求全微分, 約去第一式的公因數 2, 得

$$\begin{cases} xdx - ydy + udu + vdv = 0, \\ udx + vdy + xdu + ydv = 0. \end{cases}$$

令 $dy = 0$, 將含有 dx 的項移至右側, 得

$$\begin{cases} udu + vdv = -xdx, \\ xdu + ydv = -udx. \end{cases}$$

由第二式解出 $dv = (-udx - xdu)/y$, 代入第一式可得

$$udu + v \left(\frac{-udx - xdu}{y} \right) = -xdx,$$

兩邊同乘 y 並整理得 $(uy - vx)du = (uv - xy)dx$, 從而求出

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uv - xy}{uy - vx}.$$

同理, 在全微分方程組中令 $dx = 0$, 可得

$$\begin{cases} udu + vdv = ydy, \\ xdu + ydv = -vdv. \end{cases}$$

由第二式解出 $du = (-vdv - ydv)/x$, 代入第一式可得

$$\left(\frac{-vdv - ydv}{x} \right) u + vdv = ydy,$$

兩邊同乘 x 並整理得 $(vx - uy)dv = (uv + xy)dy$, 從而可求出

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{uv + xy}{vx - uy}.$$

* 反函數存在定理

這個部分對於非數學系且不需修習數學分析 (高等微積分) 的讀者來說是非必要的, 讀者可斟酌跳過這個部分.

定理 7.5.7 (反函數存在定理) 設

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

是區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 到區域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的一個 C^1 映射, 並且在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處有

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \neq 0.$$

記 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 則存在 $\mathbf{x}_0$ 的鄰域 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0) \subseteq D$, 使得映射 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 到 $\mathbf{f}(B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0))$ 的 C^1 同胚映射⁴, 其中 $\mathbf{f}(B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0))$ 是包含 $\mathbf{y}_0$ 的一個區域.

證明 構造一個包含 n 個方程式的輔助向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$, 即其各個分量爲

$$F_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x}) - y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

此處將 $\mathbf{y}$ 視爲自變數, $\mathbf{x}$ 視爲應變數. 由於 $\mathbf{f}$ 是 C^1 映射, 故 $\mathbf{F}$ 在 $(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$ 的某個鄰域內有定義且具有連續的偏導數. 現來檢驗此函數是否滿足隱函數組存在定理的條件: (1) 初始值條件: $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$; (2) 平滑性條件: $\mathbf{F}$ 的各個偏導數在 $(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$ 附近皆連續; (3) 雅可比行列式非零條件: $\mathbf{F}$ 對因變數 $\mathbf{x}$ 的雅可比行列式在 $(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)$ 處爲

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bigg|_{(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bigg|_{\mathbf{x}_0} \neq 0.$$

根據隱函數組存在定理, 存在 $\mathbf{y}_0$ 的某個鄰域 $B_\eta(\mathbf{y}_0)$ 與 $\mathbf{x}_0$ 的某個鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq D$, 使得在 $B_\eta(\mathbf{y}_0)$ 內存在唯一滿足 $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$ 的 n 元向量函數 $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, 且滿足 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$.

方程式 $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$ 即意味著恆有 $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. 同時, 隱函數組存在定理亦保證了反函數 $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ 在 $B_\eta(\mathbf{y}_0)$ 內存在各個連續偏導數 (即 $\mathbf{g}$ 亦爲 C^1 映射).

另一方面, 由於 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處連續且 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, 故可適當選取一個充分小的鄰域 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0) \subseteq B_\delta(\mathbf{x}_0)$, 使得其像集完全落在 $B_\eta(\mathbf{y}_0)$ 之內, 即 $\mathbf{f}(B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)) \subseteq B_\eta(\mathbf{y}_0)$.

在此鄰域 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 內, 對於任意 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, 若 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}^*$, 兩邊同時代入反函數 $\mathbf{g}$ 可得 $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_2))$, 即 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{x}_2$, 說明了 $\mathbf{f}$ 是一對一的單射.

至此已證明了 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是從 $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0)$ 到其像集 $\mathbf{f}(B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0))$ 的雙射, 且原映射 $\mathbf{f}$ 與逆映射 $\mathbf{g}$ 皆爲 C^1 映射, 故該映射爲 C^1 同胚映射. 且因同胚映射將開集映爲開集 (爲何?), 像集 $\mathbf{f}(B_{\delta_0}(\mathbf{x}_0))$ 必定是包含 $\mathbf{y}_0$ 的一個開區域. 證畢. $\square$

註記 7.5.8 當一個 n 維 n 元向量函數 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內具有連續偏導數, 並且對所有 $\mathbf{x} \in D$ 有 $\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \neq 0$ 時, 僅僅能推出 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是局部同胚映射, 但不能推出它是 D 到 $\mathbf{f}(D)$ 的整體同胚映射. 例如:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 到 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 的映射, 對於所有 $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, 有

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0.$$

因此該映射局部總是同胚映射. 但由於 $f(x, y) = f(-x, -y)$ (例如 $f(1, 1) = f(-1, -1) = (0, 2)$), 即該映射在定義域上並非一對一, 上述映射顯然不是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 的整體同胚映射.

⁴所謂同胚映射, 是指本身及其逆映射皆連續的雙射.

註記 7.5.9 對於反函數存在定理, 容易舉例說明, 如果僅僅要求存在逆映射, 而不要求逆映射具有連續偏導數, 雅可比行列式不為零的條件不是必要條件. 例如, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ (x-y)^3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的同胚映射. 事實上, 它的逆映射為

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u + v^{1/3}) \\ \frac{1}{2}(u - v^{1/3}) \end{pmatrix},$$

但在 $(0, 0)$ 處有

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3(x-y)^2 & -3(x-y)^2 \end{pmatrix} \bigg|_{(0,0)} = 0.$$

此例同時說明了當 $\partial x/\partial v$ (或 $\partial y/\partial v$) 不是處處存在時, 仍然可以具有連續的逆映射.

7.6 方向導數

定義 7.6.1 設 m 維向量函數在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 維單位向量. 若極限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t}$$

存在, 則稱該極限為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處沿方向 $\mathbf{u}$ 的**方向導數**, 常記作

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \quad D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0), \quad \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0}, \quad \text{或} \quad \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{u}}.$$

註記 7.6.2 (1) 當 $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ 時, $\mathbf{f}$ 沿方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數即為 $\mathbf{f}$ 關於 x_i 的偏導數, 即

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}.$$

$$(2) \quad \nabla_{-\mathbf{u}}\mathbf{f} = -\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}.$$

(3) 若 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, 則 $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}$ 存在的充要條件為對每個 $i \in \{1, \dots, m\}$, $\nabla_{\mathbf{u}}f_i$ 皆存在. 此時,

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f} = (\nabla_{\mathbf{u}}f_1, \dots, \nabla_{\mathbf{u}}f_m).$$

(4) 若 $\mathbf{F}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$, 則 $\mathbf{F}'(t) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$. 特別地, $\mathbf{F}'(0) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(5) 若 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處沿每一個方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數皆存在, 則 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處關於每一個變數的偏導數皆存在, 反之未必成立, 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$$

具有關於各變數的偏導數, 但卻不存在沿異於方向 $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$) 的方向導數.

(6) 即使 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處沿每一個方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數皆存在, 也無法保證 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處的連續性, 例如函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

沿每一個方向的方向導數均存在, 但在點 $(0, 0)$ 處不連續.

例 7.6.3 利用方向導數的定義, 求函數 $f(x, y) = x^2y$ 在點 $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ 處, 沿方向向量 $\mathbf{v} = (3, 4)$ 的方向導數.

解 將給定的方向向量 $\mathbf{v}$ 單位化. 由於 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 對應的單位向量為

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

將 $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ 與 $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 代入方向導數的定義, 計算增量後的函數值:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = f\left(1 + \frac{3}{5}t, 1 + \frac{4}{5}t\right) = \left(1 + \frac{3}{5}t\right)^2 \left(1 + \frac{4}{5}t\right) = 1 + 2t + \frac{33}{25}t^2 + \frac{36}{125}t^3.$$

又因為 $f(\mathbf{x}_0) = f(1, 1) = 1^2 \cdot 1 = 1$, 代回極限式中可得

$$\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 + 2t + \frac{33}{25}t^2 + \frac{36}{125}t^3) - 1}{t} = 2.$$

因此, 該函數在點 $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ 處沿方向 $\mathbf{v} = (3, 4)$ 的方向導數為 2.

定理 7.6.4 (方向導數的運算性質) 設 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 為一方向向量, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, 則方向導數滿足以下運算性質:

(1) 線性性: 若 m 維向量函數 $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處可微, 則對於任意實數 c_1, c_2 , 有

$$\nabla_{\mathbf{u}}(c_1\mathbf{f} + c_2\mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = c_1\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + c_2\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

(2) 乘法法則: 當 $m = 1$ 時, 即實函數 $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處可微, 有

$$\nabla_{\mathbf{u}}(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{x}_0).$$

(3) 連鎖律: 設 l 維向量函數 $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^l)$ 在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處可微, m 維向量函數 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^l$) 在點 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ 處可微, 則合成函數 $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處沿方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數為

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

證明 證明留給讀者作為習題. □

定理 7.6.5 設 m 維向量函數 $\mathbf{f}$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上有定義, 且在 $\mathbf{x}_0 \in D$ 處可微, 則 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處沿方向 $\mathbf{u}$ 的方向導數為

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}.$$

特別地, 當 $m = 1$, $\mathbf{f} = f$ 且 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ 時,

$$\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^{\top} \mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} u_i.$$

證明 因為 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微, 依多變數向量函數可微的定義, 當給定一個增量 $t\mathbf{u}$ 時, 函數的變化量可表為

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{u}) + \mathbf{o}(\|t\mathbf{u}\|) \quad (t \rightarrow 0).$$

由於 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ 為一線性映射, 因此可將純量 t 提出, 即 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{u}) = t\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$. 又因為方向向量 $\mathbf{u}$ 為常向量 (其長度 $\|\mathbf{u}\|$ 為定值), 所以當 $t \rightarrow 0$ 時, $\mathbf{o}(\|t\mathbf{u}\|)$ 可以直接記為 $\mathbf{o}(t)$. 將上述等式兩側同除以正數 t , 可得

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} + \frac{\mathbf{o}(t)}{t}.$$

令 $t \rightarrow 0^+$, 依據方向導數的定義, 等式左側的極限即為 $\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$. 而等式右側的極限為

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} + \frac{\mathbf{o}(t)}{t} \right) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u},$$

因此兩側取極限後即得

$$\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}.$$

□

例 7.6.6 求函數 $f(x, y) = x^2y - 3y^2$ 在點 $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ 處, 沿向量 $\mathbf{v} = (3, -4)$ 方向的方向導數.

解 首先, 檢驗函數 $f(x, y)$ 在點 $(2, 1)$ 處的可微性. 計算 f 的兩個一階偏導數:

$$f'_x(x, y) = 2xy, \quad f'_y(x, y) = x^2 - 6y.$$

由於 $f'_x(x, y)$ 與 $f'_y(x, y)$ 皆為多項式函數, 它們在整個 $\mathbb{R}^2$ 上處處連續. 偏導數的連續性保證了函數 $f(x, y)$ 在點 $(2, 1)$ 處是可微的, 因此可以合法地使用公式 $\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$ 來計算方向導數.

接著, 將給定的方向向量 $\mathbf{v}$ 單位化, 求得單位向量 $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

計算函數在點 $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ 處的梯度 (即各個偏導數在該點的值):

$$f'_x(2, 1) = 2(2)(1) = 4, \quad f'_y(2, 1) = 2^2 - 6(1) = -2,$$

即 $\nabla f(2, 1) = (4, -2)$.

最後, 利用梯度與單位方向向量的內積求出方向導數:

$$\nabla_{\mathbf{u}}f(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{u} = (4, -2) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) = 4.$$

因此, 該函數在點 $(2, 1)$ 處沿向量 $(3, -4)$ 方向的方向導數為 4.

註記 7.6.7 設實函數 f 在點 $\mathbf{x}$ 處可微, $\mathbf{u}$ 是直線 l 的單位方向向量, 則

$$\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta,$$

其中 θ 是 $\nabla f(\mathbf{x})$ 與 $\mathbf{u}$ 之間的夾角.

- 當 $\theta = 0$, 即方向 $\mathbf{u}$ 與梯度 $\nabla f(\mathbf{x})$ 同向時, 函數 f 增加最快. 此時函數在此方向的方向導數達最大值, 其最大值為 $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.
- 當 $\theta = \pi$, 即方向 $\mathbf{u}$ 與梯度 $\nabla f(\mathbf{x})$ 反向時, 函數 f 減少最快. 此時函數在此方向的方向導數達最小值, 其最小值為 $-\|\nabla f(\mathbf{x})\|$.
- 當 $\theta = \pi/2$, 即方向 $\mathbf{u}$ 與梯度 $\nabla f(\mathbf{x})$ 垂直時, 函數 f 的變化率為 0.

7.7 多變數微分學在幾何學中的應用

曲線的切線與法平面

其實, 空間曲線的切線與法平面方程式的求法已經在 [9, 單元 3.6] 中已經介紹過了, 但還有一種需要用到偏導數的方法需要介紹. [9, 單元 3.6] 中介紹的是: 給定空間曲線的參數式 (向量式), 直接以求單變數向量函數的導數的方式得切向量作為切線的方向向量或法平面的法向量. 本節提供的方法則可用於: 在給定曲線的兩面式的情況下, 求切向量.

定理 7.7.1 設空間曲線 Γ 的方程式以兩曲面交線的形式給出:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

且 $M(x_0, y_0, z_0)$ 是曲線 Γ 上的一點. 假設 F, G 在點 M 的某鄰域 $B_\delta((x_0, y_0, z_0))$ 內對各個變數具有連續的偏導數, 且在該點處的雅可比行列式滿足

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_M \neq 0.$$

則曲線 Γ 在點 M 處的一個切向量 $\mathbf{T}$ 可表示為

$$\mathbf{T} = \left(\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|_M, \left| \begin{smallmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{smallmatrix} \right|_M, \left| \begin{smallmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{smallmatrix} \right|_M \right),$$

其中分子分母帶下標 M 的行列式表示行列式在點 $M(x_0, y_0, z_0)$ 處的值. 由此可寫出曲線 Γ 在點 M 處的切線方程式為

$$\frac{x - x_0}{\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|_M} = \frac{y - y_0}{\left| \begin{smallmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{smallmatrix} \right|_M} = \frac{z - z_0}{\left| \begin{smallmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{smallmatrix} \right|_M},$$

以及法平面方程式為

$$\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|_M (x - x_0) + \left| \begin{smallmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{smallmatrix} \right|_M (y - y_0) + \left| \begin{smallmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{smallmatrix} \right|_M (z - z_0) = 0.$$

(註: 如果 $\partial(F, G)/\partial(y, z)$, $\partial(F, G)/\partial(z, x)$, $\partial(F, G)/\partial(x, y)$ 中至少有一個在點 M 處不等於零, 那麼可得同樣的結果.)

證明 由已知假設 $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_M \neq 0$, 根據隱函數存在定理, 方程組在點 M 的某鄰域 $B_\delta((x_0, y_0, z_0))$ 內確定了一組函數 $y = \phi(x)$, $z = \psi(x)$. 為求出切線與法平面方程式, 只需要求出 $\phi'(x_0)$ 與 $\psi'(x_0)$. 將其代回原方程組可得恆等式:

$$\begin{cases} F(x, \phi(x), \psi(x)) \equiv 0, \\ G(x, \phi(x), \psi(x)) \equiv 0. \end{cases}$$

將等式兩邊分別對 x 求全導數, 依連鎖律可得:

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0, \\ G'_x + G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

由於係數行列式 $J = \partial(F, G)/\partial(y, z) \neq 0$, 故可解得 dy/dx 與 dz/dx :

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = \frac{\left| \begin{smallmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|}, \quad \frac{dz}{dx} = \psi'(x) = \frac{\left| \begin{smallmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|}.$$

於是, $\mathbf{T} = (1, \phi'(x_0), \psi'(x_0))$ 是曲線 Γ 在點 M 處的一個切向量. 把上面的切向量 $\mathbf{T}$ 乘上分母的值 $\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|_M$, 得

$$\mathbf{T}_1 = \left(\left| \begin{smallmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{smallmatrix} \right|_M, \left| \begin{smallmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{smallmatrix} \right|_M, \left| \begin{smallmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{smallmatrix} \right|_M \right),$$

這也是曲線 Γ 在點 M 處的一個切向量. 由此即可直接寫出過點 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切線方程式與法平面方程式. $\square$

例 7.7.2 求曲線

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

在點 $(1, -1, 2)$ 處的切線及法平面方程式.

解 這裡可直接利用公式來解, 但下面依照推導公式的方法來做. 將所給方程式的兩邊對 x 求導並整理, 得

$$\begin{cases} y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = -x, \\ -\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1. \end{cases}$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z - x}{y + z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x - y}{y + z}.$$

將點 $(1, -1, 2)$ 代入, 得

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1, -1, 2)} = \frac{2 - 1}{-1 + 2} = 1, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1, -1, 2)} = \frac{-1 - (-1)}{-1 + 2} = 0.$$

從而切向量爲

$$\mathbf{T} = (1, 1, 0),$$

故所求切線方程式爲

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{0},$$

法平面方程式爲

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 1) + 0 \cdot (z - 2) = 0,$$

即

$$x + y = 0.$$

曲面的切平面與法線

定理 7.7.3 (隱式方程曲面的切平面與法線) 設空間曲面 Σ 的方程式由隱函數 $F(x, y, z) = 0$ 給出, $M(x_0, y_0, z_0)$ 爲曲面 Σ 上的一點. 假設函數 $F(x, y, z)$ 在該點具有連續的偏導數, 且其梯度向量在點 M 處不爲零向量, 即 $\nabla F(M) = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)) \neq \mathbf{0}$, 則曲面 Σ 在點 M 處的法向量 $\mathbf{n}$ 恰好是該點的梯度向量:

$$\mathbf{n} = \nabla F(M) = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)).$$

此曲面在點 M 處的切平面方程式爲:

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

而過點 M 且垂直於切平面的法線方程式為:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)},$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 + F'_x(M)t, \\ y = y_0 + F'_y(M)t, \\ z = z_0 + F'_z(M)t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

證明 在曲面 Σ 上, 通過點 M 任引一條平滑曲線 Γ . 假定曲線 Γ 的參數方程式為 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 且當 $t = t_0$ 時對應於點 $M(x_0, y_0, z_0)$. 曲線 Γ 在點 M 處的切向量為 $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. 因為曲線 Γ 完全落在曲面 Σ 上, 所以有恆等式:

$$F(\mathbf{r}(t)) \equiv 0.$$

將此恆等式兩邊對 t 求全導數, 依多變數連鎖律, 在 $t = t_0$ 時有:

$$\left. \frac{d}{dt} F(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=t_0} = \nabla F(M) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

上式表明, 曲面上通過點 M 的任意曲線, 其在點 M 的切線都與梯度向量 $\nabla F(M)$ 垂直. 因此, 這些切線都在同一個平面上, 該平面即為切平面, 而梯度 $\nabla F(M)$ 即為曲面在該點的法向量 $\mathbf{n}$. 利用點法式即可寫出切平面方程式, 寫成對稱比例式則為法線方程式. 證畢. $\square$

系理 7.7.4 (函數曲面的切平面與法線) 設空間曲面方程式由顯函數 $z = f(x, y)$ 給出, 且 f 在點 (x_0, y_0) 處具有連續偏導數. 記曲面上的一點為 $M(x_0, y_0, z_0)$, 其中 $z_0 = f(x_0, y_0)$. 則該曲面在點 M 處的一個法向量為:

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

其切平面方程式為:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

法線方程式為:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, \\ y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, \\ z = z_0 - t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

特別地, 若指定法向量的方向是向上的 (即與 z 軸正向夾角 γ 為銳角), 則向上法向量為 $\mathbf{n}^* = (-f'_x, -f'_y, 1)$, 此時法向量的方向餘弦為:

$$\cos \alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

證明 令輔助函數 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. 則原曲面方程式可改寫為隱式方程式 $F(x, y, z) = 0$. 計算 F 的各個偏導數, 可得:

$$F'_x = f'_x(x, y), \quad F'_y = f'_y(x, y), \quad F'_z = -1.$$

因此梯度向量 $\nabla F = (f'_x, f'_y, -1)$. 將此梯度向量代入前述定理的隱式曲面切平面與法線公式中, 整理移項後即可直接得到顯式曲面情形下的對應方程式. 證畢. $\square$

例 7.7.5 求橢球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 20$ 在點 $(2, -1, 3)$ 處的切平面及法線方程式.

解 令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 20$,

$$\nabla F(x, y, z) = (F'_x, F'_y, F'_z) = (4x, 6y, 2z), \quad \nabla F(2, -1, 3) = (8, -6, 6).$$

所以在點 $(2, -1, 3)$ 處此橢球面的切平面方程式為

$$8(x - 2) - 6(y + 1) + 6(z - 3) = 0,$$

即

$$4x - 3y + 3z - 20 = 0.$$

法線方程式為

$$\frac{x - 2}{8} = \frac{y + 1}{-6} = \frac{z - 3}{6},$$

即

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z - 3}{3}.$$

例 7.7.6 求拋物面 $z = 4 - x^2 - 2y^2$ 在點 $(1, -1, 1)$ 處的切平面及法線方程式.

解 令 $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, 則法向量

$$\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, -1) = (-2x, -4y, -1) \implies \mathbf{n}|_{(1, -1, 1)} = (-2, 4, -1),$$

故在點 $(1, -1, 1)$ 處的切平面方程式為

$$-2(x - 1) + 4(y + 1) - (z - 1) = 0,$$

即

$$2x - 4y + z - 7 = 0.$$

法線方程式為

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 1}{-1}.$$

定理 7.7.7 如果一個曲面由參數式 $\mathbf{r}(u, v)$ 給出, 那麼其在參數 (u, v) 對應的點處的切平面的法向量為 $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$.

證明 考慮該曲面上的一點 P , 假設其對應的參數為 (u_0, v_0) . 可藉由固定其中一個參數來得到曲面上的兩條網格曲線. 當固定 $v = v_0$, 並且讓 u 變動時, 可以得到一條完全位於該曲面上的曲線 C_1 , 其參數式為 $\mathbf{r}(u, v_0)$. 根據向量函數的導數的意義, 曲線 C_1 在點 P 處的切向量即為函數 $\mathbf{r}$ 對參數 u 的偏導數, 將其記作 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$. 同理, 當固定 $u = u_0$, 並且讓 v 變動時, 可以得到另一條位於該曲面上的曲線 C_2 , 其參數式為 $\mathbf{r}(u_0, v)$. 該曲線 C_2 在點 P 處的切向量即為函數 $\mathbf{r}$ 對參數 v 的偏導數, 記作 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$. 因為這兩條曲線 C_1 與 C_2 皆位於此曲面上並且交於點 P , 所以它們在點 P 處的切向量 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ 與 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 都會直接落在該點的切平面上. 因此, 向量 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 垂直於此切平面上的兩個切向量. 根據定義, 垂直於切平面上所有切向量的向量即為該曲面在該點的法向量. $\square$

例 7.7.8 給定一個參數曲面 $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$, 試求該曲面在點 $P(3, 1, 2)$ 處的切平面方程式與法線方程式.

解 首先需要找出對應於點 $P(3, 1, 2)$ 的參數 (u, v) . 令曲面的參數方程式等於點 P 的座標, 可得方程組:

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u - v = 1, \\ uv = 2. \end{cases}$$

由前兩式相加可得 $2u = 4$, 即 $u = 2$. 代回第一式可得 $v = 1$. 將 $(u, v) = (2, 1)$ 代入第三式驗證, $2 \cdot 1 = 2$, 條件相符. 因此, 點 $P(3, 1, 2)$ 對應的參數為 $(u, v) = (2, 1)$.

接下來計算參數曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 對參數 u 與 v 的偏導數:

$$\mathbf{r}'_u(u, v) = (1, 1, v), \quad \mathbf{r}'_v(u, v) = (1, -1, u).$$

將 $(u, v) = (2, 1)$ 代入, 得到在點 P 處的兩個切向量:

$$\mathbf{r}'_u(2, 1) = (1, 1, 1), \quad \mathbf{r}'_v(2, 1) = (1, -1, 2).$$

根據公式, 切平面的法向量 $\mathbf{n}$ 為這兩個切向量的外積:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u(2, 1) \times \mathbf{r}'_v(2, 1) = (1, 1, 1) \times (1, -1, 2) = (3, -1, -2).$$

於是, 切平面方程式為

$$3(x - 3) - 1(y - 1) - 2(z - 2) = 0, \quad \text{即} \quad 3x - y - 2z = 4;$$

法線方程式可以利用點 P 與法向量 $\mathbf{n}$ 寫成對稱比例式:

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}.$$

* 多變數凸函數

定義 7.7.9 設實函數 f 在凸域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內有定義. 若對一切 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$ 及所有 $t \in (0, 1)$, 有

$$f((1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1) \leq (1 - t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}_1),$$

則稱 f 在 D 內是凸函數; 若上述不等式總成立嚴格不等式, 則稱 f 在 D 內是嚴格凸函數.

定理 7.7.10 設實函數 f 在凸域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內具有二階連續偏導數, 則下列敘述等價:

(1) f 在 D 內是凸函數;

(2) 對所有 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D$,

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0);$$

(3) 對所有 $\mathbf{x}_0 \in D$, f 在 $\mathbf{x}_0$ 處的海瑟矩陣 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 半正定⁵.

證明 先證 (1) $\Rightarrow$ (2). 由凸函數的定義知, 對一切 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in D$ 及所有 $t \in (0, 1)$, 有

$$f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{x}_0) \leq tf(\mathbf{x}) + (1 - t)f(\mathbf{x}_0).$$

由於 $f(\mathbf{x})$ 具有二階連續偏導數, 因此有泰勒展開:

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{x}_0) &= f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + t\nabla f(\mathbf{x}_0)^\top(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(t\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad (t\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0). \end{aligned}$$

⁵是指使得多項式 $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)$ 的根全是非正實數的矩陣 $\mathbf{A}$, 或等價地 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$.

將上式代入凸函數定義的不等式中, 得

$$f(\mathbf{x}_0) + t\nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(t\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \leq tf(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}_0) - tf(\mathbf{x}_0).$$

化簡得

$$t\nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(t\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \leq t(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)).$$

在上式兩邊同除以 t , 並注意到 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ 在 t 變化的過程中是常數, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(t\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)}{t} = 0,$$

因此令 $t \rightarrow 0^+$ 取極限可得

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

再證 (2) $\Rightarrow$ (3). 任取 $\mathbf{x}_0 \in D$ 及 $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\Delta \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 則當 t 充分小時, $\mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x} \in D$. 由泰勒公式有

$$f(\mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + t\nabla f(\mathbf{x}_0)^\top \Delta \mathbf{x} + \frac{t^2}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x} + o(t^2 \|\Delta \mathbf{x}\|^2) \quad (t\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0).$$

在 (2) 中令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x}$, 可得

$$f(\mathbf{x}_0 + t\Delta \mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (t\Delta \mathbf{x}).$$

將泰勒展開代入上式左端, 消去同項後得

$$\frac{t^2}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x} + o(t^2 \|\Delta \mathbf{x}\|^2) \geq 0,$$

兩邊同除以 t^2 , 即

$$\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x} + \frac{o(t^2 \|\Delta \mathbf{x}\|^2)}{t^2} \geq 0.$$

令 $t \rightarrow 0$, 即得

$$\Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x} \geq 0,$$

這說明 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 是半正定的.

最後證 (3) $\Rightarrow$ (1). 對所有 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, 令 $\mathbf{x}_0 = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2$ ($t \in (0, 1)$), 則 $\mathbf{x}_0 \in D$, 從而有帶拉格朗日餘項的泰勒展開式:

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0),$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$. 由 (3) 知海瑟矩陣在 D 內處處半正定, 故二次型項大於等於零, 因此有

$$f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

同理,

$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0).$$

將第一式同乘 t , 第二式同乘 $(1-t)$, 再將兩式相加得

$$tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top (t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + (1-t)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)).$$

注意到 $t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + (1-t)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, 故上式化爲

$$tf(\mathbf{x}_1) + (1-t)f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_0) = f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2).$$

這證明了 $f(\mathbf{x})$ 是凸函數. □

註記 7.7.11 條件 (2) 說明 $u = f(\mathbf{x})$ 表示的「曲面」在其任一點處的切平面的上方。

例 7.7.12 證明：若單變數凸函數 g 在區間 I 內具有二階導數，則對於任意常向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ 與常數 b ，多變數函數 $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b)$ 在對應的區域 $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b \in I\}$ 內也是凸函數。

解 令 $u = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + b = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ 。根據連鎖律， $f(\mathbf{x})$ 的一階偏導數為

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = g'(u) a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

從而 $f(\mathbf{x})$ 的二階偏導數為

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = g''(u) a_i a_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

因此， $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 處的海瑟矩陣可以寫為

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = g''(u) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} = g''(u) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top.$$

對於任意非零向量 $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ，考察對應的二次型：

$$\Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}^\top (g''(u) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top) \Delta \mathbf{x} = g''(u) (\Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{a}) (\mathbf{a}^\top \Delta \mathbf{x}) = g''(u) (\mathbf{a}^\top \Delta \mathbf{x})^2.$$

因為 $y = g(u)$ 是 I 內的凸函數且具有二階導數，所以 $g''(u) \geq 0$ 。又因為實數的平方 $(\mathbf{a}^\top \Delta \mathbf{x})^2 \geq 0$ ，故恆有

$$\Delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \geq 0.$$

這說明海瑟矩陣 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$ 是半正定矩陣。由定理 7.7.10 知， $f(\mathbf{x})$ 是 D 內的凸函數。

7.8 多變數微分學於求極值問題中的應用

函數的局部極值

定義 7.8.1 設實函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內有定義。若存在 $\mathbf{x}_0$ 的鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq D$ ，使得當 $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 時，

- 有 $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ，則稱 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得**極大值**， $\mathbf{x}_0$ 稱為 f 的**極大值點**；
- 有 $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ ，則稱 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得**極小值**， $\mathbf{x}_0$ 稱為 f 的**極小值點**；
- 有 $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ ，則稱 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得**嚴格極大值**， $\mathbf{x}_0$ 稱為 f 的**嚴格極大值點**；
- 有 $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ ，則稱 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得**嚴格極小值**， $\mathbf{x}_0$ 稱為 f 的**嚴格極小值點**。

(嚴格) 極大值與 (嚴格) 極小值統稱為 **(嚴格) 極值**，(嚴格) 極大值點及 (嚴格) 極小值點統稱為 **(嚴格) 極值點**。

定理 7.8.2 (多變數函數極值的必要條件) 設函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內有定義， $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 。若 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得局部極值，則對於任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，偏導數 $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ 或者不存在，或者必定滿足 $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$ 。特別地，若 f 在該點可微，則 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 。

證明 對於任意固定的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 探討偏導數 $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ 的情形. 若該偏導數不存在, 則定理結論中「或者不存在」的條件已自動成立.

若該偏導數 $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ 存在, 則可構造一個單變數函數

$$g(t) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

由於 $\mathbf{x}_0 \in D$ 且 D 是一個區域, 因此必定存在 $\delta > 0$, 使得當 $t \in (x_i^{(0)} - \delta, x_i^{(0)} + \delta)$ 時, 點 $(x_1^{(0)}, \dots, t, \dots, x_n^{(0)})$ 皆完全落在 D 內. 因已知 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處取得局部極值, 故這意味著限制在第 i 個座標軸方向上的單變數函數 $g(t)$ 在 $t = x_i^{(0)}$ 處同樣會取得局部極值. 又因假設 $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ 存在, 依偏導數的定義, $g(t)$ 在 $t = x_i^{(0)}$ 處可導, 且 $g'(x_i^{(0)}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$. 根據單變數函數的費馬引理, 若函數在開區間內部點取得極值且在該點可導, 則其導數必定為零. 因此, 可得

$$g'(x_i^{(0)}) = f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0.$$

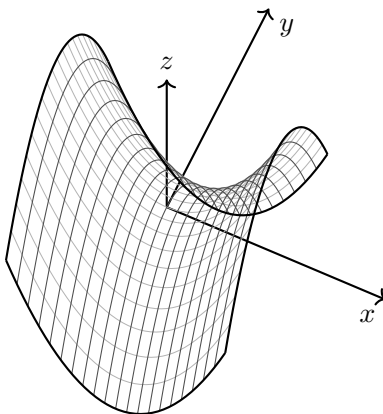
由於上述推論對所有使得偏導數存在的 i 皆成立, 故若進一步假設 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處可微, 則其所有一階偏導數皆必定存在且為零, 從而梯度向量為零向量, 即

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}_0), f'_{x_2}(\mathbf{x}_0), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}.$$

□

定義 7.8.3 如同單變數函數, 對於 n 變數實函數, 若 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 或 f 在 $\mathbf{x}_0$ 處不可導, 則稱 $\mathbf{x}_0$ 為 f 的**臨界點**.

注意 7.8.4 函數的極值點一定是臨界點, 但反之未必為真. 例如, $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 $(0, 0)$ 處不取極值 (嘗試分別觀察 xz 平面及 yz 平面與曲面 $z = x^2 - y^2$ 的交線). 可微函數的臨界點若不是極值點, 則稱為**鞍點**.



定理 7.8.5 (多變數函數極值的充分條件) 設函數 f 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 內具有二階連續偏導數, 且 $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}_0 \in D$), 再設 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處的海瑟矩陣 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 為可逆方陣, 則

- (1) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定⁶時, $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處取極小值;
- (2) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 負定⁷時, $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處取極大值;
- (3) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定⁸時, $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處不取極值.

⁶所謂對稱矩陣 $\mathbf{A}$ **正定**, 是指對所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 均有 $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$; 或等價地, 多項式 $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)$ 的根全是正實數.

⁷所謂對稱矩陣 $\mathbf{A}$ **負定**, 是指對所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 均有 $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$; 或等價地, 多項式 $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)$ 的根全是負實數.

⁸當矩陣非正定、非負定、非半正定也非半負定 (是指使得多項式 $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)$ 的根全是非正實數的矩陣 $\mathbf{A}$, 或等價地 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$) 時, 就稱為**不定矩陣**.

證明 在 $\mathbf{x}_0$ 的充分小鄰域 $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ ($\delta > 0$) 內, $f(\mathbf{x})$ 有泰勒公式

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right)^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \quad (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0). \end{aligned}$$

對所有 $\mathbf{x} \in B'_\delta(\mathbf{x}_0)$, 記單位向量 $\mathbf{u} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, 則 $\|\mathbf{u}\| = 1$. 由於 $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ 是單位球面 $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u}\| = 1\}$ 上的一個連續函數, 注意到 S 是有界閉集, 二次型 $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ 在 S 上必能取得最大值 M 和最小值 m .

(1) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定時, 對任意非零向量 $\mathbf{u} \in S$ 均有 $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} > 0$, 因此其最小值 $m > 0$, 從而存在 $0 < \delta_1 < \delta$, 使得當 $\mathbf{x} \in B'_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$ 時, 有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \\ &\geq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \\ &> f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 > f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

這就證明了 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處取極小值.

(2) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 負定時, 有最大值 $M < 0$. 因此, 存在 $0 < \delta_2 < \delta$, 當 $\mathbf{x} \in B'_{\delta_2}(\mathbf{x}_0)$ 時, 有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \\ &\leq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} M \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \\ &< f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} M \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 < f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

這就證明了 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處取極大值.

(3) 當 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定時, 必有 $m < 0$ 且 $M > 0$. 任取單位向量 $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_1 = m$. 則對於充分小的 $t > 0$, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}_1$, 有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}_1) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} m t^2 + o(t^2) \\ &\leq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} m t^2 < f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

再取單位向量 $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\mathbf{u}_2^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_2 = M$. 則對於充分小的 $t > 0$, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}_2$, 有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}_2) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} M t^2 + o(t^2) \\ &\geq f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{4} M t^2 > f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

這說明在 $\mathbf{x}_0$ 的任意鄰域內, 函數值既有大於 $f(\mathbf{x}_0)$ 的點, 也有小於 $f(\mathbf{x}_0)$ 的點, 故 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 處不取極值. $\square$

系理 7.8.6 設函數 f 在區域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 內具有二階連續偏導數, $(x_0, y_0) \in D$, 再設 $f'(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, 且記海瑟矩陣為

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0)} =: \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

則

(1) 當 $A > 0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$ 時, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 處取極小值;

(2) 當 $A < 0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$ 時, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 處取極大值;

(3) 當 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 < 0$ 時, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 處不取極值 (鞍點).

注意 7.8.7 系理 7.8.6 中, 如果 $AC - B^2 = 0$, 那麼得不出任何結論.

例 7.8.8 求函數 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 12y + 5$ 的極值.

解 先解方程組

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - 6x = 0, \\ f'_y(x, y) = 3y^2 - 12 = 0, \end{cases}$$

解得 $x = 0, 2$ 以及 $y = 2, -2$, 故求得臨界點為 $(0, 2), (0, -2), (2, 2), (2, -2)$.

再求出二階偏導數

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 6, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = 6y.$$

記 $A = f''_{xx}, B = f''_{xy}, C = f''_{yy}$.

在點 $(0, 2)$ 處, 因為 $A = -6, C = 12, AC - B^2 = (-6) \cdot 12 < 0$, 所以 $f(0, 2)$ 不是極值;

在點 $(0, -2)$ 處, 因為 $A = -6, C = -12, AC - B^2 = (-6) \cdot (-12) > 0$, 又 $A < 0$, 所以函數在 $(0, -2)$ 處有極大值 $f(0, -2) = 21$;

在點 $(2, 2)$ 處, 因為 $A = 6, C = 12, AC - B^2 = 6 \cdot 12 > 0$, 又 $A > 0$, 所以函數在 $(2, 2)$ 處有極小值 $f(2, 2) = -15$;

在點 $(2, -2)$ 處, 因為 $A = 6, C = -12, AC - B^2 = 6 \cdot (-12) < 0$, 所以 $f(2, -2)$ 不是極值.

例 7.8.9 求函數 $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$ 的極值.

解 首先求函數的臨界點. 解聯立方程式

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 4x^3 - 2x + 2y = 0, \\ f'_y(x, y) = 4y^3 + 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

將兩式相加, 得 $4(x^3 + y^3) = 0$, 因為 x, y 為實數, 故有 $y = -x$. 將其代回第一式, 得

$$4x^3 - 2x + 2(-x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0,$$

解得 $x = 0, 1, -1$. 因此, 注意到 $y = -x$, 求得臨界點為 $(0, 0), (1, -1), (-1, 1)$ 共三個.

接著求出二階偏導數:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 2.$$

記 $A = f''_{xx}, B = f''_{xy}, C = f''_{yy}$. 分別在各個臨界點進行判別:

在點 $(1, -1)$ 與 $(-1, 1)$ 處,

$$A = 12(1)^2 - 2 = 10, \quad B = 2, \quad C = 12(\pm 1)^2 - 2 = 10.$$

因爲 $AC - B^2 = 10 \cdot 10 - 2^2 = 96 > 0$, 且 $A = 10 > 0$, 所以函數在 $(1, -1)$ 與 $(-1, 1)$ 處均有極小值, 且極小值皆爲

$$f(1, -1) = f(-1, 1) = 1 + 1 - 1 - 2 - 1 = -2.$$

在點 $(0, 0)$ 處,

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = -2.$$

此時 $AC - B^2 = (-2)(-2) - 2^2 = 0$, 海瑟矩陣的行列式爲 0, 無法直接利用充分條件來判定 $(0, 0)$ 是否爲極值點.

爲此, 回到極值的定義, 觀察函數在原點 $(0, 0)$ 附近的函數值變化 (已知 $f(0, 0) = 0$). 若沿著直線 $y = x$ 趨近於原點, 函數值爲

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - x^2 + 2x^2 - x^2 = 2x^4 > 0 \quad (x \neq 0);$$

若沿著 x 軸 (即直線 $y = 0$) 趨近於原點, 函數值爲

$$f(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0 \quad (0 < |x| < 1).$$

由此可見, 在原點 $(0, 0)$ 的任意充分小鄰域內, 函數值既有大於 $f(0, 0) = 0$ 的點, 也有小於 $f(0, 0) = 0$ 的點. 這說明了 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 處既不取極大值也不取極小值 (爲一鞍點).

綜上所述, 函數僅在 $(1, -1)$ 與 $(-1, 1)$ 處取得極小值 -2 .

例 7.8.10 (最小二乘法) 設 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) 爲 $\mathbb{R}^2$ 內 N 個兩兩不同的點, 且它們不同在 xy 平面內的一條垂直於 x 軸的直線上. 證明: 存在唯一直線 $L_0: y = ax + b$, 使得函數 $f(u, v) = \sum_{i=1}^N (ux_i + v - y_i)^2$ 在 (a, b) 處達到最小.

證明 顯然 $f(u, v) = \sum_{i=1}^N (ux_i + v - y_i)^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中處處可微. 由

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 2 \sum_{i=1}^N x_i (ux_i + v - y_i) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial v} = 2 \sum_{i=1}^N (ux_i + v - y_i) = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} u \sum_{i=1}^N x_i^2 + v \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ u \sum_{i=1}^N x_i + Nv = \sum_{i=1}^N y_i. \end{cases}$$

由此求出上述方程組的解爲

$$\begin{aligned} u &= \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} =: a, \\ v &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} =: b. \end{aligned}$$

由於該問題中的最小值總是存在的, 且 $f(u, v)$ 只有唯一的駐點 (a, b) , 因此 (a, b) 必為 $f(u, v)$ 的最小值點.

在上述例子中, 已知平面 $\mathbb{R}^2$ 內 N 個不落在一條垂直於 x 軸的直線上的點, 求滿足定理條件的唯一直線 $y = ax + b$ 的方法稱為**最小二乘法**. $\square$

例 7.8.11 某廠要用鐵板做成一個體積為 4 立方公尺的無蓋長方體水箱. 問當長、寬和高各取怎樣的尺寸時, 才能使用料最省.

解 設水箱的長為 x 公尺, 寬為 y 公尺, 則其高應為 $z = (4/xy)$ 公尺. 由於水箱是無蓋的, 其表面積由一個底面和四個側面組成. 此水箱所用材料的面積為 $A = xy + 2xz + 2yz$, 將 z 代入即得

$$A = xy + 2x \left(\frac{4}{xy} \right) + 2y \left(\frac{4}{xy} \right) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x} \quad (x > 0, y > 0).$$

可見材料面積 $A = A(x, y)$ 是 x 和 y 的雙變數函數, 這就是目標函數, 下面求使這函數取得最小值的點 (x, y) .

令偏導數為零, 解方程組:

$$\begin{cases} A'_x = y - \frac{8}{x^2} = 0, \\ A'_y = x - \frac{8}{y^2} = 0. \end{cases}$$

由第一式得 $x^2 y = 8$, 由第二式得 $xy^2 = 8$. 兩式相減得 $xy(x - y) = 0$. 因為 $x > 0, y > 0$, 故必有 $x = y$. 代回原式可得 $x^3 = 8$, 解得

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1.$$

根據題意可以知道, 水箱所用材料面積的最小值一定存在, 並在區域 $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 內取得. 又函數在 D 內只有唯一的臨界點 $(2, 2)$, 因此可斷定當 $x = 2, y = 2$ 時, A 取得最小值. 就是說, 當水箱的長為 2 公尺、寬為 2 公尺、高為 1 公尺時, 水箱所用的材料最省.

函數在有界閉域上的最值

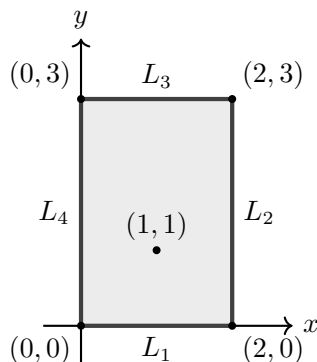
依定理 6.5.13, 實函數 f 在有界閉集上必存在最值.

註記 7.8.12 欲求 f 在有界閉集 D 上的最值, 可採以下步驟進行:

- (1) 求出 D 的開核 $\mathring{D}$ 中的所有臨界點, 並計算各臨界點的函數值;
- (2) 求 f 在 D 的邊界 ∂D 上的極值;
- (3) 比較前兩個步驟中得到的所有函數值, 最大者即為 f 的最大值, 最小者即為 f 的最小值.

例 7.8.13 求函數 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ 在矩形閉域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$ 上的最大值與最小值.

解 由於 f 是多項式, 它在有界閉集 D 上連續, 因此必定存在絕對極大值與絕對極小值.



首先, 求出 D 內部的臨界點. 解方程組

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - y - 1 = 0, \\ f'_y(x, y) = -x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

得 $x = 1, y = 1$. 唯一的臨界點 $(1, 1)$ 落在 D 開核內, 函數在該點的值得

$$f(1, 1) = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -1.$$

接著, 檢查 f 在 D 的四條邊界線段 L_1, L_2, L_3, L_4 上的值: 在 L_1 上, $y = 0$ 且 $0 \leq x \leq 2$, 函數化為

$$f(x, 0) = x^2 - x.$$

這是一個關於 x 的開口向上的拋物線, 其最小值發生在頂點 $x = \frac{1}{2}$ 處, $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$; 最大值發生在端點 $x = 2$ 處, $f(2, 0) = 2$. (另一個端點 $f(0, 0) = 0$).

在 L_2 上, $x = 2$ 且 $0 \leq y \leq 3$, 函數化為

$$f(2, y) = 4 - 2y + y^2 - 2 - y = y^2 - 3y + 2.$$

最小值發生在頂點 $y = \frac{3}{2}$ 處, $f(2, \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$; 最大值發生在端點 $y = 3$ 處, $f(2, 3) = 9 - 9 + 2 = 2$. (另一個端點 $f(2, 0) = 2$).

在 L_3 上, $y = 3$ 且 $0 \leq x \leq 2$, 函數化為

$$f(x, 3) = x^2 - 3x + 9 - x - 3 = x^2 - 4x + 6.$$

最小值發生在端點 $x = 2$ 處, $f(2, 3) = 2$; 最大值發生在另一端點 $x = 0$ 處, $f(0, 3) = 6$. (頂點 $x = 2$ 剛好是端點).

在 L_4 上, $x = 0$ 且 $0 \leq y \leq 3$, 函數化為

$$f(0, y) = y^2 - y.$$

最小值發生在頂點 $y = \frac{1}{2}$ 處, $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; 最大值發生在端點 $y = 3$ 處, $f(0, 3) = 6$.

最後, 將開核中臨界點的值與邊界上的極值進行比較. 所有的候選值為 $-1, -\frac{1}{4}, 0, 2, 6$. 因此, f 在 D 上的最大值為 $f(0, 3) = 6$, 最小值為內部臨界點處的 $f(1, 1) = -1$.

例 7.8.14 求函數 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ 在閉半圓盤 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值與最小值.

解 首先求 D 開核中的臨界點. 解方程組

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x - 2 = 0, \\ f'_y(x, y) = 2y - 2 = 0, \end{cases}$$

解得唯一的臨界點 $(1, 1)$. 由於 $1^2 + 1^2 = 2 \leq 4$ 且 $1 \geq 0$, 該點在區域 D 的內部. 計算函數值:

$$f(1, 1) = 1 + 1 - 2 - 2 = -2.$$

接著檢查邊界. 區域 D 的邊界由一條直線段 L_1 與一段圓弧 L_2 組成. 在直線段 L_1 上, $y = 0$ 且 $-2 \leq x \leq 2$, 函數化為單變數函數:

$$g(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x.$$

求導得 $g'(x) = 2x - 2 = 0$, 臨界點為 $x = 1$. 比較該線段上的臨界點與端點值:

$$f(1, 0) = -1, \quad f(2, 0) = 0, \quad f(-2, 0) = 8.$$

在圓弧 L_2 上, $x^2 + y^2 = 4$ 且 $y \geq 0$. 將 $x^2 + y^2 = 4$ 代入原函數中, 得到

$$f(x, y) = 4 - 2x - 2y.$$

爲了找出該圓弧上的極值, 可以使用參數化: 令 $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, 其中 $0 \leq t \leq \pi$. 函數化爲 t 的函數:

$$h(t) = 4 - 4 \cos t - 4 \sin t = 4 - 4\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

當 $t \in [0, \pi]$ 時, $t + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. 正弦函數在 $t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (即 $t = \frac{\pi}{4}$) 時取得最大值 1, 此時 $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 函數值爲

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2} \approx -1.657.$$

正弦函數在 $t + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (即 $t = \pi$) 時取得最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 此時 $(x, y) = (-2, 0)$, 函數值爲

$$f(-2, 0) = 4 - 4(-1) - 0 = 8.$$

(另一個端點 $t = 0$ 對應 $(2, 0)$, 函數值爲 0).

比較上述得到的所有函數值: 內點 $f(1, 1) = -2$, 界點 $f(1, 0) = -1, f(2, 0) = 0, f(-2, 0) = 8, f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2}$. 由此可知, 最大值爲 $f(-2, 0) = 8$, 最小值爲 $f(1, 1) = -2$.

例 7.8.15 求函數 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z$ 在實心球體 $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$ 上的最值.

解 首先求區域 D 開核內的臨界點, 計算偏導數並令其爲零:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 2x - 2 = 0, \\ f'_y(x, y, z) = 2y + 4 = 0, \\ f'_z(x, y, z) = 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

解得唯一的臨界點爲 $(1, -2, 3)$. 檢查該點是否在 D 的開核內:

$$1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14 < 16,$$

故該點確實在 D 的開核內. 函數在該臨界點的值爲:

$$f(1, -2, 3) = 1 + 4 + 9 - 2 - 8 - 18 = -14.$$

接著考慮邊界 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$. 在此球面上, 由於 $x^2 + y^2 + z^2$ 爲常數, 函數可化簡爲:

$$f(x, y, z) = 16 - 2x + 4y - 6z.$$

爲了求出函數在球面上的最值, 可利用柯西-施瓦茨不等式. 對於向量 $\mathbf{u} = (-2, 4, -6)$ 與 $\mathbf{v} = (x, y, z)$, 恆有:

$$(-2x + 4y - 6z)^2 \leq ((-2)^2 + 4^2 + (-6)^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

將邊界條件 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 代入, 得:

$$(-2x + 4y - 6z)^2 \leq (4 + 16 + 36) \cdot 16 = 896.$$

兩邊開平方後得到：

$$-\sqrt{896} \leq -2x + 4y - 6z \leq \sqrt{896},$$

即 $-8\sqrt{14} \leq -2x + 4y - 6z \leq 8\sqrt{14}$. 因此, 在邊界 S 上, 函數值的範圍被嚴格限制在:

$$16 - 8\sqrt{14} \leq f(x, y, z) \leq 16 + 8\sqrt{14}.$$

(註: 當 (x, y, z) 與 $(-2, 4, -6)$ 同向或反向, 且長度滿足落在球面上時, 等號成立, 故邊界上的最大值與最小值確實能被取到).

最後, 比較開核內的臨界點函數值與邊界上的最值候選點. 由於 $16 - 8\sqrt{14} = 16 - \sqrt{896}$, 且 $30^2 = 900$, 故 $\sqrt{896} \approx 29.93$, 從而邊界最小值約為 $16 - 29.93 = -13.93$. 因為 $-14 < 16 - 8\sqrt{14} < 16 + 8\sqrt{14}$, 所以函數 f 在實心球體 D 上的最大值為 $16 + 8\sqrt{14}$, 最小值為 -14 .

條件極值——拉格朗日乘子法

下述定理的證明極為複雜, 沒興趣的讀者可以跳過, 只需要懂得應用即可.

定理 7.8.16 設 n 變數函數 f 與 m 維向量函數 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ($m < n$) 內具有各個連續偏導數, 再設 $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 為 $f(\mathbf{x})$ 在約束條件

$$\begin{cases} \phi_1(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ \phi_m(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

下的極值點, 並且雅可比矩陣 $\phi'(\mathbf{x}_0)$ 的秩為 m , 則存在常數 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, 使得在 $\mathbf{x}_0$ 處成立下述等式:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \phi_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \phi_j(\mathbf{x}_0) = 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

證明 由於 $\phi'(\mathbf{x}_0)$ 的秩為 m , 不妨設行列式

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)}{\partial(x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n)} \Big|_{\mathbf{x}_0} \neq 0.$$

因此, 在 $\mathbf{x}_0$ 的某個鄰域內唯一確定一組具有各個連續偏導數的隱函數

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ x_{n-m+2} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ \vdots \\ x_n = g_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \end{cases}$$

滿足 $x_j^{(0)} = g_{j-(n-m)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-m}^{(0)})$ ($j = n-m+1, n-m+2, \dots, n$) 及對 $k = 1, 2, \dots, m$, 有

$$\phi_k(x_1, \dots, x_{n-m}, g_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})) \equiv 0.$$

將隱函數組代入 $f(\mathbf{x})$, 得

$$f(x_1, \dots, x_{n-m}, g_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})).$$

因此, $\mathbf{x}_0$ 是條件極值點轉化為 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-m}^{(0)})$ 為上述函數的通常極值點。

令 $\mathbf{x}'_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-m}^{(0)})$, 則對 $i = 1, 2, \dots, n-m$, 有

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial g_1(\mathbf{x}'_0)}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial g_m(\mathbf{x}'_0)}{\partial x_i} = 0.$$

令 $\mathbf{g}(\mathbf{x}') = (g_1(\mathbf{x}'), g_2(\mathbf{x}'), \dots, g_m(\mathbf{x}'))^\top$, 其中 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$. 將上述 $n-m$ 個等式寫成向量形式, 有

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \mathbf{g}'(\mathbf{x}'_0) = \mathbf{0}.$$

由於

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}'_0) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \end{pmatrix} =: -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

注意到

$$- \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \mathbf{A}^{-1}$$

是一個 m 維行向量, 可以將其記為

$$- \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) \mathbf{A}^{-1} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

將這兩式代入前面的向量方程得

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \right) + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

另外, 可以將定義 λ 的式子改寫成下述形式 (等號兩邊同乘 $\mathbf{A}$)

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+2}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right) + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial \phi_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

最後將上述這兩個向量方程寫成分量形式的方程, 再加上約束條件, 即得定理所求之等式. $\square$

註記 7.8.17 若構造函數 $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_j(\mathbf{x})$, 則上述條件極值的必要條件形式上化為 F 的通常極值的必要條件:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial F(\mathbf{x}_0)}{\partial \lambda_j} = 0 & (j = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

上述求條件極值點的必要條件的方法稱為**拉格朗日乘子法**。

由於在拉格朗日乘子法中，條件極值問題轉化為 $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_j(\mathbf{x})$ 的通常極值問題，而當 $\mathbf{x}_0$ 是臨界點時， λ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 是 m 個常數，因此可利用 F 在 $\mathbf{x}_0$ 處的海瑟矩陣 $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}_0)$ 來判定 $\mathbf{x}_0$ 是否為極值點。可以證明：當 $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}_0)$ 正定時，條件極值點為極小值點；當 $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}_0)$ 負定時，條件極值點為極大值點。

例 7.8.18 某工廠要用面積為 48 平方公尺的紙板做成一個無蓋的長方體紙箱。求此紙箱的最大體積。

解 設無蓋長方體紙箱的長、寬、高分別為 x, y, z (單位為公尺)，則要最大化的目標函數為體積

$$V(x, y, z) = xyz,$$

同時滿足表面積的約束條件

$$g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz = 48.$$

(依據題意，變數需滿足 $x > 0, y > 0, z > 0$)。

使用拉格朗日乘子法。構造輔助函數 $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 48)$ ，求其各個偏導數並令其為零，得到方程組：

$$\begin{cases} F'_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0, \\ F'_y = xz + \lambda(x + 2z) = 0, \\ F'_z = xy + \lambda(2x + 2y) = 0, \\ F'_\lambda = xy + 2xz + 2yz - 48 = 0. \end{cases}$$

將前三個等式分別同乘以 x, y, z ，可以得到：

$$\begin{cases} xyz = -\lambda(xy + 2xz), \\ xyz = -\lambda(xy + 2yz), \\ xyz = -\lambda(2xz + 2yz). \end{cases}$$

因為要求的是最大體積，顯然 x, y, z 皆不為零，故 $xyz \neq 0$ ，從而推知 $\lambda \neq 0$ 。比較上述三式的右端可得：

$$-\lambda(xy + 2xz) = -\lambda(xy + 2yz) = -\lambda(2xz + 2yz).$$

約去非零常數 $-\lambda$ 後，比較第一式與第二式得 $2xz = 2yz$ ，由於 $z > 0$ ，故 $x = y$ 。接著比較第二式與第三式得 $xy = 2xz$ ，由於 $x > 0$ ，故 $y = 2z$ 。因此，得到關係式 $x = y = 2z$ 。

將 $x = 2z, y = 2z$ 代入第四個約束條件方程式：

$$(2z)(2z) + 2(2z)z + 2(2z)z = 48,$$

即 $4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12z^2 = 48$ ，解得 $z^2 = 4$ 。由於 $z > 0$ ，故取 $z = 2$ 。從而求得 $x = 4, y = 4$ 。

由此求出該條件極值問題唯一的臨界點為 $(4, 4, 2)$ 。根據問題的實際物理幾何意義，紙箱的最大體積一定存在，因此在該唯一的臨界點處必定取得最大值 (即最值)。此時紙箱的最大體積為

$$V = 4 \times 4 \times 2 = 32 \text{ (立方公尺)}.$$

例 7.8.19 在條件 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$ 下，求函數 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 的最值。

解 記約束條件的曲線為 $C: \phi(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2 = 0$ 。該方程式可配方變形為 $5\left(x - \frac{3}{5}y\right)^2 + \frac{16}{5}y^2 = 2$ ，由此可見 C 是有界閉集。由於 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 是連續函數，故其在有界閉集 C 上的最值必定存在。另外，計算 ϕ 的偏導數得 $\phi'_x(x, y) = 10x - 6y$ ， $\phi'_y(x, y) = -6x + 10y$ 。若 $\phi'_x = \phi'_y = 0$ ，則僅有 $(x, y) = (0, 0)$ ，但此點並不滿足條件式 $\phi(0, 0) = -2 \neq 0$ 。因此關係式 $\phi(x, y) = 0$ 沒有奇異點。

爲求最值, 採用拉格朗日乘子法. 構造輔助函數

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2),$$

令其各個偏導數爲零, 得到方程組:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(10x - 6y) = 0, & (7.11) \\ F'_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda(-6x + 10y) = 0, & (7.12) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = -(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2) = 0. & (7.13) \end{cases}$$

將等式 (7.11) 與 (7.12) 改寫爲矩陣形式, 有

$$\begin{pmatrix} 1 - 5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1 - 5\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

爲求得使 $f(x, y)$ 達到最值的臨界點, 該點必須同時滿足上述條件. 由於 $(x, y) = (0, 0)$ 不滿足等式 (7.13), 這意味著欲使方程組成立, 線性方程組 (7.14) 必須擁有非零解. 因此, 其係數矩陣的行列式必須爲零:

$$\begin{vmatrix} 1 - 5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1 - 5\lambda \end{vmatrix} = (1 - 5\lambda)^2 - (3\lambda)^2 = (1 - 8\lambda)(1 - 2\lambda) = 0,$$

解得 $\lambda = 1/8$ 或 $\lambda = 1/2$.

(i) 當 $\lambda = 1/8$ 時, 代入等式 (7.14) 得

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此得 $y = -x$. 將其代入等式 (7.13) 中求解, 得 $5x^2 - 6x(-x) + 5(-x)^2 = 16x^2 = 2$, 即 $x = \pm\sqrt{2}/4$. 從而求得臨界點爲 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 與 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

(ii) 當 $\lambda = 1/2$ 時, 代入等式 (7.14) 得

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此得 $y = x$. 將其代入等式 (7.13) 中求解, 得 $5x^2 - 6x(x) + 5x^2 = 4x^2 = 2$, 即 $x = \pm\sqrt{2}/2$. 從而求得臨界點爲 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 與 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

最後, 計算這四個臨界點處的函數值:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

綜合上述結果, 可知在條件 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$ 下, 函數 f 的最大值爲 1, 最小值爲 $1/4$.

例 7.8.20 已知一長方體的表面積為 54, 求其體積的最大值.

解 設長方體的長、寬、高分別為 x, y, z (其中 $x > 0, y > 0, z > 0$). 欲求目標函數 (體積)

$$V(x, y, z) = xyz$$

在約束條件 (表面積)

$$g(x, y, z) = 2(xy + yz + zx) = 54 \implies xy + yz + zx = 27$$

下的最大值.

方法一——拉格朗日乘子法: 構造輔助函數 $F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + yz + zx - 27)$, 令其各個偏導數為零:

$$\begin{cases} F'_x = yz - \lambda(y + z) = 0, \\ F'_y = xz - \lambda(x + z) = 0, \\ F'_z = xy - \lambda(x + y) = 0, \\ F'_\lambda = -(xy + yz + zx - 27) = 0. \end{cases}$$

由於 x, y, z 皆大於零, 由前三個方程式移項並相除可得:

$$\lambda = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y}.$$

從 $yz/(y+z) = xz/(x+z)$ 可推得 $yz(x+z) = xz(y+z)$, 展開並消去同項後得 $z^2(y-x) = 0$. 因為 $z > 0$, 必有 $x = y$. 同理可比較後兩式得 $y = z$. 因此, 唯一的臨界點滿足 $x = y = z$. 將其代入約束條件 $xy + yz + zx = 27$ 中, 得到 $3x^2 = 27$, 解得 $x = 3$ (負值不合). 根據幾何意義, 此時體積取得最值, 其最大值為

$$V = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

方法二——利用對稱性與算術-幾何平均數不等式: 由於目標函數與約束條件對變數 x, y, z 具有完全的對稱性, 可以直接利用算術-幾何平均數不等式來快速求解:

$$27 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} = 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3V^{2/3}.$$

兩邊同除以 3 並取三次方, 可得

$$9 \geq V^{2/3} \implies 729 \geq V^2 \implies V \leq 27.$$

等號成立的條件為 $xy = yz = zx$, 由於變數皆為正數, 這意味著 $x = y = z = 3$.

例 7.8.21 求函數 $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ 在約束條件 $x + y - z = 0$ 與 $x^2 + 2z^2 = 6$ 下的最值.

解 設定目標函數為 $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$, 並將兩個約束條件記為 $g(x, y, z) = x + y - z = 0$ 與 $h(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 6 = 0$.

使用拉格朗日乘子法, 構造輔助函數:

$$F(x, y, z, \mu, \lambda) = 3x - y - 3z - \mu(x + y - z) - \lambda(x^2 + 2z^2 - 6).$$

令其各個偏導數為零, 得到下列方程組:

$$\begin{cases} F'_x = 3 - \mu - 2\lambda x = 0, & (7.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y = -1 - \mu = 0, & (7.16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_z = -3 + \mu - 4\lambda z = 0, & (7.17) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_\mu = -(x + y - z) = 0, & (7.18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_\lambda = -(x^2 + 2z^2 - 6) = 0. & (7.19) \end{cases}$$

由方程式 (7.16) 可極快地解出

$$\mu = -1. \quad (7.20)$$

將 (7.20) 的結果代入方程式 (7.15) 與 (7.17) 中, 可得

$$\begin{aligned} 3 - (-1) - 2\lambda x &= 0 \implies 2\lambda x = 4 \implies \lambda x = 2, \\ -3 + (-1) - 4\lambda z &= 0 \implies 4\lambda z = -4 \implies \lambda z = -1. \end{aligned}$$

顯然 $\lambda \neq 0$ (否則會導致 $4 = 0$ 的矛盾). 故由上式可將 x 與 z 用 λ 表示出來:

$$x = \frac{2}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}. \quad (7.21)$$

接著, 將 (7.21) 代入第二個約束條件 (7.19) 中, 得到:

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 6 \implies \frac{4}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = 6 \implies \frac{6}{\lambda^2} = 6.$$

由此可解得 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

(i) 當 $\lambda = 1$ 時: 由 (7.21) 可得 $x = 2, z = -1$. 將其代入第一個約束條件 (7.18) 得 $2 + y - (-1) = 0$, 解得 $y = -3$. 此時得到臨界點 $(2, -3, -1)$, 對應的函數值為

$$f(2, -3, -1) = 3(2) - (-3) - 3(-1) = 12.$$

(ii) 當 $\lambda = -1$ 時: 由 (7.21) 可得 $x = -2, z = 1$. 將其代入第一個約束條件 (7.18) 得 $-2 + y - 1 = 0$, 解得 $y = 3$. 此時得到臨界點 $(-2, 3, 1)$, 對應的函數值為

$$f(-2, 3, 1) = 3(-2) - 3 - 3(1) = -12.$$

由於給定的兩個約束條件 (一個平面與一個橢圓柱面) 的交線是一條有界的閉曲線 (空間中的橢圓), 連續函數 f 在此閉曲線上必定存在最值. 比較上述兩個臨界點的函數值, 可知函數 f 的最大值為 12, 最小值為 -12.

例 7.8.22 設 n 個正數之乘積為 c ($c > 0$), 試求它們之和的最小值, 並證明對任何正數 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 有

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

解 在開區域 $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ 上定義 n 變數函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$. 依題意, 欲求 f 在約束條件 $\prod_{i=1}^n x_i = c$ 下的最小值.

使用拉格朗日乘子法, 作輔助函數

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i - \lambda \left(\prod_{i=1}^n x_i - c \right).$$

求 F 的各個偏導數, 並令其為零, 得方程組:

$$\begin{cases} 1 - \lambda x_2 x_3 \dots x_n = 0, \\ 1 - \lambda x_1 x_3 \dots x_n = 0, \\ \vdots \\ 1 - \lambda x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 0, \\ \prod_{i=1}^n x_i = c. \end{cases}$$

爲了解, 將前 n 個方程式分別同乘 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 由於 $\prod_{i=1}^n x_i = c$, 可得:

$$\begin{cases} x_1 - \lambda c = 0 \implies x_1 = \lambda c, \\ x_2 - \lambda c = 0 \implies x_2 = \lambda c, \\ \vdots \\ x_n - \lambda c = 0 \implies x_n = \lambda c. \end{cases}$$

這意味著 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. 將其代入最後一個約束條件中, 得到 $x_1^n = c$. 由於要求 $x_1 > 0$, 故解出唯一的臨界點爲

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt[n]{c}.$$

根據實際問題的意義, 當某些變數趨向無窮大時, 它們的總和將趨向無窮大; 而當某些變數趨近於 0^+ 時 (爲了保持乘積爲常數 c), 必然有其他變數趨向無窮大, 此時總和亦趨向無窮大. 因此, 連續函數 f 在該約束條件下必然存在最小值 (即最值), 且該最小值必在唯一的臨界點處取得. 在此臨界點處, 函數的最小值爲

$$f(\sqrt[n]{c}, \sqrt[n]{c}, \dots, \sqrt[n]{c}) = \sum_{i=1}^n \sqrt[n]{c} = n \sqrt[n]{c}.$$

現對任意 n 個正數 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 令 $c = \prod_{i=1}^n a_i$, 並利用上述結論. 因爲對於所有滿足 $\prod_{i=1}^n x_i = c$ 的正數組 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其總和的最小值爲 $n \sqrt[n]{c}$, 所以對於特例 $x_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 必然滿足

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{c} = n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

將不等式兩邊同除以 n , 即得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

單元 8

重積分

本單元著重於介紹重積分的觀念及操作，並且預設讀者對於單變數的定積分已經熟能生巧，故每逢定積分將會略去具體過程，直接給出結果。各種積分的具體計算技巧，可參考 [9, 單元 4]。

8.1 重積分的概念與基本性質

定義 8.1.1 對於 n 維閉區間 $K = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ (其中一維閉區間為 $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$)，分別取各個 I_k 的分割

$$\Delta_k : a_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < x_k^{(2)} < \cdots < x_k^{(m_k-1)} < x_k^{(m_k)} = b_k,$$

這將 K 分割成許多小區間

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n} = [x_1^{(i_1-1)}, x_1^{(i_1)}] \times [x_2^{(i_2-1)}, x_2^{(i_2)}] \times \cdots \times [x_n^{(i_n-1)}, x_n^{(i_n)}] \quad (i_k = 1, 2, \dots, m_k).$$

這種對 K 的分割方式記為 $\Delta = \{K_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ ，稱為 K 的**分割**。進一步地，令

$$|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta_k| = \max\{x_k^{(i_k)} - x_k^{(i_k-1)} : k = 1, 2, \dots, n; i_k = 1, 2, \dots, m_k\}$$

稱為分割 Δ 的**直徑**。另外，記這些小區間的**容度**為

$$|K_{i_1 i_2 \dots i_n}| = (x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)})(x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}) \cdots (x_n^{(i_n)} - x_n^{(i_n-1)}).$$

若從每個小區間 $K_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 中任意選取一點 $\xi_{i_1 i_2 \dots i_n} = (\xi_1^{(i_1)}, \xi_2^{(i_2)}, \dots, \xi_n^{(i_n)}) \in K_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 作為**樣本點**，則對於定義在區間 K 上有界的 n 變數函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，構造如下的和式：

$$S(f; \Delta, \{\xi_{i_1 i_2 \dots i_n}\}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} f(\xi_{i_1 i_2 \dots i_n}) |K_{i_1 i_2 \dots i_n}|.$$

此和式稱為函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 關於分割 Δ 與樣本點 $\{\xi_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ 的**黎曼和**。(其中，求和符號代表對所有小區間的索引 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 進行多重求和)。

定義 8.1.2 設 n 變數函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在區間 K 上有界。若存在一個實數 α ，使得對於 K 的任意分割 Δ 與任意樣本點 $\{\xi_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$ 的選取，當分割的直徑 $|\Delta| \rightarrow 0$ 時，黎曼和皆趨近於 α ，即

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f; \Delta, \{\xi_{i_1 i_2 \dots i_n}\}) = \alpha$$

成立, 則稱函數 f 在區間 K 上是可積的. 此時, 稱實數 α 為 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在區間 K 上的 n 重積分 (或黎曼積分), 記作

$$\alpha = \int \cdots \int_K f(x_1, x_2, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int \cdots \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

註記 8.1.3 • 當 $n = 2$ 且 $f \geq 0$ 時, 二重積分的幾何意義為以曲面 $z = f(x, y)$ 為頂的曲頂柱體的體積.

- 一重積分 (即 $n = 1$ 時的重積分) 與定積分有些差異. 一重積分的積分範圍是一個區間, 嚴格來說更像是一個「幾何集合」; 而定積分的積分範圍雖然也是一個區間, 但實際上更像是一條「有向路徑」. 它們相差在「方向」的概念.
- 當 $n = 1$ 時, 容度即為長度; 當 $n = 2$ 時, 容度即為面積; 當 $n = 3$ 時, 容度即為體積; 4 維以上的容度也稱為超體積.

不難觀察出重積分有如下性質:

命題 8.1.4 設 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一 n 維閉區間, f 與 g 在 D 上皆為可積函數. 若區間 K 可分解為兩個子區間 K_1 與 K_2 的聯集 (即 $K = K_1 \cup K_2$), 且 K_1 與 K_2 互不重疊 (即它們的開核交集為空集; 允許邊界有交集), 則

$$\int \cdots \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{K_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int \cdots \int_{K_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

此性質可推廣至有限多個 K_i .

為了在一般的有界閉域上定義函數的 n 重積分, 需要指示函數配合 n 維區間上的 n 重積分來給出定義. 回顧一下指示函數的定義:

定義 8.1.5 設 E 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一個子集. 定義 E 的指示函數 (或稱特徵函數) χ_E 為:

$$\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$$

定義 8.1.6 設 D 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一個一般有界閉域, f 為定義在 D 上的 n 變數函數. 由於 D 是有界的, 必然存在一個 n 維區間 K , 使得 $D \subseteq K$.

利用 D 的指示函數 χ_D , 我們在區間 K 上構造一個輔助函數 $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in K \setminus D. \end{cases}$$

若輔助函數 $\tilde{f}$ 在區間 K 上是可積的, 則稱函數 f 在一般有界閉域 D 上是可積的, 並且定義 f 在 D 上的 n 重積分為 $\tilde{f}$ 在區間 K 上的 n 重積分, 即:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_K \tilde{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

事實上, 定義 8.1.6 中, 積分的值與包含 D 的區間 K 的選取方式無關, 證明如下:

定理 8.1.7 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一有界集, $f(\mathbf{x})$ 為定義在 D 上的 n 變數函數. 若 K_1 與 K_2 為任意兩個包含 D 的 n 維區間 (即 $D \subseteq K_1$ 且 $D \subseteq K_2$), 分別在 K_1 與 K_2 上定義輔助函數:

$$\tilde{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in K_1 \setminus D, \end{cases} \quad \tilde{f}_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in K_2 \setminus D. \end{cases}$$

若 $\tilde{f}_1$ 在 K_1 上是可積的, 則 $\tilde{f}_2$ 在 K_2 上也是可積的, 並且兩者的 n 重積分值相等, 即:

$$\int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{K_2} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

證明 這裡分兩步來證明此結論.

先假設 $K_1 \subseteq K_2$. 由於 K_1 與 K_2 皆為 n 維區間, 且 $K_1 \subseteq K_2$, 因此可以將較大的區間 K_2 分割為 K_1 以及有限個與 K_1 開核不相交的 n 維子區間 $J_1, J_2, \dots, J_m$, 使得

$$K_2 = K_1 \cup J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m.$$

觀察輔助函數 $\tilde{f}_2$ 在這些子區間上的取值: 對於任意點 $\mathbf{x} \in J_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), 由於 J_k 與 K_1 的開核不相交, 且 $D \subseteq K_1$, 可知 $\mathbf{x} \notin D$. 依據定義, 此時 $\tilde{f}_2(\mathbf{x}) = 0$. 因常數函數 0 在任何區間上皆可積且積分值為 0, 故 $\tilde{f}_2$ 在所有 J_k 上可積, 且

$$\int \cdots \int_{J_k} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

又因為在 K_1 上, $\tilde{f}_2$ 的取值與 $\tilde{f}_1$ 完全相同, 已知 $\tilde{f}_1$ 在 K_1 上可積, 故 $\tilde{f}_2$ 在 K_1 上亦可積. 根據 n 重積分對積分區間的可加性 (命題 8.1.4), $\tilde{f}_2$ 在整個 K_2 上可積, 並且有:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_{K_2} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m \int \cdots \int_{J_k} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + 0 = \int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

這證明了當一個區間包含在另一個區間內時, 積分值與可積性皆不變.

現, 對於任意兩個包含 D 的 n 維區間 K_1 與 K_2 , 令 $K_0 = K_1 \cap K_2$. 因為 K_1 與 K_2 都是 n 維閉區間, 它們的交集 K_0 同樣是一個 n 維閉區間 (或退化, 但由於包含了有界集 D , 可視為一般的 n 維區間). 同時因為 $D \subseteq K_1$ 且 $D \subseteq K_2$, 故 $D \subseteq K_0$.

定義在 K_0 上的輔助函數為 $\tilde{f}_0$. 由於 $K_0 \subseteq K_1$, 由第一步的結論可知, $\tilde{f}_1$ 在 K_1 上可積等價於 $\tilde{f}_0$ 在 K_0 上可積, 且

$$\int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{K_0} \tilde{f}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

同理, 由於 $K_0 \subseteq K_2$, 再次應用第一步的結論可知 $\tilde{f}_2$ 在 K_2 上可積, 且

$$\int \cdots \int_{K_2} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{K_0} \tilde{f}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

綜合兩式, 即可推得

$$\int \cdots \int_{K_1} \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{K_2} \tilde{f}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

根據重積分的幾何意義, 不難看出:

命題 8.1.8 • 常數函數 $f(\mathbf{x}) = 1$ 在有界閉域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的二重積分即為 Ω 的面積, 即:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x}.$$

• 常數函數 $f(\mathbf{x}) = 1$ 在有界閉域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的三重積分即為 Ω 的體積, 即:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x}.$$

與定積分類似地, 重積分也有如下性質:

命題 8.1.9 (一般有界閉域上重積分的性質) 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 爲一有界閉域, f 與 g 在 D 上皆爲可積函數, 則下列性質成立:

(1) 線性性: 對於任意常數 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 函數 $\lambda f + \mu g$ 在 D 上也是可積的, 且

$$\int \cdots \int_D \{\lambda f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})\} d\mathbf{x} = \lambda \int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mu \int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(2) 保號性: 若在 D 上恆有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$, 則

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0.$$

(3) 保序性: 若在 D 上恆有 $f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$, 則

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(4) 三角不等式: 函數 $|f|$ 在 D 上也是可積的, 且

$$\left| \int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int \cdots \int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

(5) 區域可加性: 若有界閉域 D 可分解爲兩個有界閉域 D_1 與 D_2 的聯集 (即 $D = D_1 \cup D_2$), 且 D_1 與 D_2 互不重疊 (即它們的開核交集爲空集; 允許邊界有交集), 則

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{D_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int \cdots \int_{D_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

此性質可推廣至有限多個 D_i .

以上性質需要達布理論或其他專業工具來幫助證明, 過程非常繁雜, 故此處省略證明.

定理 8.1.10 (重積分均值定理) 設 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 爲一有界閉域 (當然是連通集), f 與 g 在 Ω 上皆爲連續函數. 若在 Ω 上恆有 $g(\mathbf{x}) \geq 0$, 則至少存在一點 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, 使得

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

證明 因爲 f 在有界閉域 Ω 上連續, 所以 f 在 Ω 上能取得最小值 m 與最大值 M . 又因爲在 Ω 上恆有 $g(\mathbf{x}) \geq 0$, 將其同乘上式可得

$$mg(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \leq Mg(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega).$$

根據重積分的保序性與線性性, 對上式各項在 Ω 上取積分可得:

$$\int \cdots \int_{\Omega} mg(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{\Omega} Mg(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

將常數提出積分號外, 即有

$$m \int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq M \int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (8.1)$$

已知 $\int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0$. 這裡分兩種情況討論:

情況一：若 $\int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ ，則由不等式 (8.1) 的夾擠可知 $\int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ 。此時定理中的等式兩邊皆為零，對於 Ω 中的任何點 $\mathbf{x}_0$ 該定理皆成立。

情況二：若 $\int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} > 0$ ，則將不等式 (8.1) 各項同除以該積分值，得到

$$m \leq \frac{\int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \leq M.$$

由於 Ω 連通且 f 在 Ω 上連續，根據中間值定理，必定存在一點 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ，使得函數 f 在該點的取值剛好等於上述介於 m 與 M 之間的數值，亦即

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{\int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}.$$

將分母乘至等式左邊，顯然可得

$$f(\mathbf{x}_0) \int \cdots \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

爲了說明重積分意義下函數的可積性，這裡大致介紹一般集合的容度的概念，不感興趣的讀者可以略過。總之，本講義給出的函數一般上都是可積的，不會用任何複雜的準則來判斷函數的可積性。

定義 8.1.11 設 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 爲一有界集。若對於任意給定的 $\varepsilon > 0$ ，皆存在有限個 n 維區間 $I_1, I_2, \dots, I_m$ ，使得這些區間能覆蓋 E ，即

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^m I_k,$$

且這些區間的容度總和滿足

$$\sum_{k=1}^m |I_k| < \varepsilon,$$

則稱集合 E 的容度爲零 (或稱 E 爲零容度集)。

定義 8.1.12 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 爲一有界集。選取一個包含 D 的 n 維區間 K ，並考慮 D 的指示函數 χ_D 。若 χ_D 在區間 K 上是可積的，則稱集合 D 是可求容度的。此時，定義 D 的容度 $|D|$ 爲該指示函數的 n 重積分：

$$|D| = \int \cdots \int_K \chi_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_D 1 \, d\mathbf{x}.$$

註記 8.1.13 在重積分的理論中，一個有界集 D 是可求容度的，其充要條件即爲其邊界 ∂D 的容度爲零。這解釋了爲何在判定連續函數於一般有界閉域上的可積性時，必須要求該區域的邊界容度爲零，以確保積分區域本身是「良好」且可測量的。

定理 8.1.14 (連續函數的可積性) 若函數 f 在有界閉域 D 上連續，則 f 在 D 上可積。

8.2 重積分的計算

重積分化為累次積分

定義 8.2.1 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 爲一有界集。若存在某個變數 x_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$)，其餘 $n-1$ 個變數所在空間 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有界閉域 D_k ，以及定義在 D_k 上的兩個連續函數 ϕ_1 與 ϕ_2 ，使得 D 可以表示爲

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in D_k, \\ \phi_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq x_k \leq \phi_2(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)\},$$

則稱 D 為關於 x_k 方向的切集。

特別地, 設 $n = 2$ 時, 記 $x_1 = x, x_2 = y$. 當 $k = 2$ 時, 稱 D 為縱切集, 當 $k = 1$ 時稱 D 為橫切集。

定理 8.2.2 (傅比尼定理) 設 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 為一有界集. 若 D 為關於 x_k 方向的切集:

$$D = \{(\mathbf{x}', x_k) : \mathbf{x}' \in D_k, \phi_1(\mathbf{x}') \leq x_k \leq \phi_2(\mathbf{x}')\},$$

其中為標記方便記 $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, D_k 為其餘 $n - 1$ 個變數所在空間 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有界閉域, 且 ϕ_1 與 ϕ_2 在 D_k 上連續. 若函數 $f(\mathbf{x})$ 在 D 上連續, 則下列等式成立:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{D_k} \left(\int_{\phi_1(\mathbf{x}')}^{\phi_2(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_k) \, dx_k \right) d\mathbf{x}'.$$

證明 不失一般性, 這裡我們僅對 $k = n$ 的情形進行證明, 其他方向的切集證明完全相同. 此時積分區域可寫為 $D = \{(\mathbf{x}', x_n) : \mathbf{x}' \in D_{n-1}, \phi_1(\mathbf{x}') \leq x_n \leq \phi_2(\mathbf{x}')\}$.

取一個包含 D_{n-1} 的 $n - 1$ 維閉區間 K' . 由於 ϕ_1 與 ϕ_2 在有界閉域 D_{n-1} 上連續, 故其有界, 因此存在一維閉區間 $[c, d]$ 使得對所有 $\mathbf{x}' \in D_{n-1}$ 皆有 $c \leq \phi_1(\mathbf{x}') \leq \phi_2(\mathbf{x}') \leq d$. 於是, 可構造一個包含 D 的 n 維區間 $K = K' \times [c, d]$. 如定義 8.1.6 所述, 在 K 上定義輔助函數 $\tilde{f}(\mathbf{x}', x_n)$:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}', x_n) = \begin{cases} f(\mathbf{x}', x_n), & (\mathbf{x}', x_n) \in D, \\ 0, & (\mathbf{x}', x_n) \in K \setminus D. \end{cases}$$

因為 f 在 D 上連續, $\tilde{f}$ 在 K 上是重積分可積的. 另外, 若固定 $\mathbf{x}' \in K'$, 則函數 $x_n \mapsto \tilde{f}(\mathbf{x}', x_n)$ 除了在 D 的邊界上 (至多兩個點 $x_n = \phi_1(\mathbf{x}')$ 與 $x_n = \phi_2(\mathbf{x}')$) 可能不連續外, 在 $[c, d]$ 上皆為連續, 故其對 x_n 的定積分存在. 令

$$F(\mathbf{x}') = \int_c^d \tilde{f}(\mathbf{x}', x_n) \, dx_n = \int_{\phi_1(\mathbf{x}')}^{\phi_2(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_n) \, dx_n.$$

現取 K' 的一個分割 Δ' , 並在每個小區間 $K'_{i'}$ 中任意選取樣本點 $\xi'_{i'}$, 則 $F(\mathbf{x}')$ 的黎曼和為:

$$S(F; \Delta', \{\xi'_{i'}\}) = \sum_{i'} F(\xi'_{i'}) |K'_{i'}|.$$

接著, 取 $[c, d]$ 的分割 $\Delta_n : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, 並要求其直徑滿足 $|\Delta_n| \leq |\Delta'|$. 如此一來, $\Delta = \Delta' \times \Delta_n$ 便構成了 K 的一個分割, 其小區間記為 $K_{i'j} = K'_{i'} \times [y_{j-1}, y_j]$. 因為 f 在 $K_{i'j} \cap D$ 上連續, 我們可以選取樣本點 $(\xi'_{i'j}, \eta'_{i'j})$ 與 $(\xi'_{i'j}, \eta'_{i'j})$ 使得輔助函數 $\tilde{f}$ 在這些點上分別給出該小區間上的最大值 $M_{i'j}$ 與最小值 $m_{i'j}$. 對於固定的 $\xi'_{i'} \in K'_{i'}$, 當 $x_n \in [y_{j-1}, y_j]$ 時恆有

$$m_{i'j} \leq \tilde{f}(\xi'_{i'}, x_n) \leq M_{i'j}.$$

在 $[y_{j-1}, y_j]$ 上對 x_n 積分可得

$$m_{i'j}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \tilde{f}(\xi'_{i'}, x_n) \, dx_n \leq M_{i'j}(y_j - y_{j-1}).$$

將上式對 $j = 1, 2, \dots, m$ 加總:

$$\sum_{j=1}^m m_{i'j}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d \tilde{f}(\xi'_{i'}, x_n) \, dx_n \leq \sum_{j=1}^m M_{i'j}(y_j - y_{j-1}).$$

注意中間的積分項即為 $F(\xi'_{i'})$, 再將不等式同乘 $|K'_{i'}|$ 後對所有 i' 加總:

$$\sum_{i', j} m_{i'j} |K'_{i'}| (y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{i'} F(\xi'_{i'}) |K'_{i'}| \leq \sum_{i', j} M_{i'j} |K'_{i'}| (y_j - y_{j-1}).$$

觀察上式，左右兩端分別是 $\tilde{f}$ 關於分割 Δ ，取極值點為樣本點時的黎曼和。故可寫為：

$$S(\tilde{f}; \Delta, \{(\xi_{i'j}^{\min}, \eta_{i'j}^{\min})\}) \leq S(F; \Delta', \{\xi_{i'}'\}) \leq S(\tilde{f}; \Delta, \{(\xi_{i'j}^{\max}, \eta_{i'j}^{\max})\}).$$

當 $|\Delta'| \rightarrow 0$ 時， $|\Delta| \rightarrow 0$ ，且已知 $\tilde{f}$ 在 K 上可積，故左右兩端的黎曼和皆趨近於 $\tilde{f}$ 在 K 上的 n 重積分。由夾擠定理可知，中間的黎曼和也必然趨於同一極限，且與樣本點 $\{\xi_{i'}'\}$ 的選法無關：

$$\lim_{|\Delta'| \rightarrow 0} S(F; \Delta', \{\xi_{i'}'\}) = \int \cdots \int_K \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

這證明了 $F(\mathbf{x}')$ 在 K' 上可積，且

$$\int \cdots \int_{K'} F(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = \int \cdots \int_K \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

最後根據一般有界閉域上重積分的定義，即可得

$$\int \cdots \int_{D_{n-1}} \left(\int_{\phi_1(\mathbf{x}')}^{\phi_2(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}', x_n) \, dx_n \right) d\mathbf{x}' = \int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

定理得證。 □

定義 8.2.3 設 n 變數函數 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 定義在某個區域上。若將多重積分轉化為多次的單變數定積分，亦即每次僅對其中一個變數進行積分，而將其餘變數暫時視為常數，依序逐層積算，這樣的積分形式與過程稱為**累次積分**。

詳言之，若積分範圍為 n 維閉區間 $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ，且各層級的單變數積分皆存在，則其累次積分嚴格記為：

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \right) dx_2 \right) \cdots \right) dx_n.$$

為了書寫與排版簡便，實務上經常省略括號，習慣上將由內而外的積分順序直接由左至右對應，記作：

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n.$$

對於更一般的積分區域（如前述之切集），累次積分的上下界則會由常數推廣為依賴於外部積分變數的連續函數。

註記 8.2.4 反覆使用定理 8.2.2，可將重積分化為累次積分。

命題 8.2.5 設 $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 為一 n 維閉區間。若對於每個 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，函數 $f_k(x_k)$ 在 $[a_k, b_k]$ 上皆為連續，則這 n 個變數分離函數乘積的 n 重積分等於各別單變數定積分的乘積，即：

$$\int \cdots \int_K f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, d\mathbf{x} = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) \, dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) \, dx_2 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) \, dx_n \right).$$

證明 由於函數在區間上連續，根據傅比尼定理（定理 8.2.2），可以將該 n 重積分化為 n 次的單變數定積分：

$$\int \cdots \int_K f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, d\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\cdots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, dx_1 \right) dx_2 \cdots \right) dx_n.$$

從最內層的關於 x_1 的積分開始觀察. 由於除了 $f_1(x_1)$ 以外的其他函數 $f_k(x_k)$ ($k \geq 2$) 皆與變數 x_1 無關, 它們在對 x_1 積分時可視為常數, 故可提出最內層的積分號外:

$$\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) dx_1 = f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1.$$

此時, 定積分 $\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1$ 為一個實數常數, 它可以進一步被提出剩餘所有的積分號之外.

接著對 $x_2, x_3, \dots, x_n$ 反覆進行相同的操作, 亦即每次將與當前積分變數無關的函數及已積出的常數值提出積分號外, 最終可得:

$$\int \cdots \int_K f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) d\mathbf{x} = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2) dx_2 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right).$$

□

有了傅比尼定理, 計算重積分的问题就能轉化為反覆計算定積分的问题, 這正是我們所熟悉的.

二重積分的計算

例 8.2.6 設 $K = [0, 2] \times [0, 1]$, 求 $\iint_K (xe^y + 2y) d(x, y)$ 的值.

解 (解一) 將其化為累次積分, 先對 y 積分再對 x 積分:

$$\begin{aligned} \iint_K (xe^y + 2y) d(x, y) &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (xe^y + 2y) dy \right) dx = \int_0^2 (xe^y + y^2) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 ((e + 1) - x) dx = \int_0^2 (x(e - 1) + 1) dx = 2e. \end{aligned}$$

解 (解二) 將其化為累次積分, 先對 x 積分再對 y 積分:

$$\begin{aligned} \iint_K (xe^y + 2y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (xe^y + 2y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2e^y + 2xy \right) \Big|_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^1 (2e^y + 4y) dy = 2e. \end{aligned}$$

例 8.2.7 設 $K = [0, 1] \times [0, 2]$, 求 $J = \iint_K ye^{xy} d(x, y)$ 的值.

解 (解一) 將其化為累次積分, 選擇先對 x 積分:

$$J = \int_0^2 \left(\int_0^1 ye^{xy} dx \right) dy = \int_0^2 (e^{xy}) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 (e^y - 1) dy = e^2 - 3.$$

解 (解二; 不推薦) 將其化為累次積分, 若選擇先對 y 積分:

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^2 ye^{xy} dy \right) dx$$

其中內層積分需使用分部積分法:

$$\int_0^2 ye^{xy} dy = \left(y \left(\frac{e^{xy}}{x} \right) \right) \Big|_{y=0}^{y=2} - \int_0^2 \frac{e^{xy}}{x} dy = \frac{2e^{2x}}{x} - \left(\frac{e^{xy}}{x^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{2e^{2x}}{x} - \frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}.$$

將其代回外層積分, 並留意分母有 x 導致在 $x = 0$ 處需要取極限:

$$J = \int_0^1 \left(\frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2} \right) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \Big|_{x=t}^{x=1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(e^2 - 1 - \frac{e^{2t} - 1}{t} \right) = e^2 - 3.$$

例 8.2.8 設 $t > 0$. 透過計算二重積分

$$I = \iint_{K_t} e^{-xy} \sin x \, d(x, y), \quad K_t = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}$$

的值, 並取極限 $t \rightarrow +\infty$, 來求反常積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

的值.

解 將其化為累次積分, 首先選擇先對 y 積分:

$$I = \int_0^t \left(\int_0^t e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{x} e^{-xy} \sin x \right) \Big|_{y=0}^{y=t} dx = \int_0^t \frac{\sin x}{x} (1 - e^{-tx}) \, dx.$$

(註: 因為 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 若將被積函數在 $x = 0$ 處的值視為 1, 此積分為常規的定積分, 並非反常積分.)

另一方面, 若採用另一種累次積分順序, 選擇先對 x 積分 (此處利用分部積分法或已知公式):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \left(\int_0^t e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy = \int_0^t \left(\frac{e^{-xy}(-y \sin x - \cos x)}{y^2 + 1} \right) \Big|_{x=0}^{x=t} dy \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{e^{-ty}(y \sin t + \cos t)}{y^2 + 1} \right) dy = \tan^{-1} t - \int_0^t \frac{e^{-ty}(y \sin t + \cos t)}{y^2 + 1} dy. \end{aligned}$$

因此, 若令

$$J_1 = \int_0^t \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \, dx, \quad J_2 = \int_0^t \frac{e^{-ty}(y \sin t + \cos t)}{y^2 + 1} dy,$$

由上述兩種積分順序的計算結果可建立等式:

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} \, dx - J_1 = \tan^{-1} t - J_2.$$

現在來估計 J_1 與 J_2 的範圍. 對於 J_1 , 由於當 $x \geq 0$ 時恆有 $x \geq |\sin x|$, 可知:

$$|J_1| \leq \int_0^t \left| \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \right| dx \leq \int_0^t e^{-tx} \, dx = \left(-\frac{1}{t} e^{-tx} \right) \Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1 - e^{-t^2}}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

對於 J_2 , 利用適當的輔助角 θ_t (或柯西-施瓦茨不等式), 可以估計被積函數的絕對值:

$$\left| \frac{e^{-ty}(y \sin t + \cos t)}{y^2 + 1} \right| = \left| \frac{e^{-ty} \sqrt{y^2 + 1} \sin(t + \theta_t)}{y^2 + 1} \right| \leq \frac{e^{-ty}}{\sqrt{y^2 + 1}} \leq e^{-ty}.$$

所以同理可得:

$$|J_2| \leq \int_0^t \left| \frac{e^{-ty}(y \sin t + \cos t)}{y^2 + 1} \right| dy \leq \int_0^t e^{-ty} \, dy = \frac{1 - e^{-t^2}}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

綜合以上結果, 兩邊取極限即可求出反常積分的值:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\tan^{-1} t + J_1 - J_2) = \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

例 8.2.9 求下列兩個二重積分的值.

$$(1) \iint_{K_1} \frac{\sec^2 y}{1 + x^2} \, d(x, y), \quad K_1 = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

$$(2) \iint_{K_2} \frac{y \sin x}{1 + \cos^2 x} d(x, y), \quad K_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

解 (1) 將其化為累次積分，觀察被積函數為變數分離形，且積分區域 K_1 為長方形，故可直接拆分為兩個單變數定積分的乘積：

$$\iint_{K_1} \frac{\sec^2 y}{1 + x^2} d(x, y) = \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 y dy \right) = (\tan^{-1} x) \Big|_{x=0}^{x=1} (\tan y) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 被積函數可視為關於 x 與 y 的函數乘積，且積分區域 K_2 為長方形，利用變數分離的性質拆解計算：

$$\iint_{K_2} \frac{y \sin x}{1 + \cos^2 x} d(x, y) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \right) \left(\int_0^2 y dy \right)$$

對於第一個積分，觀察其形式可知原函數與反三角函數有關，可以直接積出結果：

$$\iint_{K_2} \frac{y \sin x}{1 + \cos^2 x} d(x, y) = (-\tan^{-1}(\cos x)) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{\pi}{2}.$$

注意 8.2.10 接下來將探討一般有界閉域上的重積分計算。在實際運算中，經常需要運用傅比尼定理來交換積分次序。雖然多數教科書習慣仰賴繪製幾何圖形來判定各變數的積分範圍，但微積分本質上屬於分析領域，邏輯推演不應過度依賴幾何直觀。因此，本講義後續將側重於透過分析與求解不等式組的方法，來嚴謹地推導出各變數的積分界限。

例 8.2.11 設 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$ 。求二重積分

$$\iint_D x^3 y d(x, y)$$

的值。

解 (解一) 直接依給定的不等式，將其化為關於 y 方向的縱切集來進行累次積分：

$$\iint_D x^3 y d(x, y) = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x^3 y dy \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^3 y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^7 dx = 16.$$

解 (解二) 若要改變積分次序，可透過觀察區域 D 的不等式條件 $0 \leq x \leq 2$ 且 $0 \leq y \leq x^2$ 。由 $y \leq x^2$ 及 $x \geq 0$ 可推得 $x \geq \sqrt{y}$ 。配合原先的限制 $x \leq 2$ ，可知 y 的最大範圍為 $0 \leq y \leq 4$ 。因此，區域 D 可重新表示為關於 x 方向的切集 $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$ 。將其化為累次積分：

$$\iint_D x^3 y d(x, y) = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 x^3 y dx \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{4} x^4 y \right) \Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} dy = \int_0^4 \left(4y - \frac{1}{4} y^3 \right) dy = 16.$$

例 8.2.12 求二重積分

$$\iint_D (x + 2y) d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x + y \leq 4, 0 \leq y \leq 3x\}.$$

的值。

解 (解一) 觀察區域 D 的不等式，從 $0 \leq y \leq 3x$ 可知 $y \geq 0$ 。另一方面，聯立 $x + y \leq 4$ 與 $3x \geq y$ ，可以將 x 的範圍寫為 $y/3 \leq x \leq 4 - y$ 。由此隱含了 $y/3 \leq 4 - y$ ，解不等式可得 $y \leq 3$ 。

因此, 若將 D 視為關於 x 方向的切集, y 的範圍為 $0 \leq y \leq 3$, 且對於固定的 y , x 的界線為 $y/3 \leq x \leq 4 - y$. 這樣一來不需要分段積分, 將其化為累次積分為:

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y) \, d(x,y) &= \int_0^3 \left(\int_{y/3}^{4-y} (x+2y) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy \right) \Big|_{x=y/3}^{x=4-y} dy = \int_0^3 \left(8 + 4y - \frac{20}{9}y^2 \right) dy = 22.\end{aligned}$$

解 (解二) 若將 D 視為關於 y 方向的切集, 觀察不等式 $0 \leq y \leq 3x$ 與 $y \leq 4 - x$ (移項自 $x + y \leq 4$), 可知 $x \geq 0$, 且 y 的上限由 $y = 3x$ 與 $y = 4 - x$ 共同決定.

令 $3x = 4 - x$, 解得這兩條上限交界點的橫坐標為 $x = 1$. 同時從 $4 - x \geq 0$ 可知 $x \leq 4$. 因此 x 的範圍為 $0 \leq x \leq 4$, 且在 $0 \leq x \leq 1$ 區間時, y 的上限為 $3x$; 在 $1 \leq x \leq 4$ 區間時, y 的上限為 $4 - x$. 這需要將積分區域分為兩部分來計算:

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y) \, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{3x} (x+2y) \, dy \right) dx + \int_1^4 \left(\int_0^{4-x} (x+2y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (xy + y^2) \Big|_{y=0}^{y=3x} dx + \int_1^4 (xy + y^2) \Big|_{y=0}^{y=4-x} dx \\ &= \int_0^1 (x(3x) + (3x)^2) dx + \int_1^4 (x(4-x) + (4-x)^2) dx = 22.\end{aligned}$$

例 8.2.13 設 D 是由拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = x + 2$ 所圍成的有界閉域. 求重積分

$$\iint_D 4x \, d(x,y)$$

的值.

解 (解一) 將 D 視為關於 y 方向的縱切集, 考慮「先 y 後 x 」的積分順序. 聯立邊界方程式 $y = x^2$ 與 $y = x + 2$, 求解交點:

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0,$$

可得交點的橫坐標為 $x = -1$ 與 $x = 2$. 因此 x 的最大範圍為 $-1 \leq x \leq 2$.

對於固定的 $x \in [-1, 2]$, 欲在不等式「 $\underline{\quad} \leq y \leq \underline{\quad}$ 」中填入上下界. 觀察到

$$x + 2 - x^2 = -(x - 2)(x + 1) \geq 0,$$

表示在該區間內恆有 $x + 2 \geq x^2$. 故 y 的範圍為 $x^2 \leq y \leq x + 2$. 將其化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned}\iint_D 4x \, d(x,y) &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 4x \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^2 (4xy) \Big|_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \int_{-1}^2 4x(x + 2 - x^2) dx = 9.\end{aligned}$$

解 (解二) 若將 D 視為關於 x 方向的橫切集, 考慮「先 x 後 y 」的積分順序. 根據先前的交點坐標 $(-1, 1)$ 與 $(2, 4)$, 且拋物線 $y = x^2$ 的最小值為 0, 可知 y 的最大範圍為 $0 \leq y \leq 4$.

對於固定的 $y \in [0, 4]$, 直線方程式可改寫為 $x = y - 2$, 拋物線方程式可改寫為 $x = \sqrt{y}$ 或 $x = -\sqrt{y}$. 顯然右邊界恆為 $x = \sqrt{y}$, 而左邊界則需比較 $y - 2$ 與 $-\sqrt{y}$ 的大小. 令 $y - 2 = -\sqrt{y}$, 移項並整理得 $y + \sqrt{y} - 2 = 0$, 交叉相乘可分解為 $(\sqrt{y} + 2)(\sqrt{y} - 1) = 0$. 由於 $\sqrt{y} \geq 0$, 故解得 $\sqrt{y} = 1$, 即 $y = 1$.

- 當 $0 \leq y \leq 1$ 時, $y - 2 \leq -1$ 且 $-\sqrt{y} \geq -1$, 故 $y - 2 \leq -\sqrt{y}$, 此時左邊界為 $x = -\sqrt{y}$.
- 當 $1 \leq y \leq 4$ 時, $y - 2 \geq -1$ 且 $-\sqrt{y} \leq -1$, 故 $-\sqrt{y} \leq y - 2$, 此時左邊界為 $x = y - 2$.

因此, 需要將積分區間在 $y = 1$ 處分段, 化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned}\iint_D 4x \, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 4x \, dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} 4x \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (2x^2) \Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^4 (2x^2) \Big|_{x=y-2}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 (2y - 2y) dy + \int_1^4 (2y - 2(y-2)^2) dy = 9.\end{aligned}$$

例 8.2.14 求累次積分

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \right) dy$$

的值.

解 觀察到被積函數 $\sqrt{x^3 + 1}$ 對於 x 無法直接找出基本初等函數作為其反導數, 因此必須考慮交換積分順序. 首先, 根據原積分寫出積分區域 D 的不等式表示:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}.$$

從不等式 $\sqrt{y} \leq x$ 且兩邊皆非負, 可推得 $y \leq x^2$. 綜合已知條件 $y \geq 0$ 以及 $x \leq 2$, 我們可以將積分區域 D 重新表示為關於 x 方向的縱切集 (即先對 y 積分, 後對 x 積分):

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

交換積分順序後, 將其化為新的累次積分並計算:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \right) dy &= \iint_D \sqrt{x^3 + 1} \, d(x, y) = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{x^3 + 1} \, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(y\sqrt{x^3 + 1} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx = \frac{52}{9}.\end{aligned}$$

例 8.2.15 求累次積分

$$\int_0^1 \left(\int_{y/\sqrt{3}}^y \frac{y}{(1+x^2)^2} \, dx \right) dy.$$

的值.

解 觀察被積函數, 若直接對 x 進行積分, 過程會牽涉到複雜的代數與反三角函數替換, 且難以接續對 y 的外層積分, 因此考慮交換積分順序.

首先, 根據原積分寫出積分區域 D 的不等式表示:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq 1, \frac{y}{\sqrt{3}} \leq x \leq y \right\}.$$

由 $x \leq y$ 可知 $y \geq x$; 由 $y/\sqrt{3} \leq x$ 可知 $y \leq \sqrt{3}x$. 另外, 觀察 x 的最大可能範圍: 當 $y = 0$ 時 x 最小為 0; 當 $y = 1$ 時 x 最大可達 1. 故 x 的總範圍為 $0 \leq x \leq 1$.

綜合上述條件, 對於固定的 $x \in [0, 1]$, y 的下界為 x , 上界同時受到 $y \leq \sqrt{3}x$ 與原區域的 $y \leq 1$ 限制. 因此, 積分區域 D 可重新表示為:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \min\{\sqrt{3}x, 1\}\}.$$

由於上界出現了 $\min\{\sqrt{3}x, 1\}$, 必須找出分界點. 令 $\sqrt{3}x = 1$, 解得 $x = 1/\sqrt{3}$. 這迫使外層對 x 的積分必須拆分為兩個區間:

- 當 $0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ 時, $\sqrt{3}x \leq 1$, 故 y 的範圍為 $x \leq y \leq \sqrt{3}x$.
- 當 $1/\sqrt{3} \leq x \leq 1$ 時, $\sqrt{3}x \geq 1$, 故 y 的範圍為 $x \leq y \leq 1$.

交換積分順序後, 將原式化為兩段累次積分並分別計算內層:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{(1+x^2)^2} d(x, y) &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\int_x^{\sqrt{3}x} \frac{y}{(1+x^2)^2} dy \right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\int_x^1 \frac{y}{(1+x^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{y^2}{2(1+x^2)^2} \right) \Big|_{y=x}^{y=\sqrt{3}x} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{y^2}{2(1+x^2)^2} \right) \Big|_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1-x^2}{2(1+x^2)^2} dx \\ &= \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

命題 8.2.16 (二重積分的對稱性) 設積分區域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 為一有界閉域, 函數 f 在 Ω 上連續.

(1) 若 Ω 關於 y 軸對稱 (即當 $(x, y) \in \Omega$ 時, 必有 $(-x, y) \in \Omega$), 記 $\Omega_{x \geq 0} = \{(x, y) \in \Omega : x \geq 0\}$ 為 Ω 的右半部分, 則

- 當 f 為關於變數 x 的奇函數 (即 $f(-x, y) = -f(x, y)$) 時, $\iint_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = 0$.
- 當 f 為關於變數 x 的偶函數 (即 $f(-x, y) = f(x, y)$) 時, $\iint_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = 2 \iint_{\Omega_{x \geq 0}} f(x, y) d(x, y)$.

(2) 若 Ω 關於 x 軸對稱 (即當 $(x, y) \in \Omega$ 時, 必有 $(x, -y) \in \Omega$), 記 $\Omega_{y \geq 0} = \{(x, y) \in \Omega : y \geq 0\}$ 為 Ω 的上半部分, 則

- 當 f 為關於變數 y 的奇函數 (即 $f(x, -y) = -f(x, y)$) 時, $\iint_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = 0$.
- 當 f 為關於變數 y 的偶函數 (即 $f(x, -y) = f(x, y)$) 時, $\iint_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = 2 \iint_{\Omega_{y \geq 0}} f(x, y) d(x, y)$.

例 8.2.17 設 Ω 為由直線 $y = x$, $y = -x$, $x = a$ 與 $x = -a$ (其中 $a > 0$) 所圍成的有界閉域. 求二重積分

$$\iint_{\Omega} (2x - \sin(x^2y)) d(x, y)$$

的值.

解 首先, 根據重積分的線性性, 將原積分拆解為兩項:

$$\iint_{\Omega} (2x - \sin(x^2y)) d(x, y) = \iint_{\Omega} 2x d(x, y) - \iint_{\Omega} \sin(x^2y) d(x, y).$$

觀察積分區域 Ω , 由於其邊界方程式皆具有高度對稱性, 顯然 Ω 同時關於 y 軸與 x 軸對稱.

對於第一項積分 $\iint_{\Omega} 2x \, d(x, y)$: 令被積函數為 $f_1(x, y) = 2x$, 則 $f_1(-x, y) = -2x = -f_1(x, y)$, 即 f_1 為關於變數 x 的奇函數. 因為 Ω 關於 y 軸對稱, 根據對稱性, 可知

$$\iint_{\Omega} 2x \, d(x, y) = 0.$$

對於第二項積分 $\iint_{\Omega} \sin(x^2 y) \, d(x, y)$: 令被積函數為 $f_2(x, y) = \sin(x^2 y)$, 則 $f_2(x, -y) = \sin(x^2(-y)) = -\sin(x^2 y) = -f_2(x, y)$, 即 f_2 為關於變數 y 的奇函數. 因為 Ω 關於 x 軸對稱, 再次根據對稱性, 可知

$$\iint_{\Omega} \sin(x^2 y) \, d(x, y) = 0.$$

綜合上述結果, 原積分之值為:

$$\iint_{\Omega} (2x - \sin(x^2 y)) \, d(x, y) = 0 - 0 = 0.$$

三重積分的計算

例 8.2.18 求三重積分

$$\iiint_K (x + y - z)^2 \, d(x, y, z), \quad K = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

的值.

解 將其化為累次積分, 依序對 x, y, z 進行積分:

$$\begin{aligned} \iiint_K (x + y - z)^2 \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y - z)^2 \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{(x + y - z)^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(1 + y - z)^3 - (y - z)^3}{3} dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1 + y - z)^4 - (y - z)^4}{12} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dz = \int_0^1 \frac{(2 - z)^4 - 2(1 - z)^4 + z^4}{12} dz = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

註記 8.2.19 設函數 f 在 $\mathbb{R}^3$ 中的有界閉域 Ω 上連續, 則可將三重積分化為累次積分來計算, 根據積分變數處理順序的不同, 主要有以下兩種方式:

- (1) 先一後二法: 若 Ω 可表示為關於 z 方向的切集, 亦即存在 xy 平面上的積分區域 D 以及定義在 D 上的兩個連續函數 $\phi_1(x, y)$ 與 $\phi_2(x, y)$, 使得

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\},$$

則三重積分可化為先對單變數 z 積分, 再對 x, y 在區域 D 上作二重積分:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y).$$

- (2) 先二後一法: 若 Ω 可藉由變數 $z \in [a, b]$ 作為參數, 給出在高度為 z 時平行於 xy 平面的截面區域 D_z , 使得

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leq z \leq b, (x, y) \in D_z\},$$

則三重積分可化為先對 x, y 在截面 D_z 上作二重積分, 再對單變數 z 作積分:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) \, d(x, y) \right) dz.$$

當然，這裡以變數 z 作為首要分析對象僅是為了方便說明，實際計算時亦可根據區域特徵對 x 或 y 方向採用上述兩種方法。

例 8.2.20 設 $\Omega = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y + z \leq 2\}$. 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} y \, d(x, y, z)$$

的值.

解 (解一) 利用先一後二法 (先對 z 積分), 積分區域 Ω 可表示為關於 z 方向的縱切集:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq z \leq 2 - 2x - y\}.$$

將其化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{2-2x-y} y \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (yz) \Big|_{z=0}^{z=2-2x-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} y(2-2x-y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} ((2-2x)y - y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2-2x}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx = \int_0^1 \frac{1}{6} (2-2x)^3 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解 (解二) 利用先二後一法 (先對 x, z 作二重積分), 因被積函數為 y , 故將 Ω 視為以 y 為參數的截面區域的集合會最為簡便:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, (x, z) \in D_y\},$$

其中對於給定的 y , 其對應的截面區域為 $D_y = \{(x, z) : x \geq 0, z \geq 0, 2x + z \leq 2 - y\}$.

在 xz 平面上, D_y 是一個直角三角形, 兩股長分別為 $(2-y)/2$ 與 $2-y$, 因此該三角形的面積為:

$$|D_y| = \frac{1}{2} \left(\frac{2-y}{2} \right) (2-y) = \frac{1}{4} (2-y)^2.$$

將原三重積分化為先在截面 D_y 上求二重積分, 再對單變數 y 積分:

$$\iiint_{\Omega} y \, d(x, y, z) = \int_0^2 \left(\iint_{D_y} y \, d(x, z) \right) dy = \int_0^2 y |D_y| \, dy = \int_0^2 \frac{1}{4} y (2-y)^2 \, dy = \frac{1}{3}.$$

例 8.2.21 設 Ω 為由拋物柱面 $y = x^2$, 平面 $z = y$, $y = 4$ 以及 xy 平面所圍成的有界立體區域. 試將三重積分 $\iiint_{\Omega} z \, d(x, y, z)$ 寫成六種不同積分次序的累次積分形式, 並求出該積分之值.

解 首先, 透過分析各個曲面與平面的方程式, 確立積分區域 Ω 中各變數的極限範圍與相依關係. 由 $y = x^2 \geq 0$ 及 $y = 4$, 得知 Ω 中必有 $0 \leq y \leq 4$. 另外, 由 $z = y$ 及 $z = 0$ (xy 平面) 這兩個條件, 告訴我們 $0 \leq z \leq y$. 配合 y 的範圍, 可推得 $0 \leq z \leq y \leq 4$. 而由 $x^2 \leq y \leq 4$, 開平方後可解得 $-2 \leq x \leq 2$. 因此, 刻畫區域 Ω 的完整不等式組為:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x^2 \leq y \leq 4, \\ 0 \leq z \leq y. \end{cases}$$

(註: 雖然前兩條不等式已蘊含了 $0 \leq y \leq 4$ 與 $0 \leq z \leq 4$, 但明確列出這些絕對範圍有助於我們在決定外層積分時, 快速且無誤地找出常數上下界).

根據上述不等式, 可將此三重積分化為以下六種次序的累次積分:

- (1) 積分順序 $dx dy dz$ (即 $x \rightarrow y \rightarrow z$): 固定外層變數 $z \in [0, 4]$. 對於固定的 z , 觀察與 y 相關的不等式有 $z \leq y$ 與 $y \leq 4$, 故 $z \leq y \leq 4$. 接著固定 z 與 y , 根據 $x^2 \leq y$ 可推得 $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. 因此:

$$\iiint_{\Omega} z d(x, y, z) = \int_0^4 \int_z^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z dx dy dz.$$

- (2) 積分順序 $dx dz dy$ (即 $x \rightarrow z \rightarrow y$): 固定外層變數 $y \in [0, 4]$. 對於固定的 y , z 的範圍為 $0 \leq z \leq y$. 接著固定 y 與 z , 同樣由 $x^2 \leq y$ 推得 $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. 因此:

$$\iiint_{\Omega} z d(x, y, z) = \int_0^4 \int_0^y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} z dx dz dy.$$

- (3) 積分順序 $dz dy dx$ (即 $z \rightarrow y \rightarrow x$): 固定外層變數 $x \in [-2, 2]$. 對於固定的 x , 觀察到 y 的下界受制於 x^2 , 上界為 4, 故 $x^2 \leq y \leq 4$. 接著固定 x 與 y , z 的範圍為 $0 \leq z \leq y$. 因此:

$$\iiint_{\Omega} z d(x, y, z) = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^y z dz dy dx.$$

- (4) 積分順序 $dz dx dy$ (即 $z \rightarrow x \rightarrow y$): 固定外層變數 $y \in [0, 4]$. 對於固定的 y , x 的範圍為 $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. 接著固定 y 與 x , z 的範圍為 $0 \leq z \leq y$. 因此:

$$\iiint_{\Omega} z d(x, y, z) = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^y z dz dx dy.$$

- (5) 積分順序 $dy dz dx$ (即 $y \rightarrow z \rightarrow x$): 固定外層變數 $x \in [-2, 2]$. 接著固定中間變數 $z \in [0, 4]$. 對於內層變數 y , 由於必須同時滿足 $x^2 \leq y$ 與 $z \leq y$, 且上界為 4, 故 $\max\{x^2, z\} \leq y \leq 4$. 爲了去絕對化 $\max$ 函數, 必須討論 x 與 z 的大小關係. 因爲 x 已被固定, 點 x^2 將 z 的區間 $[0, 4]$ 劃分爲兩部分: 當 $0 \leq z \leq x^2$ 時, $\max\{x^2, z\} = x^2$, 故 $x^2 \leq y \leq 4$; 當 $x^2 \leq z \leq 4$ 時, $\max\{x^2, z\} = z$, 故 $z \leq y \leq 4$. 因此:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z d(x, y, z) &= \int_{-2}^2 \int_0^4 \int_{\max\{x^2, z\}}^4 z dy dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{x^2} \int_{x^2}^4 z dy dz + \int_{x^2}^4 \int_z^4 z dy dz \right) dx. \end{aligned}$$

- (6) 積分順序 $dy dx dz$ (即 $y \rightarrow x \rightarrow z$): 固定外層變數 $z \in [0, 4]$. 接著固定中間變數 $x \in [-2, 2]$. 同樣地, y 的範圍為 $\max\{x^2, z\} \leq y \leq 4$. 此時由於 z 已被固定, 點 $-\sqrt{z}$ 與 $\sqrt{z}$ 將 x 的區間 $[-2, 2]$ 劃分成三個子區間. 列表分析如下:

x 的範圍	$-2 \leq x \leq -\sqrt{z}$	$-\sqrt{z} \leq x \leq \sqrt{z}$	$\sqrt{z} \leq x \leq 2$
x^2 與 z 的比較	$z \leq x^2$	$z \geq x^2$	$z \leq x^2$
y 的嚴格範圍	$x^2 \leq y \leq 4$	$z \leq y \leq 4$	$x^2 \leq y \leq 4$

因此, 該積分必須拆解爲三項之和:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z d(x, y, z) &= \int_0^4 \int_{-2}^2 \int_{\max\{x^2, z\}}^4 z dy dx dz \\ &= \int_0^4 \left(\int_{-2}^{-\sqrt{z}} \int_{x^2}^4 z dy dx + \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_z^4 z dy dx + \int_{\sqrt{z}}^2 \int_{x^2}^4 z dy dx \right) dz. \end{aligned}$$

最後，爲了求出該積分的值，可選擇計算上最爲簡便的順序 (4) ($z \rightarrow x \rightarrow y$) 進行運算：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, d(x, y, z) &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\int_0^y z \, dz \right) dx \, dy = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{z=0}^{z=y} dx \, dy \\ &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} y^2 dx \, dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{2} y^2 x \right) \Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{256}{7}. \end{aligned}$$

例 8.2.22 設 Ω 爲由平面 $x = 0$, $y = 0$, $x = z$, $y = z$ 及 $z = 1$ 所圍成的有界立體區域。試將三重積分 $\iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z)$ 化爲六種不同積分次序的累次積分形式，並求出該積分之值。

解 首先，透過分析各個邊界面方程式，可確立積分區域 Ω 中各變數的相依關係與極限範圍。從平面 $x = 0$, $x = z$ 與 $z = 1$ ，可推得不等式 $0 \leq x \leq z \leq 1$ 。同理，從平面 $y = 0$, $y = z$ 與 $z = 1$ ，可推得 $0 \leq y \leq z \leq 1$ 。這兩組條件暗示了 z 必須同時大於等於 x 與 y ，亦即 $z \geq \max\{x, y\}$ 。綜合來看，各變數的絕對最大範圍皆落在 0 與 1 之間。因此，刻畫區域 Ω 的不等式系統可寫爲：

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq z \leq 1, \\ 0 \leq y \leq z \leq 1, \\ \max\{x, y\} \leq z \leq 1. \end{cases}$$

基於上述不等式，可將此三重積分化爲以下六種次序的累次積分：

- (1) 積分順序 $dx \, dy \, dz$ (即 $x \rightarrow y \rightarrow z$): 固定最外層變數 $z \in [0, 1]$ 。對於固定的 z ，觀察與 y 相關的不等式有 $0 \leq y \leq z$ 。接著固定 z 與 y ，由 $0 \leq x \leq z$ 即可定出 x 的範圍。因此：

$$\iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^z \cos(z^3) \, dx \, dy \, dz.$$

- (2) 積分順序 $dy \, dx \, dz$ (即 $y \rightarrow x \rightarrow z$): 此順序與前述邏輯完全對稱。固定 $z \in [0, 1]$ 。對於固定的 z ， x 的範圍爲 $0 \leq x \leq z$ 。接著固定 z 與 x ， y 的範圍爲 $0 \leq y \leq z$ 。因此：

$$\iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^z \cos(z^3) \, dy \, dx \, dz.$$

- (3) 積分順序 $dx \, dz \, dy$ (即 $x \rightarrow z \rightarrow y$): 固定最外層變數 $y \in [0, 1]$ 。對於固定的 y ，觀察與 z 相關的限制： z 必須大於等於 y 且小於等於 1，故 $y \leq z \leq 1$ 。接著固定 y 與 z ， x 的範圍受制於 $0 \leq x \leq z$ 。因此：

$$\iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_y^1 \int_0^z \cos(z^3) \, dx \, dz \, dy.$$

- (4) 積分順序 $dy \, dz \, dx$ (即 $y \rightarrow z \rightarrow x$): 此順序與前述邏輯對稱。固定 $x \in [0, 1]$ 。對於固定的 x ， z 的範圍爲 $x \leq z \leq 1$ 。接著固定 x 與 z ， y 的範圍爲 $0 \leq y \leq z$ 。因此：

$$\iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^z \cos(z^3) \, dy \, dz \, dx.$$

- (5) 積分順序 $dz \, dx \, dy$ (即 $z \rightarrow x \rightarrow y$): 固定最外層變數 $y \in [0, 1]$ 。接著固定中間變數 $x \in [0, 1]$ 。對於內層變數 z ，其範圍由 $\max\{x, y\} \leq z \leq 1$ 給出。由於積分外層需要對 x 積分，直線 $x = y$ 將 x 的區間 $[0, 1]$ 劃分成兩個部分：當 $0 \leq x \leq y$ 時， $\max\{x, y\} = y$ ，故 $y \leq z \leq 1$ ；當 $y \leq x \leq 1$ 時， $\max\{x, y\} = x$ ，故 $x \leq z \leq 1$ 。因此，該積分必須拆解爲兩項之和：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \cos(z^3) \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\max\{x, y\}}^1 \cos(z^3) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y \int_y^1 \cos(z^3) \, dz \, dx + \int_y^1 \int_x^1 \cos(z^3) \, dz \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

- (6) 積分順序 $dz dy dx$ (即 $z \rightarrow y \rightarrow x$): 固定最外層變數 $x \in [0, 1]$. 接著固定中間變數 $y \in [0, 1]$. 內層變數 z 的範圍依然為 $\max\{x, y\} \leq z \leq 1$. 此時由於 x 已被固定, 直線 $y = x$ 將 y 的區間 $[0, 1]$ 劃分成兩個部分: 當 $0 \leq y \leq x$ 時, $\max\{x, y\} = x$, 故 $x \leq z \leq 1$; 當 $x \leq y \leq 1$ 時, $\max\{x, y\} = y$, 故 $y \leq z \leq 1$. 因此:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \cos(z^3) d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\max\{x, y\}}^1 \cos(z^3) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x \int_x^1 \cos(z^3) dz dy + \int_x^1 \int_y^1 \cos(z^3) dz dy \right) dx. \end{aligned}$$

最後, 爲了求出該積分的值, 選擇第一種順序 ($x \rightarrow y \rightarrow z$) 進行運算, 可以完美利用前兩次積分產生的變數來湊微分:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \cos(z^3) d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^z \left(\int_0^z \cos(z^3) dx \right) dy dz = \int_0^1 \int_0^z (x \cos(z^3)) \Big|_{x=0}^{x=z} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^z z \cos(z^3) dy dz = \int_0^1 (yz \cos(z^3)) \Big|_{y=0}^{y=z} dz = \int_0^1 z^2 \cos(z^3) dz = \frac{\sin(1)}{3}. \end{aligned}$$

例 8.2.23 設 $a > 0$. 求由兩個圓柱體 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 與 $x^2 + z^2 \leq a^2$ 所共同交疊而成的立體區域 (即牟合方蓋) 之體積.

解 (解一) 設該立體區域為 $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + z^2 \leq a^2\}$. 觀察不等式可知, 此區域在空間中關於三個坐標平面皆完全對稱. 因此, 可先求出 Ω 位於第一卦限 (即 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 的體積, 再將其乘以 8 倍.

在第一卦限中, 由 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 與 $x^2 + z^2 \leq a^2$ 可分別解得 $y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ 與 $z \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. 又因 x, y, z 皆非負, 且實數範圍要求 $a^2 - x^2 \geq 0$, 故 $0 \leq x \leq a$. 該第一卦限的子區域可嚴格表示為:

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$

將體積視為常數函數 1 在 Ω 上的三重積分, 並化為累次積分:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 d(x, y, z) = 8 \iiint_{\Omega_1} 1 d(x, y, z) = 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} 1 dz \right) dy \right) dx \\ &= 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (z) \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{a^2 - x^2}} dy \right) dx = 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right) dx \\ &= 8 \int_0^a \left(y \sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

解 (解二) 將立體區域 Ω 視為一個關於 xy 平面的頂底區域. 由不等式 $x^2 + z^2 \leq a^2$ 可解出 z 的範圍為 $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. 此立體在 xy 平面上的投影區域 D 即為圓柱體 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 在 xy 平面上的截面, 也就是 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

該立體的體積可透過「先一後二法」化為外層為二重積分的形式:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 d(x, y, z) = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} 1 dz \right) d(x, y) \\ &= \iint_D (z) \Big|_{z=-\sqrt{a^2 - x^2}}^{z=\sqrt{a^2 - x^2}} d(x, y) = \iint_D 2\sqrt{a^2 - x^2} d(x, y). \end{aligned}$$

接著，將圓盤區域 D 視為關於 y 方向的切集，即 $D = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ 。將二重積分進一步化為累次積分計算：

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a \left(2y\sqrt{a^2-x^2} \right) \Big|_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \int_{-a}^a \left(2\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2} - 2(-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{a^2-x^2} \right) dx = \int_{-a}^a 4(a^2-x^2) dx = \frac{16}{3}a^3. \end{aligned}$$

8.3 變數變換法

重積分的變數變換公式

定理 8.3.1 (重積分的變數變換) 設 Ω 與 D 為 $\mathbb{R}^n$ 中的有界閉域。若變換 $\mathbf{g} : \Omega \rightarrow D$ 為一一對應的 C^1 函數，記為 $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ (其中 $\mathbf{u} \in \Omega, \mathbf{x} \in D$)。若其雅可比矩陣 $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u})$ 的行列式在 Ω 上恆不為零，即 $\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u}) \neq 0$ ，則對於 D 上的連續函數 $f(\mathbf{x})$ ，下列變數變換公式成立：

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

證明 嚴格的證明相當繁雜，這裡僅給出大略的方針與直觀的推導，這在應用上已經具備足夠的理解。

為了方便起見，將變數變換寫為行向量形式：

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

固定一個包含積分區域 Ω 的 n 維閉區間 K 。取 K 的一個分割 Δ ，將其分割為許多小區間 K_i (為簡化符號，這裡的下標 i 代表多重指標 $i_1 i_2 \cdots i_n$)。

考慮包含在 Ω 內的微小區間 K_i 。將 K_i 透過變換 $\mathbf{g}$ 映射到 $\mathbf{x}$ 空間後，會得到一個微小區域 $\mathbf{g}(K_i)$ (這通常不再是個長方體)。我們記此微小區域的容度為 ΔV_i 。

從 K_i 中任取一點 ξ_i 作為樣本點。對於 K_i 內的任意一點 $\xi_i + \mathbf{h}$ (其中向量 $\mathbf{h}$ 的長度 $r = \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$)，根據泰勒定理，我們可以將 $\mathbf{g}$ 在 ξ_i 附近展開：

$$\mathbf{g}(\xi_i + \mathbf{h}) = \mathbf{g}(\xi_i) + \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)\mathbf{h} + o(r),$$

其中 $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)$ 為變換 $\mathbf{g}$ 在 ξ_i 處的雅可比矩陣。

這表示，當 $\|\mathbf{h}\|$ 足夠小時，變換 $\mathbf{g}$ 在點 ξ_i 附近可以近似為一個由雅可比矩陣 $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)$ 所決定的線性變換。根據線性代數中線性變換對容度的伸縮性質，該變換的容度放大倍率恰好為矩陣行列式的絕對值 $|\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)|$ 。因此，映射後的微小容度可以近似為：

$$\Delta V_i \approx |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)| |K_i|,$$

其中 $|K_i|$ 為原來小區間的容度。(當 K_i 與 Ω 的邊界相交時，只要分割夠細，這些邊界的貢獻會隨著面積比例縮小至可忽略不計)。

將所有小區間的貢獻加總，構造黎曼和：

$$\sum_i f(\mathbf{g}(\xi_i)) \Delta V_i \approx \sum_i f(\mathbf{g}(\xi_i)) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)| |K_i|.$$

上式的右邊恰好是函數 $f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u})|$ 關於分割 Δ 與樣本點 $\{\xi_i\}$ 的黎曼和。當分割的直徑 $|\Delta| \rightarrow 0$ 時，右邊取極限即為：

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(\mathbf{g}(\xi_i)) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\xi_i)| |K_i| = \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}.$$

同時，上式的左邊是函數 $f(\mathbf{x})$ 的樣本點取值 $f(\mathbf{g}(\xi_i))$ 乘上微小容度 ΔV_i 的總和，這正是積分 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 的適當黎曼和近似。隨著 $|\Delta| \rightarrow 0$ ，上述基於線性近似的誤差也會趨於 0，因此兩邊的極限值必然相等：

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{\Omega} f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}.$$

定理得證。 $\square$

註記 8.3.2 • 由上述證明可知，作為局部容度的變換倍率，變數變換的一次近似（線性近似）會給出雅可比矩陣之行列式的絕對值。這正是為何重積分變數變換公式中必須加上絕對值的根本理由。

- 變換為一對一（即具有反函數）的假設非常重要。不過在實用上，只要變換在扣除「容度為零的集合」後能保持一對一，變數變換公式依然成立。同理，雅可比行列式不為零的假設，也只需在扣除零容度集後成立即可。

例 8.3.3 求二重積分

$$\iint_D x \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 3, 0 \leq x - 2y \leq 3\}$$

的值。

解 為簡化積分區域，觀察不等式邊界，引入變數變換 $u = x + y$ 與 $v = x - 2y$ 。透過此變換， xy 平面上的平行四邊形積分區域 D 被映射為 uv 平面上的一个矩形區域：

$$E = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 3\}.$$

接著，將 x 與 y 表示為 u 與 v 的函數。將兩變換式相減可得 $u - v = 3y$ ，即 $y = \frac{1}{3}(u - v)$ 。將其代回原式可得 $x = u - y = \frac{1}{3}(2u + v)$ 。即：

$$x = \frac{2u + v}{3}, \quad y = \frac{u - v}{3}.$$

計算該變換的雅可比行列式：

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

利用變數變換公式，將原重積分化為在矩形區域 E 上的累次積分：

$$\begin{aligned} \iint_D x \, d(x, y) &= \iint_E \left(\frac{2u + v}{3} \right) \left| -\frac{1}{3} \right| \, d(u, v) = \frac{1}{9} \int_0^3 \left(\int_0^3 (2u + v) \, du \right) \, dv \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (u^2 + uv) \Big|_{u=0}^{u=3} \, dv = \frac{1}{9} \int_0^3 (9 + 3v) \, dv = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(註：此二重積分雖然可以直接化為累次積分來計算，但因為積分區域的邊界方程式會發生折點變化，直接計算需要分段，過程並不簡便。利用一次變換將積分區域變形為長方形是極為有效的方法。另外，關於雅可比行列式的計算，由於已知 $u = x + y, v = x - 2y$ ，也可以先求其反雅可比行列式：

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3.$$

只要該行列式不為 0，根據矩陣反函數的性質， $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 即為其倒數 $-\frac{1}{3}$ 。這在遇到難以具體解出 x 與 y 的情況時，是非常實用的技巧。)

例 8.3.4 求二重積分

$$\iint_D x^2 \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 8, x^2 \leq y \leq 8x^2, x > 0\}$$

的值。

解 為簡化由雙曲線與拋物線交織而成的曲邊四邊形區域，觀察邊界不等式 $1 \leq xy \leq 8$ 與 $1 \leq y/x^2 \leq 8$ 。引入變數變換 $u = xy$ 與 $v = y/x^2$ 。透過此變換， xy 平面上的區域 D 完美對應到 uv 平面上的長方形區域：

$$E = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 8, 1 \leq v \leq 8\}.$$

接著，將 x 與 y 表示為 u 與 v 的函數。由 $u = xy$ 且 $v = y/x^2$ ，將兩式相除可得 $u/v = x^3$ ，即 $x = u^{1/3}v^{-1/3}$ 。代回 $u = xy$ 可得 $y = u/x = u^{2/3}v^{1/3}$ 。

計算雅可比行列式：

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}.$$

利用變數變換公式，將重積分化為在區域 E 上的累次積分：

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \, d(x, y) &= \iint_E (u^{1/3}v^{-1/3})^2 \cdot \left| \frac{1}{3v} \right| \, d(u, v) = \iint_E u^{2/3}v^{-2/3} \cdot \frac{1}{3v} \, d(u, v) \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\int_1^8 u^{2/3}v^{-5/3} \, du \right) \, dv = \frac{1}{3} \left(\int_1^8 u^{2/3} \, du \right) \left(\int_1^8 v^{-5/3} \, dv \right) = \frac{279}{40}. \end{aligned}$$

例 8.3.5 求二重積分

$$\iint_D (x+y)e^{x-y} \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x+y \leq 1\}$$

的值。

解 觀察積分區域 D 的邊界特徵與被積函數，引入變數變換 $s = x + y$ 與 $t = x - y$ 。首先決定新積分區域 E 的範圍：由 $x + y \leq 1$ 可知 $s \leq 1$ 。由 $y \geq 0$ 且 $y = (s - t)/2$ ，可知 $s - t \geq 0$ ，即 $s \geq t$ 。由 $x \geq y$ 且 $x - y = t$ ，可知 $t \geq 0$ 。因此，在 st 平面上的積分區域 E 為一個直角三角形：

$$E = \{(s, t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq s\}.$$

接著，將 x 與 y 表示為 s 與 t 的函數，解聯立方程式可得：

$$x = \frac{s+t}{2}, \quad y = \frac{s-t}{2}.$$

計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

利用變數變換公式, 將原重積分化為在區域 E 上的累次積分:

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)e^{x-y} d(x, y) &= \iint_E se^t \left| -\frac{1}{2} \right| d(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^s se^t dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (se^t) \Big|_{t=0}^{t=s} ds = \frac{1}{2} \int_0^1 (se^s - s) ds = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 8.3.6 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)e^{x-y} d(x, y, z),$$

其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1$, $x-y=0$, $x-y=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ 所共同圍成的有界立體區域.

解 觀察積分區域 Ω 的邊界特徵與被積函數的形式, 引入變數變換:

$$u = x+y+z, \quad v = x-y, \quad w = z.$$

透過此變換, 空間中的立體區域 Ω 被完美映射為 uvw 空間中的長方形區域:

$$E = \{(u, v, w) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}.$$

接著, 將 x, y, z 表示為 u, v, w 的函數. 由 $w = z$ 且 $u = x+y+z$, 可得 $x+y = u-w$. 又由 $v = x-y$, 聯立 $x+y = u-w$ 與 $x-y = v$ 可解得:

$$x = \frac{u+v-w}{2}, \quad y = \frac{u-v-w}{2}, \quad z = w.$$

計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

利用變數變換公式, 將原三重積分化為在區域 E 上的累次積分:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x+y+z)e^{x-y} d(x, y, z) &= \iiint_E ue^v \left| -\frac{1}{2} \right| d(u, v, w) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ue^v du dv dw = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 u du \right) \left(\int_0^1 e^v dv \right) \left(\int_0^1 1 dw \right) = \frac{e-1}{4}. \end{aligned}$$

極座標系下的二重積分

定理 8.3.7 (極座標系下的二重積分公式) 設函數 $f(x, y)$ 在區域 D 上連續, 若將直角坐標系與極座標系透過關係式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

進行變換. 若極座標系下的積分區域 E 與 D 存在一對一的對應關係 (不考慮邊界或容度為零的集合), 且 $r \geq 0$, 則二重積分的極座標變換公式為:

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d(r, \theta).$$

證明 將極座標變換視為一個從 $r\theta$ 平面到 xy 平面的映射 $\mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. 先計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

將此雅可比行列式的絕對值代入一般變數變換公式中:

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| \, d(r, \theta) = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d(r, \theta).$$

□

例 8.3.8 求二重積分

$$\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

的值.

解 觀察積分區域 D 的邊界含有圓方程式 $x^2 + y^2 \leq 4$ 以及過原點的直線 $y = 0$ 與 $y = \sqrt{3}x$, 非常適合透過極座標變換來處理. 引入極座標變換 $x = r \cos \theta$ 與 $y = r \sin \theta$. 對應到 $r\theta$ 平面上的積分區域 E 為:

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

(其中半徑上限由 $r^2 \leq 4$ 開方得 $r \leq 2$; 角度下限由 $y = 0$ 得 $\theta = 0$, 上限由 $y = \sqrt{3}x$, 即 $\tan \theta = \sqrt{3}$, 得 $\theta = \pi/3$.) 利用極座標變換公式, 將原重積分化為在區域 E 上的累次積分:

$$\begin{aligned} \iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y) &= \iint_E (r \sin \theta) \sqrt{r^2} \cdot r \, d(r, \theta) = \iint_E r^3 \sin \theta \, d(r, \theta) \\ &= \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^2 r^3 \sin \theta \, dr \right) d\theta = \left(\int_0^2 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/3} \sin \theta \, d\theta \right) = 2. \end{aligned}$$

例 8.3.9 求二重積分

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)} \, d(x, y), \quad D = \left\{ (x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x, x > 0 \right\}$$

的值.

解 引入極座標變換 $x = r \cos \theta$ 與 $y = r \sin \theta$. 對應到 $r\theta$ 平面上的積分區域 E 為:

$$E = \{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

(其中半徑範圍由 $4 \leq r^2 \leq 9$ 開根號得 $2 \leq r \leq 3$; 角度下限由 $y = x/\sqrt{3}$, 即 $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$, 得 $\theta = \pi/6$; 上限由 $y = x$, 即 $\tan \theta = 1$, 得 $\theta = \pi/4$. 限制 $x > 0$ 確保了 θ 落在第一象限.) 利用極座標變換公式, 將原重積

分化為在區域 E 上的累次積分：

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2 + y^2}{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)} d(x, y) &= \iint_E \frac{r^2}{\tan^{-1}\left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta}\right)} \cdot r d(r, \theta) = \iint_E \frac{r^3}{\theta} d(r, \theta) \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_2^3 \frac{r^3}{\theta} dr d\theta = \left(\int_2^3 r^3 dr \right) \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\theta} d\theta \right) = \frac{65}{4} \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

例 8.3.10 求二重積分

$$\iint_D xy d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0\}$$

的值。

解 (解一) 採用標準極座標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。首先決定在 $r\theta$ 平面上的積分區域 E ：將變換代入圓方程式 $x^2 + y^2 \leq 2y$ ，可得 $r^2 \leq 2r \sin \theta$ 。由於 $r \geq 0$ ，約掉 r 得到半徑的上限為 $r \leq 2 \sin \theta$ 。既然 $r \geq 0$ ，則必須滿足 $\sin \theta \geq 0$ 。同時，區域條件要求 $x \geq 0$ ，故 $\cos \theta \geq 0$ 。同時滿足 $\sin \theta \geq 0$ 與 $\cos \theta \geq 0$ 的角度範圍為 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。因此，積分區域 E 為：

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\}.$$

利用極座標變換公式，將原重積分化為在區域 E 上的累次積分：

$$\begin{aligned}\iint_D xy d(x, y) &= \iint_E (r \cos \theta)(r \sin \theta) \cdot r d(r, \theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \theta} r^3 \sin \theta \cos \theta dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_{r=0}^{r=2 \sin \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

解 (解二) 觀察到圓方程式 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 可經由配方改寫為 $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ ，其幾何意義為圓心在 $(0, 1)$ ，半徑為 1 的圓。為使積分範圍的上下界均為常數，可採用平移後的極座標變換 $x = r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta$ 。

將此變換代入圓方程式，顯然有 $r^2 \leq 1$ ，即 $0 \leq r \leq 1$ 。由條件 $x \geq 0$ 可知 $r \cos \theta \geq 0$ 。由於 $r \geq 0$ ，故 $\cos \theta \geq 0$ ，這對應到的角度範圍為 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。因此，新的積分區域 E 為一個完美的矩形：

$$E = \{(r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1\}.$$

即使平移，雅可比行列式依然為 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ 。將其化為累次積分並進行計算：

$$\begin{aligned}\iint_D xy d(x, y) &= \iint_E (r \cos \theta)(1 + r \sin \theta) \cdot r d(r, \theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^2 \cos \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta) dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} r^3 \cos \theta + \frac{1}{4} r^4 \sin \theta \cos \theta \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 8.3.11 求二重積分

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + y\}$$

的值。

解 引入極座標變換 $x = r \cos \theta$ 與 $y = r \sin \theta$. 將變換代入區域 D 的兩個不等式中: 第一個條件 $x^2 + y^2 \geq 1$ 化爲 $r^2 \geq 1$, 由於 $r \geq 0$, 即 $r \geq 1$. 這代表區域位於單位圓的外部. 第二個條件 $x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} + y$ 化爲 $r^2 \leq r + r \sin \theta$. 由於在區域內 $r \geq 1 > 0$, 將兩邊同除以 r , 可得 $r \leq 1 + \sin \theta$. 這代表區域位於心臟線 $r = 1 + \sin \theta$ 的內部.

接下來, 必須解出這兩條極曲線的交點, 以決定角度 θ 的範圍. 聯立 $r \geq 1$ 與 $r \leq 1 + \sin \theta$, 必然要求 $1 \leq 1 + \sin \theta$, 亦即 $\sin \theta \geq 0$. 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的一個完整週期內, 滿足 $\sin \theta \geq 0$ 的角度範圍爲 $0 \leq \theta \leq \pi$. 因此, 該積分區域對應到 $r\theta$ 平面上的區域 E 爲:

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 1 + \sin \theta\}.$$

利用極座標變換公式, 將原重積分化爲在區域 E 上的累次積分:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y) &= \iint_E \frac{r \sin \theta}{r} \cdot r d(r, \theta) = \iint_E r \sin \theta d(r, \theta) = \int_0^\pi \int_1^{1+\sin \theta} r \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_{r=1}^{r=1+\sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta (2 \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

球座標系與柱座標系下的三重積分

定理 8.3.12 (柱坐標系下的三重積分公式) 設函數 $f(x, y, z)$ 在空間區域 Ω 上連續, 若將直角坐標系與柱坐標系透過變換關係式

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

進行變換 (其中 $r \geq 0$). 若柱坐標系下的積分區域 E 與 Ω 存在一對一的對應關係 (不考慮邊界或容度爲零的集合), 則三重積分的柱坐標變換公式爲:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d(r, \theta, z).$$

證明 將柱坐標變換視爲從 $r\theta z$ 空間到 xyz 空間的映射 $\mathbf{g}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. 先計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \geq 0.$$

代入一般變數變換公式中, 即得柱坐標系下的三重積分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d(r, \theta, z).$$

定理得證. □

定理 8.3.13 (球座標系下的三重積分公式) 設函數 $f(x, y, z)$ 在空間區域 Ω 上連續, 若將直角坐標系與球座標系透過變換關係式

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

進行變換 (其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$). 若球座標系下的積分區域 E 與 Ω 存在一對一的對應關係 (不考慮邊界或容度爲零的集合), 則三重積分的球座標變換公式爲:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_E f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \varphi, \theta).$$

證明 將球座標變換視為從 $\rho\varphi\theta$ 空間到 xyz 空間的映射 $\mathbf{g}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$. 先計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix},$$

按第三行展開計算行列式值:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} &= \cos \varphi \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} - (-\rho \sin \varphi) \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \varphi (\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta) + \rho \sin \varphi (\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \\ &= \cos \varphi (\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \rho \sin \varphi (\rho \sin^2 \varphi) = \rho^2 \sin \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

由於向徑滿足 $\rho \geq 0$, 且極角限制在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 範圍內, 使得 $\sin \varphi \geq 0$, 故其絕對值可直接去符號為:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right| = |\rho^2 \sin \varphi| = \rho^2 \sin \varphi.$$

代入一般變數變換公式中, 即得球座標系下的三重積分公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_E f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d(\rho, \varphi, \theta).$$

□

例 8.3.14 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y, z), \quad \Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq x\}$$

的值.

解 觀察積分區域 Ω , 因包含 $x^2 + y^2$ 的旋轉拋物面特徵, 故採用柱坐標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$. 將變換代入邊界不等式, 可得 $r^2 \leq z \leq r \cos \theta$. 由此隱含了 $r^2 \leq r \cos \theta$, 因為 $r \geq 0$, 可推得 $0 \leq r \leq \cos \theta$. 要使 $\cos \theta \geq 0$, 角度範圍必須為 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 因此, 柱坐標系下的積分區域為:

$$E = \{(r, \theta, z) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta, r^2 \leq z \leq r \cos \theta\}.$$

將原積分化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y, z) &= \iiint_E r \cdot r \, d(r, \theta, z) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \theta} \left(\int_{r^2}^{r \cos \theta} r^2 \, dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \theta} r^2 (r \cos \theta - r^2) \, dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} r^4 \cos \theta - \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_{r=0}^{r=\cos \theta} d\theta = \frac{1}{20} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta = \frac{4}{75}. \end{aligned}$$

例 8.3.15 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z), \quad \Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

的值.

解 區域 Ω 由球體與圓錐體共同圍成, 採用球座標變換 $x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi$. 對於球面條件 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, 代入變換可得 $\rho^2 \leq 2\rho \cos \varphi$, 即 $\rho \leq 2 \cos \varphi$. 對於圓錐條件 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, 代入變換可得 $\rho \cos \varphi \geq \rho \sin \varphi$, 由於區域在上半空間, $\tan \varphi \leq 1$, 即 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. θ 則無特別限制, 範圍為 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 對應的球座標區域為:

$$E = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi \right\}.$$

將原積分化為累次積分:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \iiint_E \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \varphi, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \varphi} \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \pi. \end{aligned}$$

例 8.3.16 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) d(x, y, z), \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq y, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

的值.

解 區域 Ω 由圓柱面限制了底面範圍, 且高度受錐面限制, 故採用柱坐標變換. 底面圓方程式 $x^2 + y^2 \leq y$ 可化為 $r^2 \leq r \sin \theta$, 即 $0 \leq r \leq \sin \theta$. 為使 $r \geq 0$, 角度範圍限制為 $0 \leq \theta \leq \pi$. 高度條件 $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ 則化為 $0 \leq z \leq r$. 對應的柱坐標區域為:

$$E = \{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq \sin \theta, 0 \leq z \leq r \}.$$

將原積分化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) d(x, y, z) &= \iiint_E r^2 \cdot r d(r, \theta, z) = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} \int_0^r r^3 dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} r^4 dr d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_{r=0}^{r=\sin \theta} d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta = \frac{16}{75}. \end{aligned}$$

例 8.3.17 求三重積分

$$\iiint_{\Omega} z d(x, y, z), \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z, z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)} \right\}$$

的值.

解 區域 Ω 由位移的球面與展開較寬的圓錐面共同圍成, 採用球座標變換. 球面條件 $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ 代入可得 $\rho^2 \leq \rho \cos \varphi$, 即 $\rho \leq \cos \varphi$. 圓錐條件 $z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 化為 $\rho \cos \varphi \leq \sqrt{3} \rho \sin \varphi$, 整理得 $\tan \varphi \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. 考慮球面在 $z \geq 0$ 的上半空間, 故極角範圍為 $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. 對應的球座標區域為:

$$E = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \cos \varphi \right\}.$$

將原積分化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z d(x, y, z) &= \iiint_E (\rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \varphi, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \varphi} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_{\rho=0}^{\rho=\cos \varphi} d\varphi d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{4} \left(-\frac{1}{6} \cos^6 \varphi \right) \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9\pi}{256}. \end{aligned}$$

8.4 反常重積分

非負函數的反常重積分

在此之前所探討的重積分皆侷限於「有界閉區域」上的「有界函數」。然而，當積分區域無界（例如延伸至無窮遠），或者被積函數在區域內的某些邊界或奇點附近無界時，傳統的重積分便無法直接適用。爲了處理這類問題，必須透過極限的過程將積分的概念加以推廣，這便是**反常重積分**。

爲了簡化理論的建構，首先討論**非負函數**（即恆有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ）的反常重積分。

定義 8.4.1 設 D 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的子集（不必然有界或閉）。設 $I = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$ 爲一參數區間，其中 b 允許爲實數或者是 $+\infty$ 。若由 D 的子集所構成的集族 $\{D_t\}_{t \in I}$ 滿足下列三個條件，則稱其爲 D 的**漸增集族**：

- (1) 對於任意 $t \in I$, D_t 皆爲可求容度（面積/體積）的有界閉域；
- (2) 隨參數遞增性：若 $t_1, t_2 \in I$ 且 $t_1 < t_2$ ，則必有 $D_{t_1} \subseteq D_{t_2}$ ；
- (3) 窮竭性：對於任意包含於 D 內的有界閉集合 K （即 $K \subseteq D$ ），皆存在某個 $t_0 \in I$ ，使得 $K \subseteq D_{t_0}$ 。（配合條件 (2) 可知，當 $t \geq t_0$ 時恆有 $K \subseteq D_t$ ）。

註記 8.4.2 在某些教科書中，會將極限過程的指標侷限於自然數 n ，稱之爲「漸增集列」。事實上，利用離散的漸增集列去定義反常重積分，與本講義使用連續參數的「漸增集族」在數學上是完全等價的。然而，允許使用實數參數 t 能讓我們在逼近區域邊界或奇點時擁有更大的操作彈性，因此本講義後續皆採用漸增集族的視角來進行理論發展。

例 8.4.3 以下給出幾個漸增集族的例子，藉此體會如何選取適當的集合族來逼近不同類型的反常積分區域。

- (1) 無界區域：設 $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ 。若取區間 $I = [1, +\infty)$ （即 $b = +\infty$ ），則可有無限多種漸增集族的取法，例如：

- 圓形法： $D_t = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq t^2\}$
- 方形法： $E_t = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}$
- 三角形法： $F_t = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq t\}$

這三者隨著 $t \rightarrow +\infty$ 皆能窮竭整個第一象限，皆爲 D 合法的漸增集族。

- (2) 有界但不閉的區域（逼近一條線）：設 $D = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，注意其左側邊界 $x = 0$ 不在集合內。取區間 $I = [0, 1)$ ，讓參數 $t \rightarrow 1^-$ ，可定義：

$$D_t = \{(x, y) : 1 - t \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

當 t 由 0 漸增並逼近 1 時， D_t 會從右側不斷向左擴張，嚴格逼近邊界 $x = 0$ 。

- (3) 有界但不閉的區域（逼近一個奇點）：設 $D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，此爲一個被挖去原點 $(0, 0)$ 的單位圓盤。可取區間 $I = [1, +\infty)$ 且令 $t \rightarrow +\infty$ ，定義：

$$D_t = \left\{ (x, y) : \frac{1}{t^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

當 t 漸增並逼近 $+\infty$ 時， D_t 內部的挖空半徑 $1/t$ 會不斷縮小，進而完美逼近原點。

有了漸增集族的工具後，便可正式給出反常重積分的定義。

定義 8.4.4 設 f 在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上連續且恆有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$. 設 $\{D_t\}_{t \in [a, b]}$ 為 D 的任一漸增集族. 由條件 (1) 可知, 對於每個固定的 t , 重積分 $\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 皆明確存在. 進一步由條件 (2) 與 $f(\mathbf{x}) \geq 0$ 可知, 函數 $F(t) = \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 是一個對參數 t 單調遞增的實數函數.

若極限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

存在 (為一有限實數), 則稱 $f(\mathbf{x})$ 在 D 上的反常重積分**收斂**, 並定義該反常重積分的值為此極限值:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

若該極限為 $+\infty$, 則稱此反常重積分**發散**.

要讓上述定義在數學上具備實質意義, 必須證明極限值不會因為漸增集族的選取不同而改變, 這便是反常積分定義的**良定義性**. 下面給出證明:

定理 8.4.5 設 f 為 D 上的連續非負函數. 對於 D 的任意兩個漸增集族 $\{D_t\}_{t \in [a, b]}$ 與 $\{E_s\}_{s \in [c, d]}$, 恆有

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{s \rightarrow d^-} \int \cdots \int_{E_s} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

證明 設上述兩個遞增函數的極限值分別為 L_1 與 L_2 (允許為有限值或 $+\infty$). 對於任意固定的 $s \in [c, d]$, 由於 E_s 是一個包含於 D 內的有界閉域, 根據漸增集族 $\{D_t\}$ 的窮竭性 (條件 3), 必存在某個 $t_0 \in [a, b]$, 使得 $E_s \subseteq D_{t_0}$.

由於在 D 上恆有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$, 根據積分的單調性與區域的可加性, 必然有:

$$\int \cdots \int_{E_s} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{D_{t_0}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

又因為在漸增集族 $\{D_t\}$ 上的積分值隨 t 遞增, 其定積分值必定小於或等於極限值 L_1 , 因此:

$$\int \cdots \int_{E_s} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = L_1.$$

上式對於任意的 $s \in [c, d]$ 皆成立. 對等式左邊取極限 $s \rightarrow d^-$, 可得:

$$L_2 = \lim_{s \rightarrow d^-} \int \cdots \int_{E_s} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq L_1.$$

同理, 將 $\{D_t\}$ 與 $\{E_s\}$ 的角色互換, 針對任意固定的 $t \in [a, b]$, 必定存在某個 s_0 使得 $D_t \subseteq E_{s_0}$, 從而可完全對稱地推得:

$$\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq L_2.$$

對等式左邊取極限 $t \rightarrow b^-$, 即可得 $L_1 \leq L_2$.

綜合 $L_2 \leq L_1$ 與 $L_1 \leq L_2$, 即證得 $L_1 = L_2$. □

例 8.4.6 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D e^{-2x-3y} \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

解 在區域 D 上恆有 $e^{-2x-3y} > 0$, 因此我們可選取適當的漸增集族來計算. 取參數 $t \in [1, +\infty)$, 定義 D 的漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}.$$

此時, 在 D_t 上的重積分可化為累次積分:

$$\iint_{D_t} e^{-2x-3y} d(x, y) = \int_0^t e^{-2x} dx \int_0^t e^{-3y} dy = \frac{(1 - e^{-2t})(1 - e^{-3t})}{6}.$$

對參數 t 取極限, 即得該反常重積分的值:

$$\iint_D e^{-2x-3y} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{D_t} e^{-2x-3y} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{6}(1 - e^{-2t})(1 - e^{-3t}) = \frac{1}{6}.$$

例 8.4.7 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

解 在區域 D 上恆有 $y^2 e^{-x^2-y^2} \geq 0$. 配合被積函數的特徵, 選擇四分之一圓盤作為漸增集族會較為簡便. 取參數 $t \in [1, +\infty)$, 定義漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq t^2\}.$$

引入極座標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 區域 D_t 對應到 $E_t = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq t, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

$$\iint_{D_t} y^2 e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \iint_{E_t} (r \sin \theta)^2 e^{-r^2} \cdot r d(r, \theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^t r^3 e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{t^2 + 1}{e^{t^2}}\right).$$

當 $t \rightarrow +\infty$ 時,

$$\iint_D y^2 e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{t^2 + 1}{e^{t^2}}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

例 8.4.8 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}.$$

解 被積函數在邊界 $x^2 + y^2 = 4$ 上發散至 $+\infty$, 故此為反常重積分. 在區域內恆有被積函數大於 0. 取參數 $t \in [1, 2)$, 定義漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq t^2\}.$$

利用極座標變換, D_t 對應到 $E_t = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq t, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d(x, y) &= \iint_{E_t} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r d(r, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr = 2\pi \left(-\sqrt{4-r^2}\right) \Big|_{r=0}^{r=t} = 2\pi \left(2 - \sqrt{4-t^2}\right). \end{aligned}$$

取 $t \rightarrow 2^-$, 得

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 2\pi \left(2 - \sqrt{4-t^2}\right) = 4\pi.$$

例 8.4.9 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}.$$

解 被積函數在 $x = 0$ 與 $y = 0$ 這兩條邊界上發散, 且在 D 上恆正. 取參數 $t \in (0, 1]$, 定義漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : t \leq x \leq 1, t \leq y \leq 1\}.$$

計算在 D_t 上的積分:

$$\iint_{D_t} x^{-1/2} y^{-1/2} d(x, y) = \int_t^1 x^{-1/2} dx \int_t^1 y^{-1/2} dy = 4(1 - \sqrt{t})^2.$$

取 $t \rightarrow 0^+$, 得

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 4(1 - \sqrt{t})^2 = 4.$$

例 8.4.10 求下列反常三重積分的值:

$$\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z), \quad \Omega = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

解 雖然對數函數在區域內恆非正, 即 $\ln(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0$, 但因其為定號函數, 依然可直接套用漸增集族的定義進行極限運算. 取參數 $t \in (0, 1]$, 定義漸增集族 $\{\Omega_t\}$ 為

$$\Omega_t = \{(x, y, z) : t \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1\}.$$

利用球座標變換, Ω_t 對應到 $E_t = \{(\rho, \varphi, \theta) : t \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_t} \ln(x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z) &= \iiint_{E_t} \ln(\rho^2) \cdot \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \varphi, \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_t^1 2\rho^2 \ln \rho d\rho = 4\pi \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{3}t^3 \ln t + \frac{2}{9}t^3 \right). \end{aligned}$$

對參數 t 取極限, 得

$$\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 4\pi \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{3}t^3 \ln t + \frac{2}{9}t^3 \right) = -\frac{8\pi}{9}.$$

例 8.4.11 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D \frac{x^2 y}{(x^3 + y^2)^3} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}.$$

解 在區域 D 上恆有被積函數大於 0. 取參數 $t \in [1, +\infty)$, 定義漸增集族 $\{D_t\}$ 為:

$$D_t = \{(x, y) : 1 \leq x \leq t, 1 \leq y \leq t\}.$$

不難計算:

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} \frac{x^2 y}{(x^3 + y^2)^3} d(x, y) &= \int_1^t \int_1^t \frac{x^2 y}{(x^3 + y^2)^3} dx dy = \int_1^t \left(-\frac{y}{6(x^3 + y^2)^2} \right) \Big|_{x=1}^{x=t} dy \\ &= \frac{1}{6} \int_1^t \left(\frac{y}{(1 + y^2)^2} - \frac{y}{(t^3 + y^2)^2} \right) dy = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2(1 + y^2)} + \frac{1}{2(t^3 + y^2)} \right) \Big|_{y=1}^{y=t} \\ &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{t^3 + t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t^3 + 1} \right). \end{aligned}$$

取 $t \rightarrow +\infty$,

$$\iint_D \frac{x^2 y}{(x^3 + y^2)^3} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{t^3 + t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t^3 + 1} \right) = \frac{1}{24}.$$

例 8.4.12 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D e^{x/y} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq 1\}.$$

解 被積函數在 D 恆大於 0. 取參數 $t \in (0, 1]$, 定義漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, t \leq y \leq 1\}.$$

在 D_t 上積分,

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} e^{x/y} d(x, y) &= \int_t^1 \int_0^{y^2} e^{x/y} dx dy = \int_t^1 (ye^{x/y}) \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy \\ &= \int_t^1 y(e^y - 1) dy = -\frac{1}{2} - te^t + e^t + \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow 0^+$, 得

$$\iint_D e^{x/y} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} - te^t + e^t + \frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{1}{2}.$$

例 8.4.13 求下列反常重積分的值:

$$\iint_D ye^{-x^3} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}.$$

解 被積函數恆非負. 取參數 $t \in [0, +\infty)$, 考慮如下漸增集族 $\{D_t\}$:

$$D_t = \{(x, y) : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}.$$

在 D_t 上積分,

$$\iint_{D_t} ye^{-x^3} d(x, y) = \int_0^t \int_0^x ye^{-x^3} dy dx = \int_0^t e^{-x^3} \left(\frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{2} \int_0^t x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{6}(1 - e^{-t^3}).$$

對參數 t 取極限, 即得該反常重積分的值:

$$\iint_D ye^{-x^3} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{6}(1 - e^{-t^3}) = \frac{1}{6}.$$

定義 8.4.14 定義函數

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0),$$

稱為**貝塔函數**.

命題 8.4.15 (伽瑪函數與貝塔函數的關係式) 對於任意 $p > 0, q > 0$, 恆有下列公式成立:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

證明 對於 $p > 0, q > 0$, 考慮反常二重積分

$$I = \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)} d(x, y), \quad D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

由於在 D 上恆有 $f(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)} > 0$, 因此可選取適當的漸增集族來計算其極限.

首先, 取參數 $t \in [1, +\infty)$, 定義 D 的第一個漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \left\{ (x, y) : \frac{1}{t} \leq x \leq t, \frac{1}{t} \leq y \leq t \right\}.$$

此時, 被積函數 f 為變數分離形, 故在 D_t 上的積分可寫為

$$\iint_{D_t} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{1/t}^t x^{p-1} e^{-x} \, dx \int_{1/t}^t y^{q-1} e^{-y} \, dy.$$

對參數 t 取極限, 可得

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{D_t} f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} \, dy = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

另一方面, 定義 D 的第二個漸增集族 $\{E_t\}$ 為

$$E_t = \left\{ (x, y) : \frac{x}{t} \leq y \leq tx, \frac{1}{t} \leq x + y \leq t \right\}.$$

(這是一個由兩條過原點的射線與兩條斜率為 -1 的直線所圍成的梯形區域.) 引入變數變換 $x = uv, y = u(1-v)$, 則區域 E_t 將對應到 uv 平面上的矩形區域 E'_t :

$$E'_t = \left\{ (u, v) : \frac{1}{t} \leq u \leq t, \frac{1}{t+1} \leq v \leq \frac{t}{t+1} \right\}.$$

計算該變換的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

代入變數變換公式 (注意到因 $u = x + y > 0$, 故 $|-u| = u$), 得

$$\begin{aligned} \iint_{E_t} f(x, y) \, d(x, y) &= \iint_{E'_t} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} \cdot u \, d(u, v) \\ &= \iint_{E'_t} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} \, d(u, v) \\ &= \int_{1/t}^t u^{p+q-1} e^{-u} \, du \int_{1/(t+1)}^{t/(t+1)} v^{p-1} (1-v)^{q-1} \, dv. \end{aligned}$$

對參數 t 取極限, 亦可得到反常積分之值:

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{E_t} f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \, du \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} \, dv = \Gamma(p+q)B(p, q).$$

綜合上述兩種計算結果, 根據反常重積分極限值的良定義性 (或算兩次原理), 必須有

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q).$$

由於 $p+q > 0$, 可知 $\Gamma(p+q) \neq 0$. 將等式兩邊同除以 $\Gamma(p+q)$, 即證得

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

最後, 下面給出非負函數的比較判斂準則:

準則 8.4.16 (非負函數重積分的比較判斂準則) 設 f 與 g 皆為定義在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的連續非負函數. 若在 D 上恆滿足不等式:

$$0 \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}),$$

則關於這兩個函數在 D 上的反常重積分, 下列性質成立:

(1) 若 $\int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 收斂, 則 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 亦必定收斂, 且滿足:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

(2) 若 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 發散 (至 $+\infty$), 則 $\int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 亦必定發散 (至 $+\infty$).

證明 設 $\{D_t\}_{t \in [a, b]}$ 為區域 D 的任意一個漸增集族. 由於在 D 上恆有 $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, 且每個 D_t 皆為有界閉域 (在其上的積分為常義的重積分), 根據重積分的保序性, 對於所有的 $t \in [a, b]$, 皆有:

$$\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

又因為 f 與 g 皆為非負函數, 隨著參數 t 遞增, 上述兩個重積分皆為 t 的增函數.

(1) 設 $\int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 收斂. 根據非負函數反常重積分的定義, 這表示極限值存在且為一有限實數 L :

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = L < +\infty.$$

由於定積分隨 t 單調遞增, 我們可推得對於所有的 $t \in [a, b]$, 皆有

$$\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq L.$$

這說明函數 $F(t) = \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 是一個單調遞增且有上界的實數函數. 根據實數系的單調有界收斂準則, 其極限 $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ 必然存在且為一有限實數, 這證明了 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 收斂. 對不等式 $\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 兩邊取極限 $t \rightarrow b^-$, 即得

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

(2) 設 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 發散. 由於是非負函數的單調遞增極限, 這意味著:

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = +\infty.$$

因為對於所有的 $t \in [a, b]$, 皆滿足不等式:

$$\int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

根據極限的比較性質, 當較小的函數趨向於 $+\infty$ 時, 較大的函數也必然趨向於 $+\infty$. 因此,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = +\infty.$$

這證明了 $\int \cdots \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 發散.

□

一般函數的反常重積分

前面探討了非負函數的反常重積分。當函數 $f(\mathbf{x})$ 在積分區域 D 上不為定號 (即有正有負) 時, 不能單純地取一個漸增集族 $\{D_t\}$ 然後定義積分爲 $\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 。原因是這個極限未必存在, 就算存在, 其極限值也可能因爲漸增集族的形狀或選取不同而改變 (這類似於單變數中「條件收斂」的無窮級數會因重排而改變收斂值)。因此, 必須利用先前定義好的「非負函數反常重積分」來嚴格定義一般實函數的反常重積分。

定義 8.4.17 設函數 $f(\mathbf{x})$ 在區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上連續。定義 $f(\mathbf{x})$ 的**正部**與**負部**如下:

$$f_+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\}, \quad f_-(\mathbf{x}) = -\min\{f(\mathbf{x}), 0\}.$$

由定義可知, $f_+(\mathbf{x})$ 與 $f_-(\mathbf{x})$ 在 D 上皆爲非負連續函數。並且恆有:

$$f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x}), \quad |f(\mathbf{x})| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x}).$$

因 f_+ 與 f_- 皆爲定號 (非負) 函數, 故可以探討它們在 D 上的反常重積分。若非負函數的反常重積分 $\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 與 $\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 兩者皆收斂, 則稱函數 f 在 D 上的反常重積分 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ **收斂**, 並將其值定義爲兩者極限值之差:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

若 $\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 與 $\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 之中至少有一個發散, 則稱該反常重積分**發散**。

定理 8.4.18 (反常重積分收斂的充要條件) 設 f 在 D 上連續。關於其反常重積分 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$, 下列性質成立:

(1) 絕對收斂等價性:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \text{ 收斂} \iff \int \cdots \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \text{ 收斂}.$$

(2) 極限計算的自由性: 若 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 確定收斂, 則對於 D 的任意漸增集族 $\{D_t\}_{t \in [a, b)}$, 其反常重積分皆可直接透過取極限來計算:

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

證明 (1) 必要性: 假設反常重積分 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 收斂。根據一般實函數的反常積分定義, 這意味著兩個非負函數的反常積分 $\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 與 $\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 兩者皆收斂。由於 $|f(\mathbf{x})| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x})$, 且反常重積分對於收斂的非負函數具有線性性, 因此:

$$\int \cdots \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

兩個有限實數之和必然也是有限實數, 故 $\int \cdots \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$ 收斂。

充分性: 反之, 假設絕對值的反常重積分 $\int \cdots \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$ 收斂。由於在積分區域 D 上恆有不等式 $0 \leq f_+(\mathbf{x}) \leq |f(\mathbf{x})|$ 以及 $0 \leq f_-(\mathbf{x}) \leq |f(\mathbf{x})|$, 根據準則 8.4.16, 由較小函數所構成的反常積分也必定收斂。因此, $\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 與 $\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 皆各自收斂。再由定義可知, 其差值 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 必定收斂。

(2) 既然 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 已經確定收斂, 則 $\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 與 $\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ 皆收斂於某個有限實數。給定 D 的任意漸增集族 $\{D_t\}_{t \in [a, b)}$, 由於 f_+ 與 f_- 爲非負函數, 根據非負函數反常積分極限值的「良定義性」, 可直接透過該漸增集族來取極限:

$$\int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

注意到在每一個固定的有界閉子區域 D_t 上, 函數 $f(\mathbf{x})$ 是正常的黎曼可積分, 故滿足黎曼積分的線性性質:

$$\int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{D_t} (f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{D_t} f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int \cdots \int_{D_t} f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

對上式兩邊取極限 $t \rightarrow b^-$, 由於等式右邊的兩個極限皆存在且有限, 根據極限的線性法則, 我們可以將極限運算子分別分配進去:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \lim_{t \rightarrow b^-} \left(\int \cdots \int_{D_t} f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int \cdots \int_{D_t} f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_D f_+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int \cdots \int_D f_-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

根據一般實函數反常積分的定義, 最後一行的差值正是原積分 $\int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. 故

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int \cdots \int_{D_t} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

註記 8.4.19 在無窮級數或單變數函數的反常積分中, 收斂性被細分為「絕對收斂」與「條件收斂」。然而, 根據上述定理的第 (1) 點可知, 在二重或更高維度的反常重積分中, 收斂必然意味著絕對收斂, 不存在所謂的條件收斂。此外, 正因為收斂完全等價於絕對收斂, 在判定一般反常重積分的收斂與發散時, 可以完全放心地對 $|f(\mathbf{x})|$ 使用比較判斂準則。

另外, 由上述定理的第 (2) 點, 可知只要找到兩個不通的漸增集族, 使得函數分別在它們上求重積分再取極限的結果或者不相等, 或者有一者發散, 便可說明所求反常重積分發散。

例 8.4.20 證明反常重積分

$$\iint_D \frac{3x - 4y}{x^2 + y^2} \, d(x, y), \quad D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

收斂, 並求出其值。

解 觀察被積函數 $f(x, y) = (3x - 4y)/(x^2 + y^2)$, 由於在積分區域 D 上, $3x - 4y$ 的值有正有負, 故其不為定號函數。根據一般實函數反常重積分的定義, 必須先驗證其「絕對收斂性」, 之後才能利用漸增集族來計算極限。

利用柯西-施瓦茨不等式, 在區域 D 上恆有:

$$|3x - 4y| \leq \sqrt{3^2 + (-4)^2} \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

因此, 對於被積函數的絕對值, 有如下估計:

$$\left| \frac{3x - 4y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{5\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{5}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

取參數 $t \in (0, 3]$, 定義 D 的漸增集族 $\{D_t\}$ 為

$$D_t = \{(x, y) : t \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

引入極座標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 區域 D_t 對應到 $E_t = \{(r, \theta) : t \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. 先計算函數 $5/\sqrt{x^2 + y^2}$ 在 D_t 上的積分:

$$\iint_{D_t} \frac{5}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y) = \iint_{E_t} \frac{5}{r} \cdot r d(r, \theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_t^3 5 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 5(3 - t) = \frac{5\pi}{2}(3 - t).$$

當參數 $t \rightarrow 0^+$ 時, 該極限值為 $15\pi/2$ (存在且有限). 根據比較判斂準則可知, 該定號函數的反常積分收斂, 故原反常重積分絕對收斂.

既然已經確定原積分絕對收斂, 根據良定義性, 便可直接利用同一個漸增集族 $\{D_t\}$ 來計算原積分的值:

$$\iint_{D_t} \frac{3x - 4y}{x^2 + y^2} d(x, y) = \iint_{E_t} \frac{r(3 \cos \theta - 4 \sin \theta)}{r^2} \cdot r d(r, \theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta - 4 \sin \theta) d\theta \int_t^3 1 dr = t - 3.$$

對參數 t 取極限, 即得該反常重積分之值:

$$\iint_D \frac{3x - 4y}{x^2 + y^2} d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t - 3) = -3.$$

(註: 處理此類非定號函數的反常重積分時, 切忌省略絕對收斂的證明. 若不確認絕對收斂就直接取某個漸增集族算出數值, 該結果在數學邏輯上是不可靠的.)

例 8.4.21 定義 $\mathbb{R}^2$ 的部分集合 D 與 D 上的函數 f 如下:

$$D = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}.$$

(1) 對於 $D_t = \{(x, y) : t \leq x \leq 1, t \leq y \leq 1\}$, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{D_t} f(x, y) d(x, y)$.

(2) 對於 $E_t = \{(x, y) : t^2 \leq x \leq 1, t \leq y \leq 1\}$, 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{E_t} f(x, y) d(x, y)$.

(3) 判斷反常重積分 $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ 的斂散性.

解 (1) 區域 $D_t = [t, 1] \times [t, 1]$, 將其化為累次積分並計算:

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f(x, y) d(x, y) &= \int_t^1 \left(\int_t^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_t^1 \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \Big|_{y=t}^{y=1} dx = \int_t^1 \left(\frac{1-t}{x^2} + 1 - \frac{1}{t} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

(事實上, 從積分區域 D_t 關於對角線 $y = x$ 對稱, 且 $f(y, x) = -f(x, y)$ 也可直接看出積分值為 0). 因此,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{D_t} f(x, y) d(x, y) = 0.$$

(2) 區域 $E_t = [t^2, 1] \times [t, 1]$, 延續 (1) 中對 y 的積分結果, 直接代入不同的 x 界限:

$$\iint_{E_t} f(x, y) d(x, y) = \int_{t^2}^1 \left(\int_t^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) dy \right) dx = \int_{t^2}^1 \left(\frac{1-t}{x^2} + 1 - \frac{1}{t} \right) dx = \frac{1-2t}{t^2} + 2t - t^2.$$

對參數 t 取極限, 可得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{E_t} f(x, y) d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-2t}{t^2} + 2t - t^2 \right) = +\infty.$$

(3) 針對 D 選取不同的漸增集族 $\{D_t\}$ 與 $\{E_t\}$, 由於

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{D_t} f(x, y) d(x, y) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{E_t} f(x, y) d(x, y),$$

極限值會隨著漸增集族的選取而改變 (且存在趨向 $+\infty$ 的情況), 因此反常重積分 $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ 發散.

例 8.4.22 定義 $\mathbb{R}^2$ 的部分集合 D 與 D 上的函數 f 如下:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(1) 求 (反常) 累次積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ 的值.

(2) 求 (反常) 累次積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ 的值.

(3) 判斷反常重積分 $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ 的斂散性.

解 (1) 先將 x 視為常數, 對 y 求不定積分:

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

當 $x > 0$ 時, 內層積分為:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2 + 1},$$

這在包含 $x = 0$ 處依然連續可積, 繼續對 x 積分得:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 類似地, 將 y 視為常數, 對 x 求不定積分:

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

當 $y > 0$ 時, 內層積分為:

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \frac{-x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

繼續對 y 積分, 得

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \frac{-1}{1 + y^2} dy = -\tan^{-1} y \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

(3) 觀察函數 $f(x, y)$ 在 D 中的正部, 當 $x > y$ 時恆有 $f(x, y) > 0$. 令

$$D^+ = \{(x, y) \in D : x > y\} = \{(x, y) : 0 \leq y < x \leq 1\}.$$

取 D^+ 的漸增集族 $\{D_t^+\}$ 為

$$D_t^+ = \{(x, y) : t \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \quad (t \in (0, 1]).$$

在此區域上計算積分:

$$\iint_{D_t^+} f(x, y) d(x, y) = \int_t^1 \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = \int_t^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_t^1 \frac{1}{2x} dx = -\frac{1}{2} \ln t.$$

對參數 t 取極限, 可得:

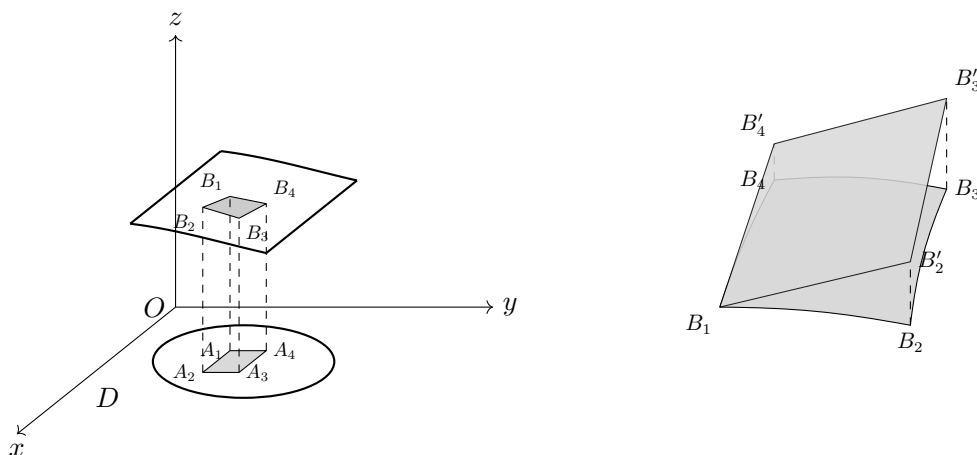
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \iint_{D_t^+} f(x, y) d(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} \ln t \right) = +\infty.$$

由於 $f(x, y)$ 在 D^+ 區域 (即正部) 的積分發散至 $+\infty$, 根據一般實函數反常重積分的定義 (必須正部與負部皆收斂), 反常重積分 $\iint_D f(x, y) d(x, y)$ 發散.

註記 8.4.23 第二題展示了一個非常重要的觀念: 當函數的反常重積分發散時, 儘管其兩種順序的累次積分可能各自存在, 但調換積分順序會得到完全不同的結果. 這警示我們, 絕對不可隨意對未確認「絕對收斂」的反常重積分交換積分順序 (這正是傅比尼定理的核心限制).

8.5 重積分的應用

幾何學方面——表面積



定理 8.5.1 (函數曲面的面積公式) 設函數 f 在積分區域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上具有一階連續偏導數, 則位於 D 上方的曲面 $z = f(x, y)$ 的曲面積 S 為

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, d(x, y).$$

證明 將區域 D 用平行於 x 軸與 y 軸的直線分割為細小的網格. 設 D 內部包含的其中一個小矩形為 $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$, 並記其四個頂點為

$$A_1(x, y), \quad A_2(x + \Delta x, y), \quad A_3(x + \Delta x, y + \Delta y), \quad A_4(x, y + \Delta y),$$

如上圖所示. 隨著 D 被細分, 對應的曲面 $z = f(x, y)$ 也被分割. 設 xy 平面上的點 A_j 對應到曲面上的點為 B_j , 則矩形 $A_1A_2A_3A_4$ 對應到曲面上的微小區塊 $B_1B_2B_3B_4$, 其曲面面積 ΔS 可作如下近似.

首先, 考慮曲面在點 $B_1(x, y, f(x, y))$ 處的切平面, 並設 A_j 投影在該切平面上的對應點為 B'_j . 透過偏導數的幾何意義, 可寫出切平面上的兩個切向量:

$$\overrightarrow{B_1B'_2} = \Delta x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x, y) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B_1B'_4} = \Delta y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

當 $\Delta x, \Delta y$ 足夠小時, 對於 $j = 2, 3, 4$, 曲面上的點 B_j 與切平面上的點 B'_j 會非常靠近. 因此, 曲面微小區塊的曲面面積 ΔS 可以用切平面上的平行四邊形 $B_1B'_2B'_4B'_3$ 的面積來近似 (利用拉格朗日恆等式):

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx \sqrt{|\overrightarrow{B_1B'_2}|^2 |\overrightarrow{B_1B'_4}|^2 - (\overrightarrow{B_1B'_2} \cdot \overrightarrow{B_1B'_4})^2} \\ &= \sqrt{(1 + (f'_x(x, y))^2) (\Delta x)^2 + (f'_y(x, y))^2 (\Delta y)^2 - (f'_x(x, y) \Delta x \Delta y)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

將所有劃分小矩形對應的微小曲面積 ΔS 加總起來, 可得到總曲面面積的近似值:

$$S = \sum \Delta S \approx \sum \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \Delta x \Delta y.$$

將 D 的分割無限細化並取極限, 上述近似式中微小區塊 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 與平行四邊形 $B_1 B'_2 B'_3 B'_4$ 面積的誤差將趨於零而成爲等號, 右端即轉化爲黎曼和的極限:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, d(x, y).$$

□

例 8.5.2 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 介於 $z \geq 2$ 的部分之曲面面積.

解 由於 $z \geq 2 > 0$, 球面方程式可寫爲 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. 分別求對 x 與 y 的偏導數:

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},$$

由此可得曲面面積微元的係數爲

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

另外, 積分區域由 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \geq 2$ 兩邊平方整理可得

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

引入極座標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 積分區域 D 對應爲

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{12}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

因此, 曲面面積爲

$$S = \iint_E \frac{4}{\sqrt{16 - r^2}} r \, d(r, \theta) = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{12}} \frac{r}{\sqrt{16 - r^2}} \, dr = 16\pi \quad (\text{平方單位}).$$

例 8.5.3 求半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) 被包含於圓柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 內部的部分之曲面面積.

解 由題意知 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 偏導數爲

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

曲面面積微元的係數爲

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

積分區域爲圓柱的內部, 即

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y\}.$$

引入極座標變換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 圓柱面方程式化爲 $r^2 \leq 2r \sin \theta$, 即 $r \leq 2 \sin \theta$. 爲使 $r \geq 0$, 必須有 $\sin \theta \geq 0$, 故積分區域 D 對應爲

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\}.$$

於是, 所求曲面面積 S 爲

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \, d(x, y) = \iint_E \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(-2\sqrt{4 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=2 \sin \theta} \, d\theta = \int_0^\pi \left(-2\sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} - (-2\sqrt{4}) \right) \, d\theta \\ &= \int_0^\pi (4 - 4|\cos \theta|) \, d\theta = 4\pi - 4 \int_0^\pi |\cos \theta| \, d\theta. \end{aligned}$$

由於 $\cos \theta$ 在 $[0, \pi/2]$ 爲正, 在 $[\pi/2, \pi]$ 爲負:

$$\int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi \cos \theta d\theta = 2.$$

因此, 最終曲面積爲 $S = 4\pi - 4 \cdot 2 = 4\pi - 8$ (平方單位).

例 8.5.4 求立體 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ 與旋轉拋物面 $z \geq x^2 + y^2$ 之交的表面積.

解 該立體的表面積由上方的球冠部分與下方的旋轉拋物面部分組成. 首先求兩曲面的交線, 聯立 $z = x^2 + y^2$ 與 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, 得到 $z + z^2 = 2$, 即 $(z+2)(z-1) = 0$. 由於在交集中 $z \geq 0$, 故 $z = 1$, 此時 $x^2 + y^2 = 1$. 因此, 兩曲面在 xy 平面的投影區域 (即積分區域) 皆爲

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

設上方球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 的面積爲 S_1 , 其 $z'_x = -x/\sqrt{2 - x^2 - y^2}$, $z'_y = -y/\sqrt{2 - x^2 - y^2}$, 從而 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}/\sqrt{2 - x^2 - y^2}$. 利用極座標變換計算 S_1 :

$$S_1 = \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} d(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2 - r^2}} dr = 4\pi - 2\sqrt{2}\pi \quad (\text{平方單位}).$$

設下方拋物面 $z = x^2 + y^2$ 的面積爲 S_2 , 其 $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, 從而 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. 同理計算 S_2 :

$$S_2 = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1) \quad (\text{平方單位}).$$

因此, 所求總表面積 S 爲

$$S = S_1 + S_2 = 4\pi - 2\sqrt{2}\pi + \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi = \frac{23 - 12\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{6}\pi \quad (\text{平方單位}).$$

例 8.5.5 求旋轉拋物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 被雙紐線柱面 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所截出部分的曲面面積.

解 拋物面方程式爲 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 其偏導數爲 $z'_x = x$, $z'_y = y$. 曲面面積微元的係數爲

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

將雙紐線 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 化爲極座標, 得到 $r^4 = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, 即 $r^2 = \cos 2\theta$. 由於必須有 $\cos 2\theta \geq 0$, θ 的範圍爲 $[-\pi/4, \pi/4]$ 與 $[3\pi/4, 5\pi/4]$. 因爲旋轉拋物面與雙紐線柱面皆對 x 軸與 y 軸對稱, 所以可只求第一象限的部分再乘以 4. 設第一象限的積分區域爲 D' , 在極座標下對應爲

$$E = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\theta}\}.$$

於是所求曲面積 S 爲

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{D'} \sqrt{1 + x^2 + y^2} d(x, y) = 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\sqrt{1 + r^2} dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2} \right) \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/4} ((1 + \cos(2\theta))^{3/2} - 1) d\theta = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3} \quad (\text{平方單位}). \end{aligned}$$

定理 8.5.6 (參數曲面的面積公式) 若曲面 S 由參數方程式

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad ((u, v) \in D)$$

給出, 其中 D 是一個平面有界閉區域, 又 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 在 D 上具有連續的一階偏導數, 且三個雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

不全為零, 則曲面 S 的面積為

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, d(u, v),$$

其中

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2. \end{aligned}$$

(此處 E, F, G 稱為曲面 S 的**第一基本量**).

證明 設曲面 S 上的點的位置向量為 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. 當參數 u, v 分別有微小增量 du, dv 時, 在參數區域 D 內的微小矩形 $[du, dv]$ 會映射到曲面 S 上的一個微小曲面區塊. 由於曲面是平滑的, 這塊微小曲面區塊可以近似為由兩個切向量所張成的微小平行四邊形. 這兩個沿著參數曲線方向的切向量分別為:

$$\mathbf{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u), \quad \mathbf{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

因此, 該微小平行四邊形的面積微元 dS 可由這兩個切向量的叉積長度來計算:

$$dS = \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, du \, dv.$$

根據拉格朗日恆等式, 向量外積長度的平方可以表示為內積的形式:

$$\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|^2 = \|\mathbf{r}'_u\|^2 \|\mathbf{r}'_v\|^2 - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2.$$

分別計算其中的各項內積值 (這恰好對應到曲面的第一基本量):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'_u\|^2 &= \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = E, \\ \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F, \\ \|\mathbf{r}'_v\|^2 &= \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = G. \end{aligned}$$

代回拉格朗日恆等式, 可得

$$\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|^2 = EG - F^2.$$

(由於前提給定「三個雅可比行列式不全為零」, 幾何上意味著法向量 $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$, 因此保證了 $EG - F^2 > 0$.)

將其開平方, 面積微元便可表示為:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

最後, 將此面積微元在參數區域 D 上進行二重積分, 即可得到曲面 S 的總面積:

$$S = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, d(u, v).$$

定理得證. □

例 8.5.7 求由參數方程式

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v, \\ y = (a + b \cos u) \sin v, \\ z = b \sin u \end{cases} \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

所決定的環面之表面積，其中常數滿足 $a > b > 0$ 。

解 已知參數空間為 $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ 。首先計算各個坐標函數對參數 u, v 的一階偏導數：

$$\begin{aligned} x'_u &= -b \sin u \cos v, & x'_v &= -(a + b \cos u) \sin v, \\ y'_u &= -b \sin u \sin v, & y'_v &= (a + b \cos u) \cos v, \\ z'_u &= b \cos u, & z'_v &= 0. \end{aligned}$$

接著，計算曲面的第一基本量 E, F, G ：

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = (-b \sin u \cos v)^2 + (-b \sin u \sin v)^2 + (b \cos u)^2 = b^2, \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = (-b \sin u \cos v)(-(a + b \cos u) \sin v) + (-b \sin u \sin v)((a + b \cos u) \cos v) = 0, \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = (-(a + b \cos u) \sin v)^2 + ((a + b \cos u) \cos v)^2 + 0 = (a + b \cos u)^2. \end{aligned}$$

代入面積微元公式，由於 $a > b > 0$ ，恆有 $a + b \cos u > 0$ ，故得：

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{b^2(a + b \cos u)^2 - 0} = b(a + b \cos u).$$

最後，將面積微元在參數區域 D 上進行二重積分，即可求得環面的總面積 A ：

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, d(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} (b(au + b \sin u)) \Big|_{u=0}^{u=2\pi} \, dv = \int_0^{2\pi} 2\pi ab \, dv = 4\pi^2 ab \quad (\text{平方單位}). \end{aligned}$$

定理 8.5.8 (隱式方程式給出的曲面面積公式) 若曲面 S 由隱式方程式 $F(x, y, z) = c$ 給出，且對應到一個有界閉平面區域 R 上，則曲面 S 的面積可由下列公式計算：

$$S = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{\|\nabla F \cdot \mathbf{p}\|} \, dA,$$

其中 $\mathbf{p} = \mathbf{i}, \mathbf{j}$ 或 $\mathbf{k}$ 為垂直於區域 R 的法向量，且必須滿足 $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$ 。

註記 8.5.9 在實際計算中， $\mathbf{p}$ 的選取取決於我們將曲面投影到哪一個坐標平面上：

- (1) 若投影區域 R 位於 xy 平面，則法向量選取 $\mathbf{p} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ 。此時梯度向量為 $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ ，內積 $\nabla F \cdot \mathbf{k} = F'_z$ 。面積微元 dA 即為 $d(x, y)$ ，公式具體展開為：

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} \, d(x, y).$$

- (2) 同理，若投影區域 R 位於 yz 平面，則 $\mathbf{p} = \mathbf{i}$ ，對應的分母為 $|F'_x|$ ，微元為 $d(y, z)$ ：

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_x|} \, d(y, z).$$

(3) 若投影區域 R 位於 zx 平面, 則 $\mathbf{p} = \mathbf{j}$, 對應的分母為 $|F'_y|$, 微元為 $d(z, x)$:

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_y|} d(z, x).$$

證明 不失一般性, 設曲面 S 投影到 xy 平面上的區域為 R , 即此時法向量選取為 $\mathbf{p} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. 根據隱函數定理, 若在曲面上某點滿足 $F'_z(x, y, z) \neq 0$ (即 $\nabla F \cdot \mathbf{k} \neq 0$), 則方程式 $F(x, y, z) = c$ 在該點附近可局部確定出一個單值連續可微的函數 $z = f(x, y)$. 利用隱函數微分法, 可求出 z 對 x 與 y 的一階偏導數:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

根據先前推導過的顯式曲面面積公式, 曲面 S 的面積可表示為:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d(x, y).$$

將隱函數微分的結果代入上式中的面積微元係數:

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(-\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|}.$$

注意到隱函數 F 的梯度向量為 $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$, 故其長度為

$$\|\nabla F\| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}.$$

同時, 梯度向量與投影面法向量 $\mathbf{k}$ 的內積之絕對值為:

$$|\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |(F'_x, F'_y, F'_z) \cdot (0, 0, 1)| = |F'_z|.$$

將這兩個幾何量代回面積微元的表達式中, 可得

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|}.$$

最後, 將此面積微元代回二重積分中, 即得證投影在 xy 平面時的面積公式:

$$S = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{k}|} d(x, y).$$

若曲面投影在 yz 平面或 zx 平面, 分別選取 $\mathbf{p} = \mathbf{i}$ 與 $\mathbf{p} = \mathbf{j}$, 利用完全對稱的隱函數求導與代換過程, 亦可得到相同的公式結構. 故對應於任意坐標投影面之法向量 $\mathbf{p}$, 一般性的隱式曲面面積公式皆可表為:

$$S = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA.$$

□

例 8.5.10 利用隱式方程式給出的曲面面積公式, 求錐面 $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ 介於平面 $y = 1$ 與 $y = 2$ 之間的部分的曲面積.

解 令隱式函數為 $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, 則該錐面方程式可表示為 $F(x, y, z) = 0$. 觀察該曲面的幾何特徵, 選擇將其投影到 zx 平面上. 當 $y = 1$ 時, 截痕為 $x^2 + z^2 = 1$; 當 $y = 2$ 時, 截痕為 $x^2 + z^2 = 4$. 因此, 該曲面在 zx 平面上的投影區域為一個圓環:

$$R = \{(x, z) : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4\}.$$

既然投影面為 zx 平面，垂直於投影面的單位法向量應選取為 $\mathbf{p} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ 。接著，不難算出 F 的梯度向量為

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2x, -2y, 2z),$$

其長度為

$$\|\nabla F\| = \sqrt{(2x)^2 + (-2y)^2 + (2z)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}.$$

由於在該錐面上恆滿足 $x^2 + z^2 = y^2$ ，且在此範圍內 $y > 0$ ，因此可將上式進一步化簡為：

$$\|\nabla F\| = \sqrt{4y^2 + 4(x^2 + z^2)} = \sqrt{4y^2 + 4y^2} = 2\sqrt{2}y.$$

再來，容易得到梯度向量與 $\mathbf{j}$ 的內積之絕對值為

$$|\nabla F \cdot \mathbf{j}| = |F'_y| = |-2y| = 2y.$$

代入隱式曲面的面積微元公式，可得積分的被積函數：

$$\frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{j}|} = \frac{2\sqrt{2}y}{2y} = \sqrt{2}.$$

最後，將其在投影區域 R 上進行二重積分。引入極座標變換 $x = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ ，投影區域 R 對應為 $E = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 。所求曲面積 S 為：

$$S = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \cdot \mathbf{j}|} d(z, x) = \iint_R \sqrt{2} d(z, x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \sqrt{2}r dr = 3\sqrt{2}\pi \quad (\text{平方單位}).$$

物理學方面

定義 8.5.11 先探討平面薄片。設有一平面薄片佔有 xy 面上的閉域 D ，在點 (x, y) 處的面密度為 $\mu(x, y)$ （假定在 D 上連續）。該薄片的總質量為

$$M = \iint_D \mu(x, y) d(x, y).$$

其對 y 軸與 x 軸的靜矩分別定義為

$$M_y = \iint_D x\mu(x, y) d(x, y), \quad M_x = \iint_D y\mu(x, y) d(x, y).$$

則該平面薄片的質心坐標 $(\bar{x}, \bar{y})$ 為

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x, y) d(x, y)}{\iint_D \mu(x, y) d(x, y)}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y) d(x, y)}{\iint_D \mu(x, y) d(x, y)}.$$

若薄片是均勻的，即面密度 μ 為常量，則質心僅由閉區域 D 的形狀決定，此時薄片的質心也稱為平面圖形的形心。其坐標公式可簡化為

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d(x, y), \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d(x, y),$$

其中 $A = \iint_D d(x, y)$ 為閉區域 D 的面積。

同樣的邏輯可直接推廣至三維空間立體。設有空間有界閉區域 Ω ，在點 (x, y, z) 處的體密度為 $\rho(x, y, z)$ （假定在 Ω 上連續）。該立體的總質量為

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

其質心坐標 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 則為

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) \, d(x, y, z).$$

同理，若立體為均勻的（密度為常量），則形心坐標公式中的質量 M 將直接替換為立體的體積 V ，而被積函數中的常數密度將被分子分母約去。

例 8.5.12 求位於兩圓 $\rho = 2 \cos \theta$ 和 $\rho = 4 \cos \theta$ 之間的均勻薄片的質心（即形心）。

解 因為閉域 D 對稱於 x 軸，所以質心 $C(\bar{x}, \bar{y})$ 必位於 x 軸上，於是有 $\bar{y} = 0$ 。閉區域 D 位於直徑分別為 2 與 4（即半徑為 1 與 2）的兩圓之間，所以它的面積等於這兩個圓的面積之差，即 $A = \pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 3\pi$ 。再利用極座標計算 x 的積分：

$$\begin{aligned} \iint_D x \, d(x, y) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} (r \cos \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \left(\frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_{r=2 \cos \theta}^{r=4 \cos \theta} d\theta = \frac{56}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = 7\pi. \end{aligned}$$

因此 $\bar{x} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$ ，所求質心為 $C(\frac{7}{3}, 0)$ 。

例 8.5.13 設 $h > 0$ ，求均勻正圓錐體

$$\begin{cases} z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z \leq h \end{cases}$$

的質心。

解 取對稱軸為 z 軸，則正圓錐體所占空間閉區域為

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

顯然，質心在 z 軸上，故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$ 。該圓錐體的底面半徑為 h ，高度也為 h ，故其體積 $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ 。接著利用柱坐標計算 z 的積分：

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^z z \cdot r \, dr \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h z \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_{r=0}^{r=z} dz \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2} z^3 \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} z^4 \right) \Big|_{z=0}^{z=h} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} h^4 \, d\theta = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

因此，

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z \, d(x, y, z) = \frac{3}{\pi h^3} \cdot \frac{\pi}{4} h^4 = \frac{3}{4} h,$$

質心為 $(0, 0, \frac{3}{4}h)$ 。

定義 8.5.14 設有一平面薄片佔有 xOy 面上的閉域 D ，在點 (x, y) 處的面密度為 $\mu(x, y)$ （假定在 D 上連續）。該薄片對於 x 軸以及對於 y 軸的轉動慣量分別為

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) \, d(x, y), \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) \, d(x, y).$$

同樣的邏輯可直接推廣至空間立體，設有空間有界閉區域 Ω ，在點 (x, y, z) 處的密度為 $\rho(x, y, z)$ (假定在 Ω 上連續)。該物體對於 x 軸、 y 軸和 z 軸的轉動慣量分別為

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \\ I_y &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) \, d(x, y, z), \\ I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, d(x, y, z). \end{aligned}$$

(此公式的物理意義為：質量微元乘上其到對應旋轉軸的垂直距離平方，再進行全區域積分.)

例 8.5.15 求長為 a 、寬為 b 的均勻矩形薄片 (面密度為常量 μ) 對於其過幾何中心且平行於長邊的對稱軸之轉動慣量。

解 建立直角坐標系，讓矩形薄片的幾何中心位於原點，使 x 軸平行於長邊 a ， y 軸平行於寬邊 b 。則薄片所占閉區域為

$$D = \left\{ (x, y) : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}.$$

薄片總質量 $M = \mu ab$ 。所求對於平行於長邊的對稱軸 (即 x 軸) 的轉動慣量 I_x 為：

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 \, d(x, y) = \mu \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dy \, dx = \mu \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-b/2}^{b/2} dx \\ &= \mu \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{12} b^3 \, dx = \frac{1}{12} \mu a b^3 = \frac{1}{12} M b^2. \end{aligned}$$

(同理可得，該薄片對於平行於寬邊 b 的對稱軸即 y 軸的轉動慣量為 $I_y = \frac{1}{12} M a^2$.)

例 8.5.16 設 $a, h > 0$ 為常數，求密度為 ρ 的均勻圓柱體

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2, \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

對於其中心軸 (z 軸) 的轉動慣量。

解 圓柱體所占空間閉區域為

$$\Omega = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h \}.$$

圓柱體的總質量為底面積乘以高再乘上密度，即 $M = \rho \pi a^2 h$ 。所求對 z 軸的轉動慣量為：

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho \, d(x, y, z) = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2) r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^a \, d\theta \, dz = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 \, d\theta \, dz \\ &= \rho \int_0^h \frac{1}{4} a^4 h \, d\theta = \frac{\pi}{2} \rho h a^4 = \frac{1}{2} (\rho \pi a^2 h) a^2 = \frac{1}{2} M a^2. \end{aligned}$$

機率論方面的應用

定義 8.5.17 設 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 為 $\mathbb{R}^n$ 空間中的連續型隨機向量. 若存在一個定義在 $\mathbb{R}^n$ 上的函數 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 滿足以下兩個條件:

- (1) 非負性: 對於所有的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 恆有 $f(\mathbf{x}) \geq 0$.
- (2) 歸一性: 全空間的機率總和為 1, 即 $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$.

則稱 $f(\mathbf{x})$ 為隨機向量 $\mathbf{X}$ 的**聯合機率密度函數**.

對於 $\mathbb{R}^n$ 中的任意區域 D , 隨機向量 $\mathbf{X}$ 落在區域 D 內的機率定義為 $f(\mathbf{x})$ 在該區域上的多重積分:

$$P(\mathbf{X} \in D) = \int \cdots \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

定義 8.5.18 設 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 為具有聯合機率密度函數 $f(\mathbf{x})$ 的連續型隨機向量. 可將機率分佈視為一種連續分佈的「質量」, 而尋找期望值的過程就如同尋找該機率分佈的「質心」坐標.

對於其中的第 i 個隨機變數 X_i , 其**期望值** (或稱**平均值**), 記為 μ_i 或 $E[X_i]$, 定義為:

$$\mu_i = E[X_i] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} x_i f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

(前提是該反常重積分絕對收斂).

例 8.5.19 設隨機向量 (X, Y, Z) 的聯合機率密度函數為

$$f(x, y, z) = \begin{cases} C(x + 2y + 3z), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求常數 C 的值.
- (2) 求機率 $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}, Z \leq 1)$.

解 (1) 根據聯合機率密度函數的歸一性, 全空間的積分必須為 1:

$$\begin{aligned} 1 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 C(x + 2y + 3z) dz dy dx \\ &= C \int_0^1 \int_0^1 \left(xz + 2yz + \frac{3}{2}z^2 \right) \Big|_{z=0}^{z=1} dy dx = C \int_0^1 \int_0^1 \left(x + 2y + \frac{3}{2} \right) dy dx \\ &= C \int_0^1 \left(xy + y^2 + \frac{3}{2}y \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = C \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2} \right) dx = 3C. \end{aligned}$$

因此 $C = \frac{1}{3}$.

(2) 該事件對應的積分區域為 $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} P\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}, Z \leq 1\right) &= \iiint_D \frac{1}{3}(x + 2y + 3z) d(x, y, z) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 \int_0^1 (x + 2y + 3z) dz dy dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 \left(x + 2y + \frac{3}{2} \right) dy dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \left(xy + y^2 + \frac{3}{2}y \right) \Big|_{y=1/2}^{y=1} dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{13}{48}. \end{aligned}$$

例 8.5.20 設連續型隨機向量 (X, Y) 的聯合機率密度函數為

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

試求隨機變數 X 與 Y 的期望值 μ_X 及 μ_Y .

解 根據多變數期望值的定義, X 的期望值為全空間中 $x \cdot f(x, y)$ 的二重積分:

$$\begin{aligned} \mu_X = E[X] &= \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{5} x(x + y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{6}{5} \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + xy^2) \, dy \, dx = \frac{6}{5} \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} x y^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \, dx = \frac{6}{5} \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} x \right) \, dx = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

同理, Y 的期望值為全空間中 $y \cdot f(x, y)$ 的二重積分:

$$\begin{aligned} \mu_Y = E[Y] &= \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{5} y(x + y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{6}{5} \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^3) \, dy \, dx = \frac{6}{5} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \, dx = \frac{6}{5} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \, dx = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

8.6 * 含參變數定積分

定義 8.6.1 設 f 是閉區間 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上的連續函數. 在 $[a, b]$ 上任意取定 x 的一個值, 於是 $f(x, y)$ 是變數 y 在 $[c, d]$ 上的一個單變數連續函數, 從而積分

$$\int_c^d f(x, y) \, dy$$

存在, 這個積分的值依賴於取定的 x 值. 當 x 的值改變時, 一般說來這個積分的值也跟著改變. 這個積分確定一個定義在 $[a, b]$ 上的 x 的函數, 把它記作 $\varphi(x)$, 即

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy \quad (a \leq x \leq b).$$

這裡變量 x 在積分過程中是一個常量, 通常稱它為**參變數**. 因此, 該式右端是一個含參變數 x 的積分, 該積分確定 x 的一個函數 $\varphi(x)$.

註記 8.6.2 實際上, 數學分析中也存在「含參變數重積分」的廣泛概念與理論應用. 但為了循序漸進並聚焦於單變數積分與多變數函數交會的基礎性質, 本節僅探討積分區域為一維線段的「含參變數定積分」.

定理 8.6.3 如果函數 f 在矩形 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上連續, 那麼由積分確定的函數 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上也連續.

證明 設 x 和 $x + \Delta x$ 是 $[a, b]$ 上的兩點, 則

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_c^d [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] \, dy.$$

由於 $f(x, y)$ 在閉區域 R 上連續, 從而一致連續. 因此對於任意取定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對於 R 內的任意兩點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) , 只要它們之間的距離小於 δ , 即

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta,$$

就有

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon.$$

因為點 $(x + \Delta x, y)$ 與 (x, y) 的距離等於 $|\Delta x|$, 所以當 $|\Delta x| < \delta$ 時, 就有

$$|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

於是可推得

$$|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| \leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \varepsilon(d - c).$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續. □

註記 8.6.4 在定理 8.6.3 的條件下, 設 $x_0 \in [a, b]$. 則

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy.$$

因此, 函數 φ 的連續性可以解釋為極限運算與積分運算可交換的一個充分條件.

註記 8.6.5 定理 8.6.3 可作如下推廣: 在該定理的假設下, 對所有 $(x, u) \in R$, 變上限含參變數積分

$$\psi(x, u) = \int_c^u f(x, y) dy$$

存在, 且雙邊數函數 ψ 在 R 上連續. 對於變下限含參變數積分, 也有類似的結論.

定理 8.6.6 如果函數 $f(x, y)$ 在二維閉區間 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上連續, 那麼

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

證明 既然函數 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 那麼它在 $[a, b]$ 上的積分存在. 這個積分可以寫為

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

右端積分是函數 f 先對 y 後對 x 的二次 (累次) 積分. 當 $f(x, y)$ 在二維閉區間 R 上連續時, $f(x, y)$ 在 R 上的二重積分 $\iint_R f(x, y) d(x, y)$ 是存在的. 這個二重積分化為累次積分來計算時, 如果先對 y 後對 x 積分, 就是上面的這個累次積分. 但二重積分 $\iint_R f(x, y) d(x, y)$ 也可化為先對 x 後對 y 的累次積分 $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$. 基於二重積分計算的等價性, 因此上述兩個二次積分必定相等. □

定理 8.6.7 如果函數 f 及其偏導數 f'_x 都在二維閉區間 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上連續, 那麼由積分確定的函數 $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上可微, 並且

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f'_x(x, y) dy.$$

證明 因為 $\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)) / (\Delta x)$, 為了求 φ' , 先作出增量之比:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy.$$

由拉格朗日中值定理以及 f'_x 在閉區域上的一致連續性, 可得

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x + \theta \Delta x, y) = f'_x(x, y) + \eta(x, y, \Delta x),$$

其中 $0 < \theta < 1$, 且只要 $|\Delta x|$ 小於某個正數 δ , $|\eta|$ 就可小於任意給定的正數 ε . 因此

$$\left| \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy \right| < \int_c^d \varepsilon dy = \varepsilon(d - c) \quad (|\Delta x| < \delta),$$

這就是說

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy = 0.$$

將展開式代回增量之比中:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d f'_x(x, y) dy + \int_c^d \eta(x, y, \Delta x) dy,$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取上式的極限, 即得證 $\varphi'(x) = \int_c^d f'_x(x, y) dy$. □

定理 8.6.8 如果函數 f 在二維閉區間 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上連續, 函數 α 與 β 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 且

$$c \leq \alpha(x) \leq d, \quad c \leq \beta(x) \leq d \quad (a \leq x \leq b),$$

那麼由積分確定的函數 $\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上也連續.

證明 設 x 和 $x + \Delta x$ 是 $[a, b]$ 上的兩點, 則

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_{\alpha(x + \Delta x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

因為第一個積分可拆解並重組為:

$$\int_{\alpha(x + \Delta x)}^{\beta(x + \Delta x)} = \int_{\alpha(x + \Delta x)}^{\alpha(x)} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} + \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)},$$

所以

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) &= \int_{\alpha(x + \Delta x)}^{\alpha(x)} f(x + \Delta x, y) dy \\ &\quad + \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy. \end{aligned}$$

當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, 上式右端最後一個積分的積分限不變, 根據含參變數定積分連續性的理由, 這個積分趨於零. 又設 M 是 $|f(x, y)|$ 在二維閉區間 R 上的最大值, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha(x + \Delta x)}^{\alpha(x)} f(x + \Delta x, y) dy \right| &\leq M |\alpha(x + \Delta x) - \alpha(x)|, \\ \left| \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \right| &\leq M |\beta(x + \Delta x) - \beta(x)|. \end{aligned}$$

根據 $\alpha(x)$ 與 $\beta(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續的假定, 由以上兩式可見, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, 右端的前兩個積分都趨於零. 於是, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \rightarrow 0$, 所以函數 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續. □

定理 8.6.9 (萊布尼茨公式) 如果函數 f 及其偏導數 f'_x 都在二維閉區間 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上連續, 函數 α 與 β 都在閉區間 $[a, b]$ 上可微, 且

$$c \leq \alpha(x) \leq d, \quad c \leq \beta(x) \leq d \quad (a \leq x \leq b),$$

那麼由積分確定的函數 $\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x). \end{aligned}$$

證明 由前一定理證明中的拆解式, 兩邊同除以 Δx 有:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy. \end{aligned}$$

當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時, 上式右端最後一個積分的積分限不變, 由與定理 8.6.7 相同的理由, 有

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy \rightarrow \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x, y) dy.$$

對於右端第一項, 應用積分均值定理得

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy = \frac{\beta(x + \Delta x) - \beta(x)}{\Delta x} f(x + \Delta x, \eta_1),$$

其中 η_1 介於 $\beta(x)$ 與 $\beta(x + \Delta x)$ 之間. 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時,

$$\frac{\beta(x + \Delta x) - \beta(x)}{\Delta x} \rightarrow \beta'(x), \quad f(x + \Delta x, \eta_1) \rightarrow f(x, \beta(x)).$$

於是

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\beta(x)}^{\beta(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \rightarrow f(x, \beta(x))\beta'(x).$$

類似地可證, 當 $\Delta x \rightarrow 0$ 時第二項滿足:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy \rightarrow f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

因此, 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取極限便得萊布尼茨公式:

$$\Phi'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

□

例 8.6.10 求下列含參變數的積分所確定的函數的極限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\sin x}^{1+x^2} \frac{e^{xy}}{1+y^2} dy; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-2}^2 \sqrt{x^2+y^4} dy; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} y \cos(xy) \sin y dy.$$

解 (1) 令被積函數為 $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{1+y^2}$. 因為 $f(x, y)$ 在包含 $x = 0$ 與 $y \in [0, 1]$ 的矩形閉區域上連續, 且積分上下限 $u(x) = \sin x$ 與 $v(x) = 1 + x^2$ 皆為連續函數. 根據含參變數定積分的連續性, 可直接將極限 $x \rightarrow 0$ 代入被積函數與積分上下限中:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\sin x}^{1+x^2} \frac{e^{xy}}{1+y^2} dy = \int_{\sin 0}^{1+0^2} \frac{e^{0 \cdot y}}{1+y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = (\tan^{-1} y) \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 令被積函數為 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$. 由於 f 在 $[-1, 1] \times [-2, 2]$ 上連續, 根據含參變數定積分連續性定理, 積分確定的函數對 x 連續, 極限運算可與積分運算直接交換:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-2}^2 \sqrt{x^2 + y^4} dy = \int_{-2}^2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^4} \right) dy = \int_{-2}^2 \sqrt{y^4} dy = \frac{16}{3}.$$

(3) 令被積函數為 $f(x, y) = y \cos(xy) \sin y$. 該函數在 $\mathbb{R}^2$ 上連續, 同理可直接將極限符號移至積分號內:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} y \cos(xy) \sin y dy = \int_0^{\pi/2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \cos(xy) \sin y \right) dy = \int_0^{\pi/2} y \sin y dy = 1.$$

例 8.6.11 設

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{xy} - 1}{y} dy,$$

求 $\Phi'(x)$ ($x > 0$).

解 應用萊布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \int_x^{2x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{xy} - 1}{y} \right) dy + \frac{e^{x(2x)} - 1}{2x} \cdot 2 - \frac{e^{x(x)} - 1}{x} \cdot 1 \\ &= \int_x^{2x} e^{xy} dy + \frac{e^{2x^2} - 1}{x} - \frac{e^{x^2} - 1}{x} \\ &= \left(\frac{e^{xy}}{x} \right) \Big|_{y=x}^{y=2x} + \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x} \\ &= \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x} + \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x} = \frac{2(e^{2x^2} - e^{x^2})}{x}. \end{aligned}$$

例 8.6.12 求

$$I = \int_0^1 \frac{x^4 - x^2}{\ln x} dx.$$

解 因為

$$\int_2^4 x^y dy = \left(\frac{x^y}{\ln x} \right) \Big|_{y=2}^{y=4} = \frac{x^4 - x^2}{\ln x},$$

所以

$$I = \int_0^1 dx \int_2^4 x^y dy.$$

這裡函數 $f(x, y) = x^y$ 在矩形 $R = [0, 1] \times [2, 4]$ 上連續 (補充: 雖然在 $x = 0$ 處看似未定義, 但因 $y \geq 2 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$, 可視為連續函數, 故無瑕點問題). 根據定理 8.6.6, 可交換積分次序, 由此有

$$I = \int_2^4 dy \int_0^1 x^y dx = \int_2^4 \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_2^4 \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{5}{3}.$$

例 8.6.13 計算定積分

$$I = \int_0^\pi e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x) \, dx.$$

解 考慮含參變量 α 的積分所確定的函數

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\pi e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x) \, dx.$$

顯然, $\varphi(0) = \int_0^\pi 1 \, dx = \pi$. 於是,

$$\begin{aligned} \phi'(\alpha) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x)) \, dx \\ &= \int_0^\pi e^{\alpha \cos x} (\cos x \cos(\alpha \sin x) - \sin x \sin(\alpha \sin x)) \, dx. \end{aligned}$$

觀察被積函數, 可以發現它恰好是另一函數對 x 的偏導數:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{\alpha \cos x} \sin(\alpha \sin x)) = \alpha e^{\alpha \cos x} (\cos x \cos(\alpha \sin x) - \sin x \sin(\alpha \sin x)).$$

於是對於 $\alpha \neq 0$, 有

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (e^{\alpha \cos x} \sin(\alpha \sin x)) \, dx = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha \cos x} \sin(\alpha \sin x)) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0.$$

因為 $\varphi'(\alpha) \equiv 0$, 說明 $\varphi(\alpha)$ 在實數線上是一個常數函數, 從而

$$I = \varphi(\alpha) = \varphi(0) = \pi.$$

單元 9

曲面積分與曲線積分

定義 9.0.1 給定空間區域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (1) 如果對於空間區域 D 內的任一點 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 都有一個確定的純量 $f(\mathbf{x})$ 與之對應, 那麼稱在這空間區域 D 內確定了一個**純量場** (或稱**數量場**, 例如溫度場、密度場等). 一個純量場可用一個純量函數 $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ 來確定.
- (2) 如果與點 $\mathbf{x}$ 相對應的是一個 n 維向量 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, 那麼稱在這空間區域 D 內確定了一個**向量場** (例如力場、速度場等). 一個向量場可用一個向量函數 $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$ 來確定, 並且可以坐標形式表示為

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})),$$

其中 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 皆為定義在 D 上的純量函數.

- (3) 若向量場 $\mathbf{F}$ 是某個純量函數 f 的梯度, 即

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = (f'_{x_1}(\mathbf{x}), f'_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{x})),$$

則稱純量函數 f 是向量場 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的一個**位函數** (或**勢函數**), 並稱向量場 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 為**位場** (或**勢場**).

由此可知, 由純量函數 f 產生的梯度場 $\nabla f(\mathbf{x})$ 必定是一個位場. 但需注意, 任意一個向量場並不一定都是位場, 因為它不一定是某個純量函數的梯度.

9.1 曲線積分

第一類曲線積分

定義 9.1.1 (對弧長的曲線積分) 設 L 為 $\mathbb{R}^n$ 空間中的一條光滑曲線弧, 函數 f 在 L 上有界. 在 L 上任意插入一點列 $M_1, M_2, \dots, M_{m-1}$ 把 L 分成 m 個小段. 設第 i 個小段的長度為 Δs_i . 又 ξ_i 為第 i 個小段上任意取定的一點, 作乘積 $f(\xi_i)\Delta s_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 並作和 $\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta s_i$. 如果當各小弧段的長度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 時, 這和的極限總存在, 且與曲線弧 L 的分法及點 ξ_i 的取法無關, 那麼稱此極限為函數 f 在曲線弧 L 上**對弧長的曲線積分**或**第一類曲線積分**, 記作 $\int_L f(\mathbf{x}) ds$, 即

$$\int_L f(\mathbf{x}) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta s_i,$$

其中 f 叫做**被積函數**, L 叫做**積分弧段**.

如果 L 是分段光滑的 (也就是說, L 可以分成有限段, 而每一段都是光滑的), 那麼規定函數在 L 上的曲線積分等於函數在光滑的各段上的曲線積分之和. 例如, 設 L 可分成兩段光滑曲線弧 L_1 及 L_2 (記作 $L = L_1 + L_2$), 就規定

$$\int_{L_1+L_2} f(\mathbf{x}) \, ds = \int_{L_1} f(\mathbf{x}) \, ds + \int_{L_2} f(\mathbf{x}) \, ds.$$

如果 L 是閉曲線, 那麼函數 f 在閉曲線 L 上對弧長的曲線積分記為

$$\oint_L f(\mathbf{x}) \, ds.$$

命題 9.1.2 設 L 為 $\mathbb{R}^n$ 空間中的分段光滑曲線弧, 函數 f 與 g 在 L 上皆可積.

(1) 線性性: 設 α, β 為常數, 則

$$\int_L (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) \, ds = \alpha \int_L f(\mathbf{x}) \, ds + \beta \int_L g(\mathbf{x}) \, ds.$$

(2) 對積分弧段的可加性: 若積分弧段 L 可分成兩段光滑曲線弧 L_1 和 L_2 (即 $L = L_1 + L_2$), 則

$$\int_L f(\mathbf{x}) \, ds = \int_{L_1} f(\mathbf{x}) \, ds + \int_{L_2} f(\mathbf{x}) \, ds.$$

(3) 保序性: 設在 L 上恆有 $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, 則

$$\int_L f(\mathbf{x}) \, ds \leq \int_L g(\mathbf{x}) \, ds.$$

特別地, 恆有下列絕對值不等式成立:

$$\left| \int_L f(\mathbf{x}) \, ds \right| \leq \int_L |f(\mathbf{x})| \, ds.$$

定理 9.1.3 (對弧長的曲線積分之計算公式) 設 f 在 $\mathbb{R}^n$ 空間中的曲線弧 L 上有定義且連續, L 的參數方程式為

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

若向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一階連續導數, 且 $\|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0$, 則曲線積分 $\int_L f(\mathbf{x}) \, ds$ 存在, 且有

$$\int_L f(\mathbf{x}) \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \quad (\alpha < \beta).$$

證明 假定當參數 t 由 α 變至 β 時, L 上的點 $\mathbf{x}$ 依點 A 至點 B 的方向描出曲線弧 L . 在 L 上取一系列點

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, M_m = B,$$

它們對應於一系列單調增加的參數值

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = \beta.$$

根據對弧長的曲線積分的定義, 有

$$\int_L f(\mathbf{x}) \, ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\boldsymbol{\xi}_i) \Delta s_i.$$

設點 ξ_i 對應於參數值 τ_i , 即 $\xi_i = \mathbf{r}(\tau_i)$, 這裡 $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. 由於第 i 個小段的弧長為

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{r}'(t)\| dt,$$

應用積分均值定理, 有

$$\Delta s_i = \|\mathbf{r}'(\tau'_i)\| \Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, 且 $\tau'_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 於是

$$\int_L f(\mathbf{x}) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(\tau_i)) \|\mathbf{r}'(\tau'_i)\| \Delta t_i.$$

因函數 $\|\mathbf{r}'(t)\|$ 在閉區間 $[\alpha, \beta]$ 上連續 (從而一致連續), 故可把上式中的 τ'_i 換成 τ_i 而不改變極限值, 從而

$$\int_L f(\mathbf{x}) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(\tau_i)) \|\mathbf{r}'(\tau_i)\| \Delta t_i.$$

上式右端的和的極限就是函數 $f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|$ 在區間 $[\alpha, \beta]$ 上的定積分. 因為這個函數在 $[\alpha, \beta]$ 上連續, 所以這個定積分是存在的, 因此左端的曲線積分 $\int_L f(\mathbf{x}) ds$ 也存在, 並且有

$$\int_L f(\mathbf{x}) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (\alpha < \beta).$$

□

註記 9.1.4 上述公式表明, 計算對弧長的曲線積分 $\int_L f(\mathbf{x}) ds$ 時, 只要把 $\mathbf{x}$ 與 ds 依次換為 $\mathbf{r}(t)$ 與 $\|\mathbf{r}'(t)\| dt$, 然後從 α 到 β 作定積分就行了. 這裡必須注意, 定積分的下限 α 一定要小於上限 β . 這是因為, 從上述推導中可以看出, 由於小弧段的長度 Δs_i 總是正的, 從而 $\Delta t_i > 0$, 所以定積分的下限 α 一定小於上限 β .

系理 9.1.5 設雙變數函數 f 在平面曲線弧 L 上有定義且連續.

(1) 如果曲線弧 L 由方程式

$$y = \psi(x) \quad (x_0 \leq x \leq X)$$

給出, 且 $\psi(x)$ 在區間 $[x_0, X]$ 上具有一階連續導數, 那麼計算公式為

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{x_0}^X f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + (\psi'(x))^2} dx \quad (x_0 < X).$$

(2) 如果曲線弧 L 由方程式

$$x = \varphi(y) \quad (y_0 \leq y \leq Y)$$

給出, 且 $\varphi(y)$ 在區間 $[y_0, Y]$ 上具有一階連續導數, 那麼計算公式為

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{y_0}^Y f(\varphi(y), y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy \quad (y_0 < Y).$$

例 9.1.6 計算對弧長的曲線積分 $\int_L x ds$, 其中 L 是曲線 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上從點 $O(0, 0)$ 到點 $A(3, 2\sqrt{3})$ 之間的一段弧.

解 由於 L 由方程式

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

給出, 且 $y' = \sqrt{x}$, 因此弧長微元為

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + x} dx.$$

於是所求曲線積分為

$$\int_L x ds = \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx = \frac{116}{15}.$$

例 9.1.7 計算曲線積分 $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中 Γ 為空間曲線 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 上相應於 t 從 0 到 1 的一段弧.

解 首先計算各坐標函數對 t 的導數:

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t),$$

$$z'(t) = e^t.$$

則弧長微元為

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{3}e^t dt. \end{aligned}$$

又因為被積函數為

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} = \sqrt{2}e^t,$$

於是

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds = \int_0^1 (\sqrt{2}e^t)(\sqrt{3}e^t) dt = \frac{\sqrt{6}}{2}(e^2 - 1).$$

第二類曲線積分

定義 9.1.8 (對坐標的曲線積分) 設 L 為 $\mathbb{R}^n$ 空間內從點 A 到點 B 的一條有向光滑曲線弧, 向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向任意插入一點列

$$M_0 = A, M_1, \dots, M_{m-1}, M_m = B,$$

把 L 分成 m 個有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

設第 i 個分點的坐標為 $\mathbf{x}_i$, 記其位移向量為 $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} = (\Delta x_{i1}, \Delta x_{i2}, \dots, \Delta x_{in})$. 點 $\boldsymbol{\xi}_i$ 為 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的點, 作內積 $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n F_j(\boldsymbol{\xi}_i) \Delta x_{ij}$, 並作和 $\sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i$.

如果當各小弧段長度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 時, 這和的極限總存在, 且與曲線弧 L 的分法及點 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的取法無關, 那麼稱此極限為向量函數 $\mathbf{F}$ 在有向曲線弧 L 上對坐標的曲線積分 (或第二類曲線積分), 記作 $\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$. 即

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i,$$

若寫成各坐標分量合併起來的形式, 則為

$$\int_L F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + \cdots + F_n(\mathbf{x}) dx_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_j(\xi_i) \Delta x_{ij},$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 叫做被積分函數, L 叫做積分弧段.

如果 L 是分段光滑的, 那麼規定函數在有向曲線弧 L 上對坐標的曲線積分等於在光滑的各段上對坐標的曲線積分之和. 為了表達簡便起見, 通常假定其中的向量函數在曲線 L 上連續 (這等價於各分量函數均在 L 上連續).

命題 9.1.9 設 L 為 $\mathbb{R}^n$ 空間中的有向光滑曲線弧, 向量函數 $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ 與 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在 L 上皆連續.

(1) 線性性: 設 α 與 β 為常數, 則

$$\int_L (\alpha \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{F}_2(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_L \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \beta \int_L \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

(2) 對積分弧段的可加性: 若有向曲線弧 L 可分成兩段光滑的有向曲線弧 L_1 和 L_2 (記作 $L = L_1 + L_2$), 則

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{L_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{L_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

(3) 對積分路徑方向的依賴性: 設 L 是有向光滑曲線弧, L^- 是 L 的反向曲線弧, 則

$$\int_{L^-} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

證明 此處僅證明 (3). 把 L 分成 m 小段, 相應的 L^- 也分成 m 小段. 對於每一個小弧段來說, 當曲線弧的方向改變時, 有向弧段的位移向量 $\Delta \mathbf{x}_i$ (即在各個坐標軸上的投影), 其絕對值 (長度) 不變, 但要改變符號 (即變成 $-\Delta \mathbf{x}_i$), 因此 (3) 成立. $\square$

註記 9.1.10 命題 9.1.9(3) 表示, 當積分弧段的方向改變時, 對坐標的曲線積分要改變符號. 因此關於對坐標的曲線積分, 必須特別注意積分弧段的方向.

定理 9.1.11 設向量函數 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 空間中的有向曲線弧 L 上有定義且連續, L 的參數方程式為

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(t),$$

當參數 t 單調地由 α 變到 β 時, 點 $\mathbf{x}$ 從 L 的起點 A 沿 L 運動到終點 B . 若向量函數 $\mathbf{r}(t)$ 在以 α 及 β 為端點的閉區間上具有一階連續導數, 且 $\|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0$, 則曲線積分 $\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ 存在, 且有

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

證明 在 L 上取一系列點 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{m-1}, M_m = B$, 它們對應於一系列單調變化的參數值 $\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = \beta$. 根據對坐標的曲線積分的定義, 有

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\xi_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i,$$

其中設點 ξ_i 對應於參數值 τ_i , 即 $\xi_i = \mathbf{r}(\tau_i)$, 這裡 τ_i 在 t_{i-1} 與 t_i 之間. 由於第 i 個小段在第 j 個坐標軸上的位移為 $\Delta x_{ij} = r_j(t_i) - r_j(t_{i-1})$, 應用微分中值定理, 有

$$\Delta x_{ij} = r'_j(\tau'_{ij}) \Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, τ'_{ij} 在 t_{i-1} 與 t_i 之間. 於是

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_j(\mathbf{r}(\tau_i)) r'_j(\tau'_{ij}) \Delta t_i.$$

因為各分量函數 $r'_j(t)$ 在閉區間 (以 α, β 為端點) 上連續, 那麼也會一致連續, 所以可把上式中的 τ'_{ij} 換成 τ_i , 從而

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n F_j(\mathbf{r}(\tau_i)) r'_j(\tau_i) \right) \Delta t_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau_i)) \cdot \mathbf{r}'(\tau_i) \Delta t_i.$$

上式右端的和的極限就是定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$. 由於函數連續, 這個定積分是存在的, 因此上式左端的曲線積分也存在, 並且有

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt,$$

這裡下限 α 對應於 L 的起點, 上限 β 對應於 L 的終點. □

注意 9.1.12 定理 9.1.11 中, 下限 α 對應於 L 的起點, 上限 β 對應於 L 的終點, α 不一定小於 β .

系理 9.1.13 設向量函數 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 在平面有向曲線弧 L 上有定義且連續.

(1) 如果 L 由方程式 $y = \psi(x)$ 給出, 且 $\psi(x)$ 具有一階連續導數, 那麼計算公式成為

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x))\psi'(x)) dx,$$

這裡下限 a 對應 L 的起點, 上限 b 對應 L 的終點.

(2) 如果 L 由方程式 $x = \varphi(y)$ 給出, 且 $\varphi(y)$ 具有一階連續導數, 那麼計算公式成為

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d (P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y)) dy,$$

這裡下限 c 對應 L 的起點, 上限 d 對應 L 的終點.

例 9.1.14 計算 $\int_L y dx$, 其中 L 為拋物線 $x = y^2$ 上從點 $A(1, -1)$ 到點 $B(1, 1)$ 的一段弧.

解 (解一) 將所給積分化為對 x 的定積分來計算. 由於 $y = \pm\sqrt{x}$ 不是單值函數, 所以要把 L 分為 $\widehat{AO}$ 和 $\widehat{OB}$ 兩部分. 在 $\widehat{AO}$ 上, $y = -\sqrt{x}$, x 從 1 變到 0; 在 $\widehat{OB}$ 上, $y = \sqrt{x}$, x 從 0 變到 1. 因此

$$\int_L y dx = \int_{\widehat{AO}} y dx + \int_{\widehat{OB}} y dx = \int_1^0 (-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{4}{3}.$$

解 (解二) 將所給積分化為對 y 的定積分來計算, 現在 $x = y^2$, y 從 -1 變到 1. 因此

$$\int_L y dx = \int_{-1}^1 y \frac{d}{dy} y^2 dy = \frac{4}{3}.$$

例 9.1.15 計算 $\int_L y dx$, 其中 L 為:

- (1) 半徑為 a 、圓心為原點、按逆時針方向繞行的上半圓周;
- (2) 從點 $A(a, 0)$ 沿 x 軸到點 $B(-a, 0)$ 的直線段.

解 (1) L 的參數方程式為

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t,$$

當參數 t 從 0 變到 π 的曲線弧. 因此

$$\int_L y \, dx = \int_0^\pi (a \sin t)(-a \sin t) \, dt = -\frac{\pi a^2}{2}.$$

(2) L 的方程式為 $y = 0$, x 從 a 變到 $-a$. 所以

$$\int_L y \, dx = \int_a^{-a} 0 \, dx = 0.$$

從上例可看出, 即使兩個曲線積分的被積函數相同, 起點和終點也相同, 但沿不同路徑得出的積分值並不相等.

例 9.1.16 計算 $\int_L (2x + y) \, dx + x \, dy$, 其中 L 為:

- (1) 拋物線 $y = x^2$ 上從 $O(0, 0)$ 到 $B(2, 4)$ 的一段弧;
- (2) 直線 $y = 2x$ 上從 $O(0, 0)$ 到 $B(2, 4)$ 的一段弧;
- (3) 有向折線 OAB , 這裡 O, A, B 依次是點 $(0, 0), (2, 0), (2, 4)$.

解 (1) 化為對 x 的定積分. $L: y = x^2$, x 從 0 變到 2. 所以

$$\int_L (2x + y) \, dx + x \, dy = \int_0^2 ((2x + x^2) + x(2x)) \, dx = 12.$$

(2) 化為對 x 的定積分. $L: y = 2x$, x 從 0 變到 2. 所以

$$\int_L (2x + y) \, dx + x \, dy = \int_0^2 ((2x + 2x) + x(2)) \, dx = 12.$$

(3) $\int_L (2x + y) \, dx + x \, dy = \int_{OA} (2x + y) \, dx + x \, dy + \int_{AB} (2x + y) \, dx + x \, dy$. 在 OA 上, $y = 0$, x 從 0 變到 2, 所以

$$\int_{OA} (2x + y) \, dx + x \, dy = \int_0^2 (2x + 0) \, dx = 4.$$

在 AB 上, $x = 2$, y 從 0 變到 4, 所以

$$\int_{AB} (2x + y) \, dx + x \, dy = \int_0^4 (2) \, dy = 8.$$

從而

$$\int_L (2x + y) \, dx + x \, dy = 4 + 8 = 12.$$

從上例可以看出, 雖然沿不同路徑, 曲線積分的值可能相等.

例 9.1.17 計算 $\int_\Gamma x^2 \, dx + xy \, dy - z^2 \, dz$, 其中 Γ 是從點 $A(2, 4, -2)$ 到點 $B(0, 0, 0)$ 的直線段 $\overline{AB}$.

解 直線段 $\overline{AB}$ 的方程式是

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-2},$$

化為參數方程式得

$$x = 2t, \quad y = 4t, \quad z = -2t, \quad t \text{ 從 1 變到 0.}$$

所以

$$\int_\Gamma x^2 \, dx + xy \, dy - z^2 \, dz = \int_1^0 ((2t)^2(2) + (2t)(4t)(4) - (-2t)^2(-2)) \, dt = -16.$$

兩類曲線積分之間的關係

兩類曲線積分之間的關係可透過曲線的單位切向量來建立本質上的聯繫。設 L 為 $\mathbb{R}^n$ 空間中一條有向光滑曲線弧，向量函數 $\mathbf{F}$ 在 L 上連續。

假設 L 由參數方程式 $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ 給出，且參數 t 的增長方向與 L 的規定方向一致（即 t 從 α 變到 β ，且 $\alpha < \beta$ ）。此時，曲線 L 上任一點的切向量為 $\mathbf{r}'(t)$ 。可定義與曲線方向一致的**單位切向量**為

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

根據對坐標的曲線積分的計算公式，積分可化為對參數 t 的定積分形式：

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

將被積表達式中的切向量 $\mathbf{r}'(t)$ 改寫為 $\mathbf{T}\|\mathbf{r}'(t)\|$ ，即可將上式化為包含單位切向量的形式：

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

回顧對弧長的曲線積分（第一類曲線積分）的微元關係，弧長微元滿足 $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ 。因此，上述定積分正是純量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}$ 在曲線 L 上對弧長的曲線積分，即

$$\int_L \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_L (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}) ds.$$

註記 9.1.18 這個向量形式的公式揭示了兩類曲線積分在物理與幾何上的聯繫：

- 對向量場 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 進行第二類曲線積分（例如計算力場所作的功），實質上就等於先求出該向量場在曲線切線方向上的投影分量（即純量場 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}$ ），再將這個純量場沿著曲線進行第一類曲線積分。
- 若將 $d\mathbf{x}$ 視為微小位移向量，則有 $d\mathbf{x} = \mathbf{T} ds$ ，這個向量微元在幾何上被稱為**有向曲線微元**。

9.2 曲面積分

第一類曲面積分

定義 9.2.1 設曲面 Σ 是光滑的¹，函數 f 在 Σ 上有界。把 Σ 任意分成 m 小塊 ΔS_i （這裡 ΔS_i 同時也代表第 i 小塊曲面的面積），設 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一點，作乘積 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$)，並作和 $\sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$ 。

如果當各小塊曲面的直徑的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 時，這和的極限總存在，且與曲面 Σ 的分法及點 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法無關，那麼稱此極限為函數 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上**對面積的曲面積分**或**第一類曲面積分**，記作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ ，即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被積函數， Σ 叫做積分曲面。

如果 Σ 是分片光滑的（即由有限個光滑曲面所組成的曲面），那麼規定函數在 Σ 上對面積的曲面積分等於函數在光滑的各片曲面上對面積的曲面積分之和。例如，設 Σ 可分成兩片光滑曲面 Σ_1 及 Σ_2 （記作 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ ），就規定

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

¹即曲面上各點處都具有切平面，且當點在曲面上連續移動時，切平面也連續轉動。

由對面積的曲面積分的定義可知, 它具有與對弧長的曲線積分相類似的性質, 這裡不再贅述.

註記 9.2.2 如果要將曲面積分的定義嚴格推廣至 n 變數 (即處理高維空間中流形上的積分), 單純使用純量微元 dS 會面臨定向及坐標變換上的困難. 此時必須引入微分形式以及**楔積**的概念來進行高維積分的定義與計算.

定理 9.2.3 設曲面 Σ 由參數方程式

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

給出, 其中 D 為 uv 平面上的有界閉區域. 若向量函數 $\mathbf{r}(u, v)$ 在 D 上具有一階連續偏導數, 且 $\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \neq 0$, 函數 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上連續, 則對面積的曲面積分存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| d(u, v).$$

證明 將區域 D 任意分割成 m 個小區域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_m$, 其面積分別記為 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_m$. 對應地, 曲面 Σ 被分割成 m 個小曲面塊 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_m$, 其面積也記為 ΔS_i .

在每個 ΔD_i 內任取一點 (u_i, v_i) , 其在曲面 Σ 上對應的點為 $\mathbf{r}(u_i, v_i)$. 當 ΔD_i 的直徑很小時, 曲面塊 ΔS_i 的面積可以由點 $\mathbf{r}(u_i, v_i)$ 處的切平面上對應微小平行四邊形的面積來近似. 由幾何關係可知, 該切平面上的平行四邊形是由向量 $\mathbf{r}'_u(u_i, v_i)\Delta u$ 與 $\mathbf{r}'_v(u_i, v_i)\Delta v$ 所張成, 其面積為

$$\|\mathbf{r}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_i)\| \Delta u \Delta v.$$

因此, 小曲面塊的面積元素可近似為

$$\Delta S_i \approx \|\mathbf{r}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_i)\| \Delta\sigma_i.$$

根據對面積的曲面積分的定義, 有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(u_i, v_i)) \Delta S_i,$$

其中 λ 為 ΔS_i 直徑的最大值. 將面積的近似式代入, 可得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(u_i, v_i)) \|\mathbf{r}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_i)\| \Delta\sigma_i.$$

上式右端的和的極限, 正是連續函數 $f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|$ 在有界閉區域 D 上的二重積分. 由於該函數在 D 上連續, 這個二重積分必定存在, 於是可得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| d(u, v).$$

□

系理 9.2.4 設曲面 Σ 由參數方程式 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 給出, 其參數定義區域為 D . 若引入微分幾何中曲面的第一基本量:

$$E = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u, \quad F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v, \quad G = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v,$$

則由拉格朗日恆等式可知, 向量外積的長度可由這三個基本量表示為

$$\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| = \sqrt{(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u)(\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v) - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

因此, 函數 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上對面積的曲面積分計算公式可改寫為

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \sqrt{EG - F^2} d(u, v).$$

系理 9.2.5 設函數 $f(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上連續.

- (1) 已知函數曲面的情形: 若曲面 Σ 由方程式 $z = z(x, y)$ 給出, 點 (x, y) 的變動範圍為 xy 平面上的有界閉域 D_{xy} , 且函數 $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一階連續偏導數, 則有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} d(x, y).$$

同理, 若曲面方程式為 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$, 只要將上式中的變數作相應的替換, 即可得到在 yz 平面或 zx 平面上投影的計算公式.

- (2) 已知曲面的隱式方程式的情形: 若曲面 Σ 由隱式方程式 $F(x, y, z) = 0$ 給出, 其在 xy 平面上的投影區域為 D_{xy} , 且函數 $F(x, y, z)$ 具有一階連續偏導數, 並在 Σ 上滿足 $F'_z(x, y, z) \neq 0$, 則有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z) \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} d(x, y),$$

其中右端被積函數中的 z 必須由方程式 $F(x, y, z) = 0$ 解出並代入, 以表示為 x 與 y 的函數.

註記 9.2.6 $\iint_{\Sigma} 1 dS$ 為曲面 Σ 的面積.

例 9.2.7 計算曲面積分

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z^2},$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被平面 $z = R/2$ 截出的頂部 ($z \geq R/2$).

解 Σ 的方程式為 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, Σ 在 xy 平面上的投影區域 D_{xy} 為圓形閉區域 $x^2 + y^2 \leq R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{4}R^2$. 又

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{z}.$$

根據公式, 有

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{z^2} \frac{R}{z} d(x, y) = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}} d(x, y).$$

利用極坐標, 得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{dS}{z^2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{Rr}{(R^2 - r^2)^{3/2}} dr = 2\pi R \left((R^2 - r^2)^{-1/2} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \\ &= 2\pi R \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{3}{4}R^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 0}} \right) = 2\pi R \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

例 9.2.8 計算 $\oint_{\Sigma} (x+y) dS$ ², 其中 Σ 是由坐標平面 $x=0, y=0, z=0$ 及平面 $x+y+z=2$ 所圍成的四面體的整個邊界面.

解 整個邊界面 Σ 在平面 $z=0, y=0, x=0$ 及 $x+y+z=2$ 上的部分依次記為 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及 Σ_4 , 於是

$$\oint_{\Sigma} (x+y) dS = \iint_{\Sigma_1} (x+y) dS + \iint_{\Sigma_2} (x+y) dS + \iint_{\Sigma_3} (x+y) dS + \iint_{\Sigma_4} (x+y) dS.$$

²記號 $\oint_{\Sigma}$ 表示在閉曲面 Σ 上的曲面積分.

在 Σ_1 上, $z = 0$, $dS = d(x, y)$, 投影區域 D_1 為 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$.

$$\iint_{\Sigma_1} (x + y) dS = \iint_{D_1} (x + y) d(x, y) = \int_0^2 \int_0^{2-x} (x + y) dy dx = \int_0^2 \left(x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 \right) dx = \frac{8}{3}.$$

在 Σ_2 上, $y = 0$, $dS = d(x, z)$, 投影區域 D_2 為 $x \geq 0, z \geq 0, x + z \leq 2$, 被積函數化為 x .

$$\iint_{\Sigma_2} (x + y) dS = \iint_{D_2} x d(x, z) = \int_0^2 \int_0^{2-x} x dz dx = \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{4}{3}.$$

在 Σ_3 上, $x = 0$, $dS = d(y, z)$, 投影區域 D_3 為 $y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 2$, 被積函數化為 y . 根據對稱性, 其積分值與 Σ_2 上的積分相同:

$$\iint_{\Sigma_3} (x + y) dS = \frac{4}{3}.$$

在 Σ_4 上, $z = 2 - x - y$, 投影區域 D_4 與 D_1 相同, 且 $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$.

$$\iint_{\Sigma_4} (x + y) dS = \iint_{D_4} (x + y) \sqrt{3} d(x, y) = \sqrt{3} \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

因此,

$$\oiint_{\Sigma} (x + y) dS = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16 + 8\sqrt{3}}{3}.$$

例 9.2.9 計算 $\oiint_{\Sigma} (x^3 + yz^2) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解 將曲面積分拆分為兩部分:

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 + yz^2) dS = \oiint_{\Sigma} x^3 dS + \oiint_{\Sigma} yz^2 dS.$$

對於積分 $\oiint_{\Sigma} x^3 dS$, 積分曲面 Σ 關於 yz 平面對稱, 且被積函數 $f(x, y, z) = x^3$ 為關於 x 的奇函數 (即 $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$), 由對稱性得

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dS = 0.$$

對於積分 $\oiint_{\Sigma} yz^2 dS$, 積分曲面 Σ 關於 xz 平面對稱, 且被積函數 $g(x, y, z) = yz^2$ 為關於 y 的奇函數 (即 $g(x, -y, z) = -g(x, y, z)$), 同理由對稱性得

$$\oiint_{\Sigma} yz^2 dS = 0.$$

所以

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 + yz^2) dS = 0.$$

例 9.2.10 計算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 Σ 為由參數方程式 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ 給出的圓錐面的一部分, 其參數空間為 $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi\}$.

解 已知曲面的參數方程式為 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, 不難求出偏導數:

$$\mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad \mathbf{r}'_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

計算它們的叉積:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-u \cos v, -u \sin v, u).$$

於是, 外積的長度為

$$\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| = \sqrt{(-u \cos v)^2 + (-u \sin v)^2 + u^2} = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{2}u.$$

根據參數曲面的曲面積分公式, 有

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS = \iint_D (u)^2 \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| d(u, v) = \iint_D u^2 \cdot \sqrt{2}u d(u, v) = \sqrt{2} \int_0^{\pi} dv \int_0^2 u^3 du = 4\sqrt{2}\pi.$$

例 9.2.11 計算 $\iint_{\Sigma} (z - R) dS$, 其中 Σ 是由方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$ 給出的曲面在 $z \geq R$ 的部分.

解 曲面由隱式方程式 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$ 給出. 計算其偏導數:

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z - 2R.$$

於是

$$\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z - R)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - R)^2}.$$

由於曲面方程式可配方改寫為 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, 故上式等於 $2\sqrt{R^2} = 2R$. 在 Σ 上由於 $z \geq R$, 故 $|F'_z| = 2(z - R)$. 根據隱式方程式的面積微元公式得

$$dS = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} d(x, y) = \frac{2R}{2(z - R)} d(x, y) = \frac{R}{z - R} d(x, y).$$

Σ 在 xy 平面上的投影區域 D_{xy} 由赤道邊界 ($z = R$) 決定: $x^2 + y^2 + (R - R)^2 \leq R^2$, 即 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 這是一個半徑為 R 的圓盤. 將 dS 代入積分式中, 有

$$\iint_{\Sigma} (z - R) dS = \iint_{D_{xy}} (z - R) \frac{R}{z - R} d(x, y) = \iint_{D_{xy}} R d(x, y) = R \iint_{D_{xy}} d(x, y).$$

因為 $\iint_{D_{xy}} d(x, y)$ 即為投影區域 D_{xy} 的面積 πR^2 , 故

$$\iint_{\Sigma} (z - R) dS = R(\pi R^2) = \pi R^3.$$

第二類曲面積分

定義 9.2.12 設 S 是光滑曲面 (S 可以是封閉的, 則此時無邊界, 否則它具有邊界). 對 S 上的任一點 P_0 , 取定 S 在 P_0 處的一個法向的朝向. 若一個動點 P 從 P_0 出發, 不越過 S 的邊界, 沿 S 上任何路徑 Γ 運動回到 P_0 處, S 在 P 的法向從 P_0 處選定的朝向出發連續地沿路徑 Γ 變化回到 P_0 處時, 總是保持原先在 P_0 處選定的朝向, 則稱 S 為**雙側曲面**, 否則稱 S 為**單側曲面**.

註記 9.2.13 通常遇到的曲面都是雙側的 (以後總假定所考慮的曲面是雙側的). 現設 S 是一雙側曲面, 從定義可以看出在 S 上任取一點 P_0 , 然後取定 S 在 P_0 處一個法向的朝向, 則該曲面一側法向的朝向即由該處法向的朝向所取定. 這種取定了法向量亦即選定了側的曲面, 就稱為**有向曲面**.

(1) 參數方程式表示的曲面: 若方程式

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

定義了一個光滑的雙側曲面 S , 令

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

則 $\mathbf{n} = \pm(A, B, C)$ 即為 S 的兩個不同朝向的法向量. 記 $\mathbf{n}_1 = (A, B, C)$, $\mathbf{n}_2 = (-A, -B, -C)$. 當 $P_0 \in S$, 且在 P_0 處 $C > 0$ 時, 將由 $\mathbf{n}_1$ 確定的一側稱為 S 的**上側**, $\mathbf{n}_2$ 確定的一側稱為 S 的**下側**. 類似地, 當 $A \neq 0$ 時, 可以說 S 有**前側**和**後側**, 而當 $B \neq 0$ 時, S 有**左側**和**右側**.

(2) 顯式方程式表示的曲面: 若光滑曲面 S 的方程式為 $z = f(x, y)$, 則 S 上點 (x, y, z) 處的法向量為 $\mathbf{n} = \pm(-f'_x, -f'_y, 1)$. 因此, 若 $\mathbf{n}$ 取「+」號 (即法向量指向朝上), 便得到了 S 的上側; 若 $\mathbf{n}$ 取「-」號, 則得到 S 的下側.

(3) 閉曲面: 一張包圍某一空間區域的閉曲面, 有**外側**與**內側**之分. 對於閉曲面如果取它的法向量的指向朝外, 那麼就認為取定曲面的外側.

定義 9.2.14 設 Σ 是有向曲面. 在 Σ 上取一小塊曲面 ΔS , 把 ΔS 投影到 xy 面上得一投影區域, 這投影區域的面積記為 $(\Delta\sigma)_{xy}$. 假定 ΔS 上各點處的法向量與 z 軸的夾角 γ 的餘弦 $\cos\gamma$ 有相同的符號 (即 $\cos\gamma$ 都是正的或都是負的). 規定 ΔS 在 xy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 為

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma > 0, \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma < 0, \\ 0, & \cos\gamma = 0, \end{cases}$$

其中 $\cos\gamma = 0$ 也就是 $(\Delta\sigma)_{xy} = 0$ 的情形. ΔS 在 xy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 實際就是 ΔS 在 xy 面上的投影區域的面積附以一定的正負號. 類似地可以定義 ΔS 在 yz 面及 zx 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 及 $(\Delta S)_{zx}$.

定義 9.2.15 設 Σ 為光滑的有向曲面, 向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 m 塊小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同時又表示第 i 塊小曲面的面積), ΔS_i 在 yz 面、 zx 面、 xy 面上的有向投影分別記為 $(\Delta S_i)_{yz}, (\Delta S_i)_{zx}, (\Delta S_i)_{xy}$. 可以構造一個有向的向量面積微元 $\Delta\mathbf{S}_i = ((\Delta S_i)_{yz}, (\Delta S_i)_{zx}, (\Delta S_i)_{xy})$.

設 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一點, 作向量內積 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\mathbf{S}_i$, 並作和 $\sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\mathbf{S}_i$. 如果當各小塊曲面的直徑的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 時, 這和的極限總存在, 且與曲面 Σ 的分法及點 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法無關, 那麼稱此極限為向量函數 $\mathbf{F}$ 在有向曲面 Σ 上**對坐標的曲面積分**, 此種積分也稱為**第二類曲面積分**.

若將 $(dydz, dzdx, dxdy)$ 記為向量微元 $d\mathbf{S}$, 則該積分可記作 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$, 即

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\mathbf{S}_i,$$

其中 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 叫做**被積函數**, Σ 叫做**積分曲面**.

在應用上出現較多的是將三個坐標面上的積分合併起來的形式. 為簡便起見, 將它寫成內積展開的純量形式:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

如果 Σ 是片光滑的有向曲面, 那麼規定函數在 Σ 上對座標的曲面積分等於函數在各片光滑曲面上對座標的曲線積分之和.

命題 9.2.16 設 Σ 為有向光滑曲面, 向量函數 $\mathbf{F}$ 在 Σ 上有界且可積, 並以 $d\mathbf{S} = (dy dz, dz dx, dx dy)$ 表示有向面積微元向量.

(1) 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 那麼

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}.$$

此公式可以推廣到 Σ 分成 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ 幾部分的情形.

(2) 設 Σ 是有向曲面, Σ^- 表示與 Σ 取相反側的有向曲面, 則

$$\iint_{\Sigma^-} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}.$$

註記 9.2.17 命題 9.2.16(2) 表示, 當積分曲面改變為相反側時, 對坐標的曲面積分要改變符號. 因此關於對坐標的曲面積分, 必須注意積分曲面所取的側.

定理 9.2.18 設有向光滑曲面 Σ 由參數方程式 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 給出, $(u, v) \in D$, 且 $\mathbf{r}(u, v)$ 在有界閉區域 D 上具有一階連續偏導數, $\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \neq 0$. 若向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在 Σ 上連續, 則 $\mathbf{F}$ 在 Σ 上對坐標的曲面積分為

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) d(u, v),$$

其中等式右端正負號的選取取決於 Σ 的側: 當 $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ 的指向與 Σ 所規定的法向量指向相同時取正號, 相反時取負號.

證明 根據對坐標的曲面積分的定義, 將參數空間 D 分割成 m 個小區域 ΔD_i , 面積為 $\Delta \sigma_i$. 這對應於將曲面 Σ 分割成 m 個小曲面塊 ΔS_i . 對於每一個小曲面塊, 其有向面積微元向量 $\Delta \mathbf{S}_i$ 的方向由曲面規定的單位法向量 $\mathbf{n}$ 決定, 絕對值大小為該小曲面的面積.

在參數空間中, 由向量微積分的幾何意義可知, 切平面上的有向面積微元可由 $\mathbf{r}'_u$ 與 $\mathbf{r}'_v$ 的外積近似給出, 即

$$\Delta \mathbf{S}_i \approx \pm (\mathbf{r}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_i)) \Delta \sigma_i,$$

符號的選取對應於曲面規定的法向量方向. 於是曲面積分的定義極限可寫為

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\mathbf{r}(u_i, v_i)) \cdot (\pm (\mathbf{r}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_i))) \Delta \sigma_i.$$

上式右端的和的極限, 正是連續函數在有界閉區域 D 上的二重積分. 由於被積函數與偏導數皆連續, 該二重積分必定存在, 故得

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) d(u, v).$$

□

系理 9.2.19 設積分曲面 Σ 是由方程式 $z = z(x, y)$ 給出的光滑曲面, 其在 xy 平面上的投影區域為 D_{xy} , 函數 $z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一階連續偏導數, 向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 Σ 上連續.

若將 x, y 視為參數, 此時 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, 其偏導數外積為 $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$. 代入參數曲面的計算公式並展開內積, 可得:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{xy}} (P(-z'_x) + Q(-z'_y) + R) d(x, y).$$

具體而言, 如果 Σ 取上側 (即法向量朝上, 餘弦大於 0), 則上式取正號; 如果 Σ 取下側, 則取負號.

類似地, 如果 Σ 由 $x = x(y, z)$ 給出, 其投影區域為 D_{yz} , 則 $\mathbf{r}'_y \times \mathbf{r}'_z = (1, -x'_y, -x'_z)$, 積分公式為

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{yz}} (P + Q(-x'_y) + R(-x'_z)) d(y, z),$$

當 Σ 取前側時取正號, 取後側時取負號;

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 給出, 其投影區域為 D_{zx} , 則 $\mathbf{r}'_z \times \mathbf{r}'_x = (-y'_z, 1, -y'_x)$, 積分公式為

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{zx}} (P(-y'_z) + Q + R(-y'_x)) d(z, x),$$

當 Σ 取右側時取正號, 取左側時取負號.

註記 9.2.20 (關於閉曲面的計算方法) 對於包圍空間某一立體區域 Ω 的閉曲面 Σ , 通常約定其外側為正向 (即法向量指向 Ω 的外部), 內側為負向.

在計算對閉曲面的坐標曲面積分 $\oiint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ 時, 通常的作法是利用曲面的可加性, 將該閉曲面分割成幾個可以用顯式方程式表示的部分. 例如, 用平行於 xy 面的平面將 Σ 分成上半曲面 Σ_1 ($z = z_1(x, y)$) 與下半曲面 Σ_2 ($z = z_2(x, y)$).

此時, Σ_1 的「外側」正好對應於曲面的「上側」(套用顯式公式時取正號); 而 Σ_2 的「外側」則對應於曲面的「下側」(套用顯式公式時取負號). 將各部分分別化為二重積分後求和, 即可得到整個閉曲面上的積分值:

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1(\text{外側=上側})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2(\text{外側=下側})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

系理 9.2.21 設積分曲面 Σ 由隱式方程式 $F(x, y, z) = 0$ 給出, 其在 xy 平面上的投影區域為 D_{xy} , 函數 $F(x, y, z)$ 具有一階連續偏導數, 且在 Σ 上滿足 $F'_z(x, y, z) \neq 0$. 向量函數

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

在 Σ 上連續.

由於 Σ 上點 (x, y, z) 處的法向量與梯度向量 (F'_x, F'_y, F'_z) 共線, 其有向面積微元向量可表示為

$$d\mathbf{S} = \pm \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{|F'_z|} d(x, y).$$

將其代入對坐標的曲面積分公式並展開內積, 可得:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{D_{xy}} \frac{P(x, y, z)F'_x + Q(x, y, z)F'_y + R(x, y, z)F'_z}{|F'_z|} d(x, y),$$

其中右端被積函數中的 z 必須由方程式 $F(x, y, z) = 0$ 解出並代入, 以表示為 x 與 y 的函數.

等式右端正負號的選取取決於曲面 Σ 所規定的側: 若 Σ 的法向量指向與梯度向量 (F'_x, F'_y, F'_z) 的指向一致 (即兩者夾角為銳角), 則取正號; 若指向相反 (即兩者夾角為鈍角), 則取負號.

類似地, 若將 Σ 投影至 yz 平面或 zx 平面, 只要相應地要求 $F'_x \neq 0$ 或 $F'_y \neq 0$, 並將公式中的分母替換為 $|F'_x|$ 或 $|F'_y|$, 以及使用對應的面積微元 $d(y, z)$ 或 $d(z, x)$ 即可.

例 9.2.22 計算曲面積分

$$\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

其中 Σ 是長方體 Ω 的整個表面的外側, Ω 由不等式 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 所給出.

解 把有向曲面 Σ 分成以下六部分:

- $\Sigma_1 : z = c$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) 的上側,
- $\Sigma_2 : z = 0$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) 的下側,
- $\Sigma_3 : x = a$ ($0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$) 的前側,

- $\Sigma_4 : x = 0$ ($0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$) 的後側,
- $\Sigma_5 : y = b$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$) 的右側,
- $\Sigma_6 : y = 0$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$) 的左側.

除 Σ_3, Σ_4 外, 其餘四片曲面在 yz 面上的投影為零, 因此

$$\iint_{\Sigma} x^3 dy dz = \iint_{\Sigma_3} x^3 dy dz + \iint_{\Sigma_4} x^3 dy dz.$$

對於 Σ_3 , 其外側法向量朝前 (與 x 軸正向夾角為銳角, 餘弦大於 0), 公式取正號; 對於 Σ_4 , 其外側法向量朝後 (與 x 軸正向夾角為鈍角, 餘弦小於 0), 公式取負號. 應用公式就有

$$\iint_{\Sigma} x^3 dy dz = + \iint_{D_{yz}} a^3 d(y, z) - \iint_{D_{yz}} 0^3 d(y, z) = a^3(bc).$$

類似地, 在 zx 面與 xy 面上的積分分別為

$$\iint_{\Sigma} y^3 dz dx = b^3(ac), \quad \iint_{\Sigma} z^3 dx dy = c^3(ab).$$

於是所求曲面積分為

$$\iint_{\Sigma} (x^3 + y^3 + z^3) \cdot (dydz, dzdx, dxdy) = a^3bc + ab^3c + abc^3 = abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

例 9.2.23 計算曲面積分 $\iint_{\Sigma} x^2 z dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外側.

解 把 Σ 分為上、下兩部分 Σ_1 和 Σ_2 . Σ_1 的方程式為 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (取上側); Σ_2 的方程式為 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (取下側).

根據對坐標曲面積分對積分域的可加性, 有

$$\iint_{\Sigma} x^2 z dx dy = \iint_{\Sigma_1} x^2 z dx dy + \iint_{\Sigma_2} x^2 z dx dy.$$

由於 Σ_1 取上側 (法向量與 z 軸正向夾銳角), 化為二重積分時取正號; Σ_2 取下側 (法向量與 z 軸正向夾鈍角), 化為二重積分時取負號. 因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 z dx dy &= + \iint_{D_{xy}} x^2 (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) d(x, y) - \iint_{D_{xy}} x^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) d(x, y) \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} x^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d(x, y), \end{aligned}$$

其中 D_{xy} 是 Σ 在 xy 面上的投影區域, 即圓盤 $x^2 + y^2 \leq R^2$. 利用極坐標計算這個二重積分如下:

$$2 \iint_{D_{xy}} x^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d(x, y) = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{4\pi}{15} R^5.$$

例 9.2.24 計算曲面積分 $\iint_{\Sigma} y dy dz - x dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 由參數方程式 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ 給出, 參數範圍為 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$. 該曲面取定法向量具有正的 z 分量的一側.

解 已知曲面的參數方程式, 我們先求出偏導數向量:

$$\mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}'_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

直接計算它們的叉積以判斷法向量方向:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (\sin v, -\cos v, u).$$

由計算結果可知, 該叉積向量的 z 分量為 u . 由於參數範圍中 $u \geq 0$, 這個外積向量 (在內部點) 嚴格具有正的 z 分量. 這與題目所規定的「法向量具有正的 z 分量」方向完全一致 (兩者夾角為 0 , 餘弦為正). 因此, 在代入參數曲面積分公式時, 應當取「+」號.

將被積向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$ 代入參數式, 得到 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) = (u \sin v, -u \cos v, v)$. 根據計算公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= + \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) d(u, v) \\ &= \iint_D ((u \sin v)(\sin v) + (-u \cos v)(-\cos v) + (v)(u)) d(u, v) \\ &= \iint_D (u \sin^2 v + u \cos^2 v + uv) d(u, v) = \iint_D (u + uv) d(u, v) \\ &= \int_0^\pi (1 + v) dv \int_0^1 u du = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

例 9.2.25 計算曲面積分 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 由隱式方程式 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ 給出, 且 $0 \leq z \leq 1$. 該曲面取定法向量朝下 (即法向量與 z 軸正向夾角為鈍角) 的一側.

解 曲面由隱式方程式 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ 給出. 直接計算其梯度向量:

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (2x, 2y, -1).$$

由計算結果可知, 梯度向量 ∇F 的 z 分量為 $-1 < 0$, 這表示該梯度向量指向朝下 (與 z 軸正向夾角為鈍角). 這與題目所規定的「法向量朝下」方向完全一致. 既然曲面的側與梯度向量的指向一致 (夾角為銳角), 根據隱式方程式的曲面積分計算系理, 公式應當取「+」號.

將被積向量函數 $\mathbf{F} = (x, y, z)$ 與投影微元公式結合, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= + \iint_{D_{xy}} \frac{PF'_x + QF'_y + RF'_z}{|F'_z|} d(x, y) \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{x(2x) + y(2y) + z(-1)}{|-1|} d(x, y) = \iint_{D_{xy}} (2x^2 + 2y^2 - z) d(x, y). \end{aligned}$$

在曲面 Σ 上, 滿足 $z = x^2 + y^2$. 代入上式可得被積函數為 $2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) = x^2 + y^2$. Σ 在 xy 平面上的投影區域 D_{xy} 由 $0 \leq z \leq 1$ 給出, 也就是圓盤 $x^2 + y^2 \leq 1$. 利用極坐標計算該二重積分:

$$\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2(r) dr = \frac{\pi}{2}.$$

兩類曲面積分之間的關係

兩類曲面積分之間的關係可透過曲面的單位法向量來建立本質上的聯繫. 設 Σ 為 $\mathbb{R}^3$ 中一塊有向光滑曲面, 向量函數 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 Σ 上連續.

對於有向曲面 Σ , 設其上一點 (x, y, z) 處所取定的單位法向量為

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 為該單位法向量的方向餘弦.

回顧一下先前引入的有向向量面積微元 $d\mathbf{S} = (dydz, dzdx, dxdy)$. 從幾何意義來看, 該微元向量的方向正是曲面 Σ 的單位法向量 $\mathbf{n}$ 的方向, 而其長度 (絕對值) 即為對面積的曲面積分 (第一類曲面積分) 中的純量面積微元 dS . 因此, 兩類面積微元之間存在著如下的向量關係:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS,$$

若寫成分量形式, 則為

$$dydz = \cos \alpha dS, \quad dzdx = \cos \beta dS, \quad dxdy = \cos \gamma dS.$$

將這個關係代入對坐標的曲面積分 (第二類曲面積分) 之中, 可將向量微元 $d\mathbf{S}$ 改寫為 $\mathbf{n} dS$, 也就是將向量內積 $\mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ 化為 $(\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}) dS$, 於是得到兩類曲面積分之間的聯繫公式:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} (\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}) dS.$$

若將上式以坐標分量的形式展開, 則為

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ = \iint_{\Sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

註記 9.2.26 這個向量形式的公式揭示了兩類曲面積分在物理與幾何上的聯繫:

- 對向量場 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 進行第二類曲面積分 (例如計算流體穿過有向曲面的流量, 即通量), 實質上就等於先求出該向量場在曲面法線方向上的投影分量 (即純量場 $f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}$), 再將這個純量場在曲面 Σ 上進行第一類曲面積分.
- 向量微元 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ 在幾何上被稱為有向曲面微元.

例 9.2.27 計算曲面積分 $\iint_{\Sigma} (y^2 + y) dydz - z dx dy$, 其中 Σ 是旋轉拋物面 $z = x^2 + y^2$ 介於平面 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之間的部分的下側.

解 由兩類曲面積分之間的聯繫, 可得

$$\iint_{\Sigma} (y^2 + y) dydz = \iint_{\Sigma} (y^2 + y) \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} (y^2 + y) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy.$$

在曲面 Σ 上, 其法向量指向朝下 (即法向量與 z 軸夾角為鈍角, $\cos \gamma < 0$), 有

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

故

$$\iint_{\Sigma} (y^2 + y) dydz - z dx dy = \iint_{\Sigma} ((y^2 + y)(-2x) - z) dx dy.$$

再按對坐標的曲面積分的計算法, 因為 Σ 取下側, 所以投影微元 $dx dy = -d(x, y)$, 使得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (y^2 + y) dydz - z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} ((y^2 + y)(-2x) - (x^2 + y^2)) d(x, y) \\ &= \iint_{D_{xy}} [2xy^2 + 2xy + (x^2 + y^2)] d(x, y). \end{aligned}$$

注意到由積分區域 D_{xy} 的對稱性 $\iint_{D_{xy}} (2xy^2 + 2xy) d(x, y) = 0$, 故

$$\iint_{\Sigma} (y^2 + y) dydz - z dx dy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2) r dr = \frac{\pi}{2}.$$

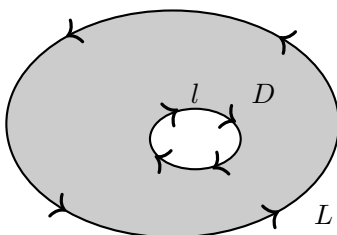
9.3 格林定理

定義 9.3.1 設 D 為平面區域, 若 D 內任一閉曲線所圍的部分都屬於 D , 則稱 D 為**平面單連通區域**, 否則稱為**複連通區域**.

簡言之³, 平面單連通區域就是不含有「洞」(包括點「洞」) 的區域, 複連通區域是含有「洞」(包括點「洞」) 的區域. 例如, 平面上的圓形區域 $x^2 + y^2 < 1$ 、上半平面 $y > 0$ 都是單連通區域, 圓環形區域 $1 < x^2 + y^2 < 4$ 、 $0 < x^2 + y^2 < 2$ 都是複連通區域.

定義 9.3.2 對平面區域 D 的邊界曲線 L , 規定 L 的正向如下: 當觀察者沿 L 的這個方向行走時, D 內在他近處的那一部分總在他的左邊.

例如下圖, D 是邊界曲線 L 及 l 所圍成的複連通區域, 作為 D 的正向邊界, L 的正向是逆時針方向, 而 l 的正向是順時針方向.

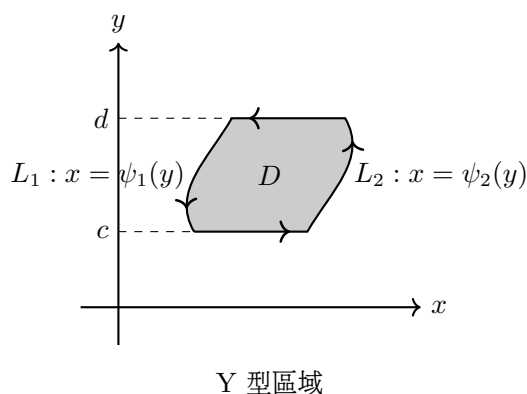
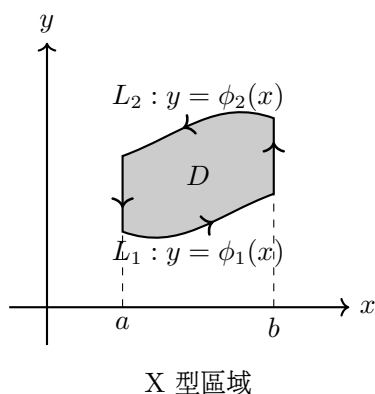


定理 9.3.3 (格林定理) 設閉域 D 由分段光滑的曲線 L 圍成, 若函數 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一階連續偏導數, 則有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

其中 L 是 D 的取正向的邊界曲線.

證明 首先假定閉域 D 既是 X 型區域⁴又是 Y 型區域⁵.



由於 D 是 X 型區域, 可以將其表示為

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

因為 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上連續, 由二重積分的計算法則有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx.$$

³嚴格來說, 單連通區域牽涉到拓撲學之「同倫」的概念.

⁴若穿過區域內部且平行於 y 軸的直線與該區域邊界相交至多兩點, 則稱此區域為 **X 型區域**.

⁵若穿過區域內部且平行於 x 軸的直線與該區域邊界相交至多兩點, 則稱此區域為 **Y 型區域**.

另一方面, 根據對坐標的曲線積分性質, 沿正向邊界 L 的積分可拆解為

$$\begin{aligned}\oint_L P(x, y) dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{x=b} P dx + \int_{L_2} P dx + \int_{x=a} P dx \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + 0 + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx + 0 \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx.\end{aligned}$$

比較上述兩式, 即可得出

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d(x, y).$$

同理, 由於 D 也是 Y 型區域, 可將其表示為

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

對 $Q(x, y)$ 進行類似的推導:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d(x, y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy.$$

而沿正向邊界 L 的積分為

$$\begin{aligned}\oint_L Q(x, y) dy &= \int_{\bar{L}_1} Q dy + \int_{y=c} Q dy + \int_{\bar{L}_2} Q dy + \int_{y=d} Q dy \\ &= \int_d^c Q(\psi_1(y), y) dy + 0 + \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy + 0 \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy.\end{aligned}$$

由此可得

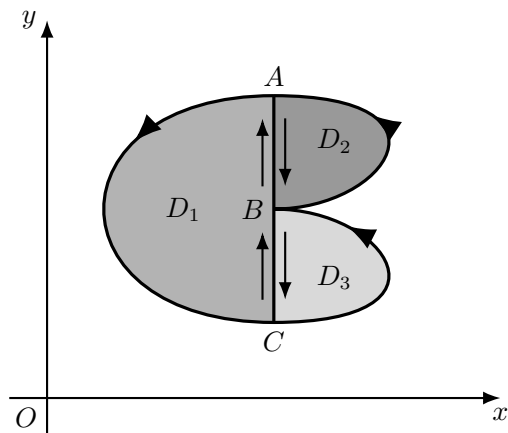
$$\oint_L Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} d(x, y).$$

將兩式相加, 即證明了既是 X 型又是 Y 型的簡單閉域上的格林定理。

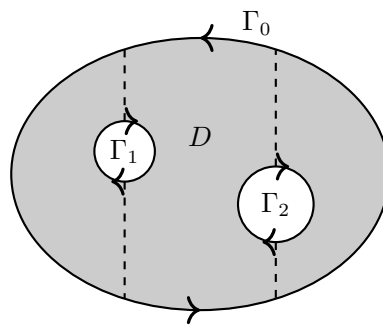
再考慮一般情形. 如果閉域 D 不滿足上述條件, 可以在 D 內引進一條或幾條輔助曲線 (參考下圖), 把 D 分成有限個既是 X 型又是 Y 型的部分閉域. 對每個部分閉域應用格林公式後相加, 由於沿輔助曲線來回的曲線積分方向相反、互相抵消, 等式左邊合併為整體二重積分, 右邊合併為外邊界 L 上的曲線積分, 公式依然成立.

對於 K 連通區域⁶ D , 我們同樣可以在區域內添加若干條輔助光滑曲線, 將 D 分割成有限個單連通區域. 在每個小單連通區域上應用已證的格林公式並相加, 輔助曲線上的積分相互抵消, 最後剩下的是沿著 D 的所有邊界 (包含外邊界與內邊界) 的曲線積分. 只要這些邊界的方向對區域 D 而言都是正向, 格林公式就仍然成立. 因此, 定理得證.

⁶ K 連通區域即為含有 $K - 1$ 個「洞」的複連通區域, 其邊界由 K 條互不相交的閉曲線所組成.



一般型單連通區域的輔助線分割



複連通區域的輔助線分割

□

系理 9.3.4 設閉域 D 由分段光滑的簡單閉曲線 L 圍成, L 的方向對 D 來說為正向. 則區域 D 的面積 A 可由下列對坐標的曲線積分給出:

$$A = \oint_L x \, dy = - \oint_L y \, dx = \frac{1}{2} \oint_L (x \, dy - y \, dx).$$

證明 已知區域 D 的面積可由二重積分計算, 即 $A = \iint_D d(x, y)$. 根據格林定理

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

故只需適當選取函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$, 使得 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ 即可得出面積公式.

- (1) 若取 $P(x, y) = 0$ 且 $Q(x, y) = x$, 則偏導數為 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ 與 $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. 此時 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 0 = 1$, 代入格林公式即得

$$\iint_D d(x, y) = \oint_L x \, dy.$$

- (2) 若取 $P(x, y) = -y$ 且 $Q(x, y) = 0$, 則偏導數為 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 與 $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$. 此時 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-1) = 1$, 代入格林公式即得

$$\iint_D d(x, y) = \oint_L (-y) \, dx = - \oint_L y \, dx.$$

- (3) 若取 $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ 且 $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$, 則偏導數為 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}$ 與 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}$. 此時 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$, 代入格林公式即得

$$\iint_D d(x, y) = \oint_L \left(-\frac{1}{2}y \right) dx + \left(\frac{1}{2}x \right) dy = \frac{1}{2} \oint_L (x \, dy - y \, dx).$$

由以上三種選取方式, 可以清楚看到這三個積分都等於 $\iint_D d(x, y)$, 即區域 D 的面積 A . □

例 9.3.5 計算 $\oint_L (x^3 - x^2y) \, dx + (xy^2 + y^3) \, dy$, 其中 L 為正向圓周 $x^2 + y^2 = R^2$.

解 令 $P = x^3 - x^2y$, $Q = xy^2 + y^3$, 則

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - (-x^2) = x^2 + y^2.$$

因此, 由格林公式有

$$\oint_L (x^3 - x^2y) dx + (xy^2 + y^3) dy = \iint_D (x^2 + y^2) d(x, y),$$

其中 D 為圓周所圍成的閉域 $x^2 + y^2 \leq R^2$. 轉換為極坐標計算, 使得

$$\iint_D (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2(r) dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

例 9.3.6 計算 $\iint_D \sin(x^2) d(x, y)$, 其中 D 是以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ 為頂點的三角形閉域.

解 令 $P = -y \sin(x^2)$, $Q = 0$, 則

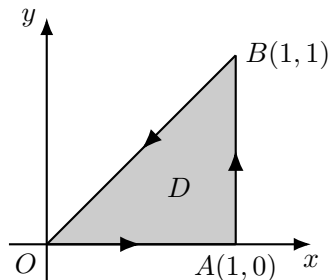
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-\sin(x^2)) = \sin(x^2).$$

因此, 由格林公式有

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x^2) d(x, y) &= \oint_{\overline{OA} \cup \overline{AB} \cup \overline{BO}} (-y \sin(x^2)) dx \\ &= \int_{\overline{OA}} (-y \sin(x^2)) dx + \int_{\overline{AB}} (-y \sin(x^2)) dx + \int_{\overline{BO}} (-y \sin(x^2)) dx. \end{aligned}$$

在 $\overline{OA}$ 上, $y = 0$, 積分為 0; 在 $\overline{AB}$ 上, $x = 1$, $dx = 0$, 積分為 0; 在 $\overline{BO}$ 上, 直線方程式為 $y = x$, 且 x 從 1 變到 0. 故

$$\iint_D \sin(x^2) d(x, y) = \int_1^0 (-x \sin(x^2)) dx = \frac{1}{2}(1 - \cos 1).$$



例 9.3.7 求星形線 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 所圍成圖形的面積 A .

解 根據面積公式 $A = \frac{1}{2} \oint_L (x dy - y dx)$ 有

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((a \cos^3 t)(3a \sin^2 t \cos t) - (a \sin^3 t)(-3a \cos^2 t \sin t)) dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

例 9.3.8 計算

$$\oint_L \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2},$$

其中 L 為一條無重點⁷、分段光滑且不經過原點的連續閉曲線, L 的方向為逆時針方向.

解 令

$$P = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

則當 $x^2 + y^2 \neq 0$ 時, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - (x + y)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - (x - y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

⁷即簡單曲線或不自交曲線. 詳言之, 對於連續曲線 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 如果除了 $t = \alpha, t = \beta$ 外, 當 $t_1 \neq t_2$ 時, $(\varphi(t_1), \psi(t_1)), (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ 總是相異的, 就那麼稱 L 為無重點曲線或不自交曲線.

可知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 記 L 所圍成的閉域為 D .

當 $(0, 0) \notin D$ 時, 由格林公式便得

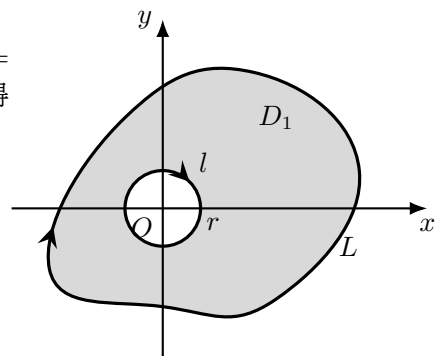
$$\oint_L \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

當 $(0, 0) \in D$ 時, 選取適當小的 $r > 0$, 作位於 D 內的圓周 $l: x^2 + y^2 = r^2$. 記 L 和 l 所圍成的閉域為 D_1 . 對複連通區域 D_1 應用格林公式, 得

$$\oint_L \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} = 0,$$

其中 l 的方向取逆時針方向. 於是

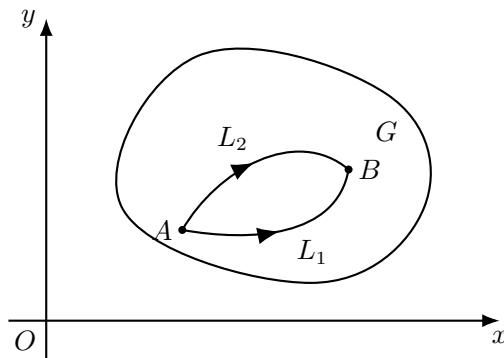
$$\begin{aligned} \oint_L \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} &= \oint_l \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(r \cos \theta - r \sin \theta)(-r \sin \theta) + (r \cos \theta + r \sin \theta)(r \cos \theta)}{r^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$



定義 9.3.9 設 G 是一個平面區域, 函數 $P(x, y)$ 以及 $Q(x, y)$ 在區域 G 內具有一階連續偏導數. 如果對於 G 內任意指定的兩個點 A, B 以及 G 內從點 A 到點 B 的任意兩條曲線弧 L_1, L_2 , 等式

$$\int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{L_2} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

恆成立, 就說曲線積分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 內與路徑無關, 否則便說與路徑相關.



註記 9.3.10 在以上敘述中注意到, 如果曲線積分與路徑無關, 那麼由兩路徑積分相等可得

$$\int_{L_1} P dx + Q dy - \int_{L_2} P dx + Q dy = 0,$$

亦即

$$\int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{L_2^-} P dx + Q dy = 0,$$

從而合併為

$$\oint_{L_1 + L_2^-} P dx + Q dy = 0,$$

這裡 $L_1 + L_2^-$ 是一條有向閉曲線。因此，在區域 G 內由曲線積分與路徑無關可推得在 G 內沿任意閉曲線的曲線積分爲零。反過來，如果在區域 G 內沿任意閉曲線的曲線積分爲零，也可推得在 G 內曲線積分與路徑無關。

由此得出結論：曲線積分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 內與路徑無關相當於沿 G 內任意閉曲線 C 的曲線積分 $\oint_C P dx + Q dy$ 等於零。

定理 9.3.11 設區域 G 是一個單連通區域，若函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在 G 內具有一階連續偏導數，則曲線積分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 內與路徑無關（或沿 G 內任意閉曲線的曲線積分爲零）的充要條件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 內恆成立。

證明 充分性：在 G 內任取一條閉曲線 C ，要證當條件 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 成立時有 $\oint_C P dx + Q dy = 0$ 。因爲 G 是單連通的，所以閉曲線 C 所圍成的閉域 D 全部在 G 內，於是等式 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 在 D 上恆成立。應用格林公式，有

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y).$$

上式右端的二重積分等於零（因爲被積函數在 D 上恆爲零），從而左端的曲線積分也等於零。

必要性：斷言：如果沿 G 內任意閉曲線的曲線積分爲零，那麼 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 在 G 內恆成立。用反證法來證。假設上述論斷不成立，那麼 G 內至少有一點 M_0 ，使

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{M_0} \neq 0.$$

不妨假定該函數值大於零，即 $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)|_{M_0} = \eta > 0$ 。由於 $\partial P/\partial y$ 與 $\partial Q/\partial x$ 在 G 內連續，可以在 G 內取得一個以 M_0 爲圓心、半徑足夠小的圓形閉域 K ，使得在 K 上恆有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq \frac{\eta}{2}.$$

於是由格林公式及二重積分的性質就有

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) \geq \frac{\eta}{2} \sigma,$$

這裡 γ 是 K 的正向邊界曲線， σ 是 K 的面積。因爲 $\eta > 0, \sigma > 0$ ，從而

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy > 0.$$

這結果與沿 G 內任意閉曲線的曲線積分爲零的假定相矛盾，可見 G 內使條件不成立的點不可能存在，即 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 在 G 內處處成立。□

註記 9.3.12 在路徑無關的等價條件定理中，嚴格要求了區域 G 必須是「單連通區域」，且函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在 G 內必須具備「一階連續偏導數」。若未能同時滿足這兩個前提，則路徑無關的結論將不再保證成立。

回顧前面的例 9.3.8 即可發現，當閉曲線 L 所包圍的區域內部含有原點 $(0, 0)$ 時，即使在除去原點以外的範圍內處處皆滿足 $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ ，但沿著該閉曲線的積分 $\oint_L P dx + Q dy$ 卻等於 2π 而非 0。

究其根本原因，正是因爲原點的存在破壞了函數 P, Q 及其偏導數的連續性，使得該點無法被納入積分區域中。這在幾何上相當於在區域內挖了一個「洞」，導致原本的單連通區域退化成了複連通區域。在數學上，像這樣使得函數失去連續性或無定義的點，一般稱之爲**奇點**。

定理 9.3.13 (全微分的等價條件) 設區域 G 是一個單連通區域, 若函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在 G 內具有一階連續偏導數, 則微分式 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 在 G 內為某一函數 $u(x, y)$ 的全微分的充要條件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 內恆成立.

證明 必要性: 假設存在著某一函數 $u(x, y)$, 使得 $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, 則必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

從而求其二階混合偏導數, 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由於 P 與 Q 具有一階連續偏導數, 所以混合偏導數 $\partial^2 u / \partial x \partial y$ 與 $\partial^2 u / \partial y \partial x$ 在 G 內連續. 根據混合偏導數相等的定理, 必有 $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial^2 u / \partial y \partial x$, 即 $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

充分性: 設已知條件 $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$ 在 G 內恆成立, 由先前的定理可知, 在單連通區域 G 內的曲線積分與路徑無關. 取定起點 $M_0(x_0, y_0)$, 變動終點 $M(x, y)$, 則該積分值完全取決於終點坐標, 從而可定義出一個函數 $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t) ds + Q(s, t) dt.$$

(為區別積分的自變數與積分上限, 將積分變數記為 s, t). 下面證明這個函數 $u(x, y)$ 的全微分正是 $P dx + Q dy$. 因為 P 與 Q 都是連續的, 因此只要證明 $\partial u / \partial x = P$ 及 $\partial u / \partial y = Q$ 即可.

按偏導數的定義, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}.$$

由於積分與路徑無關, 我們可以選取從點 $M(x, y)$ 出發, 沿平行於 x 軸的水平直線段到達點 $N(x + \Delta x, y)$ 作為增量部分積分的路徑. 這樣就有

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P(s, t) ds + Q(s, t) dt.$$

因為直線段 MN 的方程式為 $t = y$ (常數), $dt = 0$, 按對坐標的曲線積分計算法, 上式成為

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_x^{x + \Delta x} P(s, y) ds.$$

應用定積分中值定理, 存在 $0 \leq \theta \leq 1$ 使得

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x.$$

上式兩邊除以 Δx , 並令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取極限. 由於 $P(x, y)$ 的偏導數在 G 內連續, $P(x, y)$ 本身也一定連續, 於是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

同理可證 $\partial u / \partial y = Q(x, y)$. 這就證明了條件是充分的. 證畢. $\square$

系理 9.3.14 設區域 G 是一個單連通區域, 若函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在 G 內具有一階連續偏導數, 則曲線積分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 內與路徑無關的充分必要條件是: 在 G 內存在函數 $u(x, y)$, 使 $du = P dx + Q dy$.

註記 9.3.15 根據上述定理, 如果函數 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在單連通區域 G 內具有一階連續偏導數, 且滿足條件 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, 那麼 $P dx + Q dy$ 必為某個函數 $u(x, y)$ 的全微分. 為計算簡便起見, 由於積分與路徑無關, 因此在求原函數 $u(x, y)$ 時, 經常選取平行於坐標軸的折線段作為積分路徑 (前提是這些折線必須完全位於 G 內). 例如, 取積分路線為先水平後垂直:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt,$$

或者先垂直後水平:

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x P(s, y) ds.$$

例 9.3.16 驗證: $(x dx + y dy)/(x^2 + y^2)$ 在右半平面 ($x > 0$) 內是某個函數的全微分, 並求出一個這樣的函數.

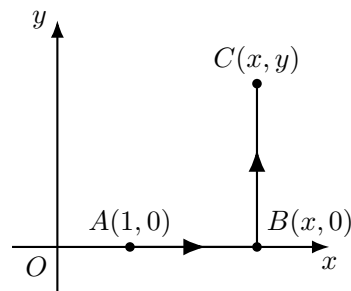
解 令 $P = x/(x^2 + y^2), Q = y/(x^2 + y^2)$, 則

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 + y^2)^2}.$$

由於在右半平面內恆有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立, 且右半平面為單連通區域, 因此在該區域內 $(x dx + y dy)/(x^2 + y^2)$ 是某個函數的全微分.

取積分起點為 $A(1, 0)$, 積分路線如右圖所示, 先沿水平方向至 $B(x, 0)$, 再沿垂直方向至 $C(x, y)$. 應用公式得所求函數為

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{s ds + t dt}{s^2 + t^2} \\ &= \int_{AB} \frac{s ds + t dt}{s^2 + t^2} + \int_{BC} \frac{s ds + t dt}{s^2 + t^2} \\ &= \int_1^x \frac{s}{s^2 + 0} ds + \int_0^y \frac{t}{x^2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2). \end{aligned}$$



例 9.3.17 驗證: 在整個 xy 平面內, $(3x^2y + 2x) dx + (x^3 + 3y^2) dy$ 是某個函數的全微分, 並求出一個這樣的函數.

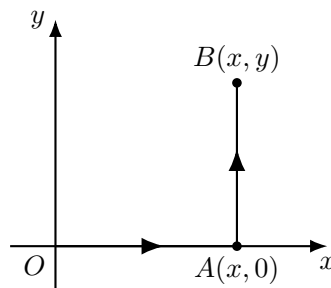
解 現在 $P = 3x^2y + 2x, Q = x^3 + 3y^2$, 且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2.$$

在整個平面內恆有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立, 因而在整個 xy 平面內, 該微分式是某個函數的全微分.

取積分起點為原點 $O(0, 0)$, 積分路線如右圖所示. 先沿 x 軸積分至 $A(x, 0)$, 再平行於 y 軸積分至 $B(x, y)$. 應用公式得所求函數為

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3s^2t + 2s) ds + (s^3 + 3t^2) dt \\ &= \int_{OA} (3s^2t + 2s) ds + \int_{AB} (s^3 + 3t^2) dt \\ &= \int_0^x (3s^2(0) + 2s) ds + \int_0^y (x^3 + 3t^2) dt \\ &= x^2 + x^3y + y^3. \end{aligned}$$



定義 9.3.18 若曲線積分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 在區域 G 內與積分路徑無關, 則稱向量場 $\mathbf{F}$ 為**保守場**.

定理 9.3.19 (曲線積分的基本定理) 設 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 是平面區域 G 內的一個向量場, 若 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 都在 G 內連續, 且存在一個純量函數 $f(x, y)$, 使得 $\mathbf{F} = \nabla f$, 則曲線積分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 在 G 內與路徑無關, 且

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A),$$

其中 L 是位於 G 內起點為 A 、終點為 B 的任一分段光滑曲線.

證明 設 L 的向量方程式為

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

起點 A 對應參數 $t = \alpha$, 終點 B 對應參數 $t = \beta$.

由假設, $f'_x = P$, $f'_y = Q$, 且 P, Q 連續, 從而 f 可微, 且

$$\frac{df}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

於是

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df}{dt} dt = f(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = f(B) - f(A).$$

證畢. □

註記 9.3.20 定理表明, 對於位場 $\mathbf{F}$, 曲線積分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 的值僅依賴於它的位函數 f 在路徑 L 的兩端點的值, 而不依賴於兩點間的路徑, 即積分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 在 G 內與路徑無關. 也就是說: 位場是保守場.

該公式稱為**曲線積分的基本公式**.

例 9.3.21 計算曲線積分 $\int_L (2xy + 3) dx + (x^2 - 4y) dy$, 其中 L 為平面上從點 $A(0, 0)$ 到點 $B(2, 1)$ 的任意分段光滑曲線.

解 令向量場 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (2xy + 3, x^2 - 4y)$.

首先檢驗其是否為保守場. 由於

$$P'_y = 2x, \quad Q'_x = 2x,$$

在全平面上 $P'_y = Q'_x$ 恆成立, 且全平面為單連通區域, 故 $\mathbf{F}$ 為保守場 (即位場), 積分與路徑無關, 且存在位函數 $f(x, y)$ 使得 $\nabla f = \mathbf{F}$.

現在來求位函數 $f(x, y)$. 由 $f'_x = 2xy + 3$, 對 x 積分可得

$$f(x, y) = x^2 y + 3x + g(y).$$

將其對 y 求偏導數並與 Q 比較:

$$f'_y = x^2 + g'(y) = x^2 - 4y,$$

由此得 $g'(y) = -4y$, 積分得 $g(y) = -2y^2 + C$. 取 $C = 0$, 得到一個位函數 $f(x, y) = x^2 y + 3x - 2y^2$.

根據曲線積分的基本定理, 有

$$\int_L (2xy + 3) dx + (x^2 - 4y) dy = f(B) - f(A) = f(2, 1) - f(0, 0) = (2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1^2) - 0 = 8.$$

9.4 向量微分算子

定義 9.4.1 設 G 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一區域, 且 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ 為定義在 G 上的一個 n 維向量場, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 若 $\mathbf{F}$ 的各個分量函數 F_i 在 G 內具有一階連續偏導數, 則定義 $\mathbf{F}$ 的**散度**為如下的純量場:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

定義 9.4.2 設 G 為 $\mathbb{R}^3$ 中的一個區域, 且 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 為定義在 G 上的一個三維向量場. 若 $\mathbf{F}$ 的各個分量函數 P, Q, R 在 G 內具有一階連續偏導數, 則定義 $\mathbf{F}$ 的**旋度**為如下的向量場:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

(註: 為了方便記憶, 旋度也可以形式上表示為**哈密頓算子** $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 與向量場 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 的向量外積).

定義 9.4.3 設 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 為定義在 $\mathbb{R}^n$ 之開區域 G 上的純量函數, 且具有二階連續偏導數. 將梯度的散度定義為**拉普拉斯算子**, 記作 Δ 或 ∇^2 , 即

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

特別地, 在三維空間 $\mathbb{R}^3$ 中, 對於純量函數 $f(x, y, z)$, 拉普拉斯算子具體表示為

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

對於三維向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 若各分量皆具二階連續偏導數, 則拉普拉斯算子作用於該向量場定義為對各個坐標分量分別作用:

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R).$$

命題 9.4.4 設 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 為向量場, f 為純量函數, c_1, c_2 為常數. 若它們皆具有一階連續偏導數, 則有:

(1) 線性性:

$$\nabla \cdot (c_1 \mathbf{F} + c_2 \mathbf{G}) = c_1 \nabla \cdot \mathbf{F} + c_2 \nabla \cdot \mathbf{G}.$$

(2) 純量與向量的乘積:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\nabla f).$$

(3) 向量外積的散度 (此處 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 為三維向量場):

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$

命題 9.4.5 設 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ 為三維向量場, f 為純量函數, c_1, c_2 為常數. 若它們皆具有一階連續偏導數, 則有:

(1) 線性性:

$$\nabla \times (c_1 \mathbf{F} + c_2 \mathbf{G}) = c_1 \nabla \times \mathbf{F} + c_2 \nabla \times \mathbf{G}.$$

(2) 純量與向量的乘積:

$$\nabla \times (f \mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}.$$

命題 9.4.6 設 f, g 為具有二階連續偏導數的純量函數, c_1, c_2 為常數, 則有:

(1) 線性性:

$$\Delta(c_1f + c_2g) = c_1\Delta f + c_2\Delta g.$$

(2) 乘積法則:

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\nabla f \cdot \nabla g) + g\Delta f.$$

(3) 純量函數的函數 (連鎖律): 若 $h(u)$ 為單變數且具二階可導的函數, 則

$$\Delta(h(f)) = h''(f)\|\nabla f\|^2 + h'(f)\Delta f.$$

(4) 徑向函數的拉普拉斯算子: 若 f 僅依賴於到原點的距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 即 $f = f(r)$, 則在三維空間中

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r).$$

(一般地, 在 n 維空間中該性質為 $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r)$).

註記 9.4.7 在物理與工程應用中, 滿足拉普拉斯方程式 $\Delta f = 0$ 的函數 f 被稱為**調和函數**. 調和函數在研究靜電場的電位、不可壓縮流體的勢流以及穩態熱傳導等領域中具有極為重要的理論地位.

命題 9.4.8 設純量函數 f 與三維向量場 $\mathbf{F}$ 皆具有二階連續偏導數, 則有以下重要的二階微分運算恆等式:

(1) 梯度的旋度為零向量:

$$\text{curl}(\text{grad}f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

(這在幾何上表明: 任何純量場的梯度場 (即位場) 必定是**無旋場**).

(2) 旋度的散度為零:

$$\text{div}(\text{curl}\mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

(這在幾何上表明: 任何向量場的旋度場必定是**無源場**).

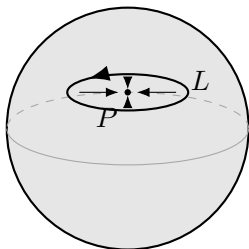
(3) 旋度的旋度:

$$\text{curl}(\text{curl}\mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}.$$

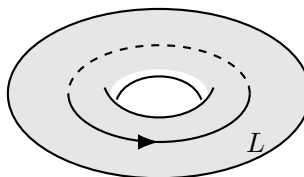
9.5 高斯散度定理

定義 9.5.1 對空間區域 G , 如果 G 內任一閉曲面所圍成的區域全屬於 G , 則稱 G 是**空間二維單連通區域**; 如果 G 內任一閉曲線總可以張成一片完全屬於 G 的曲面, 則稱 G 為**空間一維單連通區域**.

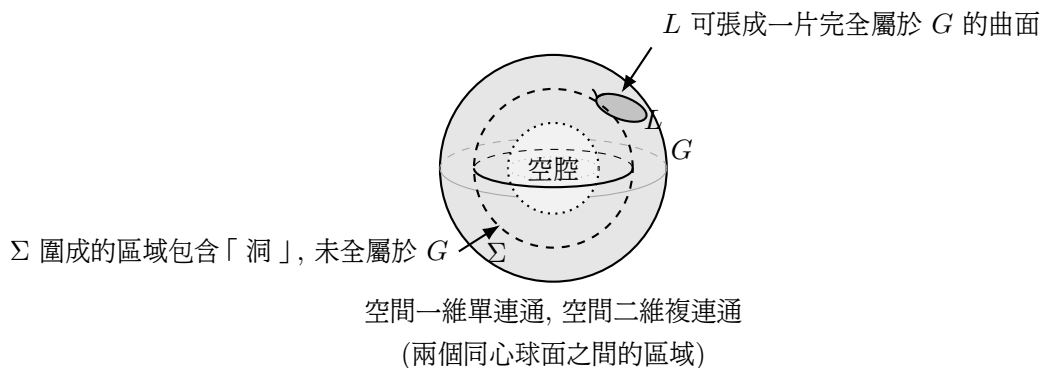
例如球面所圍成的區域既是空間二維單連通的, 又是空間一維單連通的; 環面所圍成的區域是空間二維單連通的, 但不是空間一維單連通的; 兩個同心球面之間的區域是空間一維單連通的, 但不是空間二維單連通的.



空間一、二維單連通



空間二維單連通, 空間一維複連通



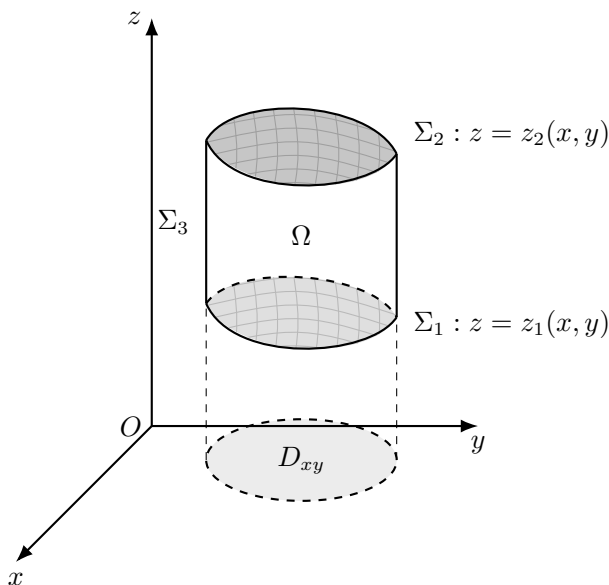
定理 9.5.2 (高斯散度定理) 設 Ω 為 $\mathbb{R}^3$ 空間中的一有界閉域, 其邊界 $\Sigma = \partial\Omega$ 為分片光滑的閉曲面, 且取外側為正向. 若向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 Ω 上具有一階連續偏導數, 則有

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

或者寫成分量形式:

$$\iiint_{\Omega} (P'_x + Q'_y + R'_z) \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy.$$

證明 為方便起見, 先假定積分區域 Ω 是 Z 型區域 (即穿過 Ω 內部且平行於 z 軸的直線與邊界 Σ 的交點恰好為兩個).



設 Ω 在 xy 平面上的投影區域為 D_{xy} , 則 Ω 可表示為

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

此時邊界曲面 Σ 可分為三個部分: 底面 $\Sigma_1 : z = z_1(x, y)$ (取下側), 頂面 $\Sigma_2 : z = z_2(x, y)$ (取上側), 以及母線平行於 z 軸的柱面側表面 Σ_3 (取外側).

根據三重積分的計算法則, 先計算對 R'_z 的體積分:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} R'_z \, d(x, y, z) &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} R'_z \, dz \right) d(x, y) \\ &= \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) \, d(x, y).\end{aligned}$$

另一方面, 計算向量場的 z 分量在邊界 Σ 上的對坐標曲面積分:

$$\oint_{\Sigma} R \, dx \, dy = \iint_{\Sigma_1} R \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} R \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_3} R \, dx \, dy.$$

由於 Σ_3 上任一塊微小曲面在 xy 平面上的投影皆為零, 故 $\iint_{\Sigma_3} R \, dx \, dy = 0$. 又 Σ_1 取下側 (法向量與 z 軸正向夾鈍角), 投影微元 $dx \, dy = -d(x, y)$; Σ_2 取上側 (法向量與 z 軸正向夾銳角), 投影微元 $dx \, dy = d(x, y)$. 於是

$$\begin{aligned}\oint_{\Sigma} R \, dx \, dy &= - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) \, d(x, y) + \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) \, d(x, y) \\ &= \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) \, d(x, y).\end{aligned}$$

比較兩式結果, 即可得到

$$\iiint_{\Omega} R'_z \, d(x, y, z) = \oint_{\Sigma} R \, dx \, dy.$$

同理, 若假定 Ω 亦為 X 型區域與 Y 型區域, 則可分別證得

$$\iiint_{\Omega} P'_x \, d(x, y, z) = \oint_{\Sigma} P \, dy \, dz, \quad \iiint_{\Omega} Q'_y \, d(x, y, z) = \oint_{\Sigma} Q \, dz \, dx.$$

把這三式相加, 即得高斯散度定理.

若閉域 Ω 不滿足上述簡單區域的條件, 則可引進適當的輔助曲面將 Ω 分割為有限個簡單區域. 在每個簡單區域上應用上述結論並相加, 由於沿輔助曲面相反兩側的曲面積分會相互抵消, 最終公式對於一般的閉域依然成立. $\square$

例 9.5.3 利用高斯散度定理計算曲面積分

$$\oint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy,$$

其中 Σ 為圓柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 及平面 $z = 0, z = h$ ($h > 0$) 所圍成的空間閉域 Ω 的整個邊界曲面的外側.

解 令向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, 則其散度為

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z.$$

利用高斯散度定理, 將所求曲面積分化為三重積分, 得

$$\oint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) \, d(x, y, z).$$

利用圓柱坐標系計算該三重積分. 由於 Ω 關於 xz 平面與 yz 平面皆對稱, 被積函數中的 $2x$ 與 $2y$ 為奇函數, 故它們在 Ω 上的積分為零, 即

$$\iiint_{\Omega} (2x + 2y) \, d(x, y, z) = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) \, d(x, y, z) &= \iiint_{\Omega} 2z \, d(x, y, z) \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} d(x, y) \int_0^h 2z \, dz = (\pi a^2) (z^2)|_0^h = \pi a^2 h^2. \end{aligned}$$

例 9.5.4 利用高斯散度定理計算曲面積分

$$\iint_{\Sigma} xz \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + (x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

其中 Σ 為旋轉拋物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 位於 xy 平面上方 ($z \geq 0$) 的部分的上側.

解 因曲面 Σ 不是封閉曲面, 故不能直接利用高斯散度定理. 設 Σ_1 為平面 $z = 0$ 位於 $x^2 + y^2 \leq 1$ 的部分的下側. 則 Σ 與 Σ_1 一起構成一個封閉曲面 (取外側), 記它們圍成的空間閉域為 Ω .

令 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yz, x^2 + y^2)$, 則其散度為

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = z + z + 0 = 2z.$$

利用高斯散度定理, 使得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 2z \, d(x, y, z).$$

利用圓柱坐標系計算三重積分:

$$\iiint_{\Omega} 2z \, d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} 2z \, dz \, dr = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^2 \, dr = \frac{\pi}{3}.$$

而在輔助曲面 Σ_1 上, $z = 0$, 法向量為 $(0, 0, -1)$, 故投影微元 $dx \, dy = -d(x, y)$. 於是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma_1} xz \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)(-d(x, y)) = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2(r) \, dr = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

因此, 所求曲面積分為

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 2z \, d(x, y, z) - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

例 9.5.5 設函數 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在空間閉域 Ω 上具有一階及二階連續偏導數, 證明格林第二公式:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS,$$

其中 Σ 是閉域 Ω 的整個邊界曲面的外側, $\frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial n}$ 分別為函數 v, u 沿 Σ 的外法線方向的方向導數, Δ 為拉普拉斯算子.

解 令向量場 $\mathbf{F} = u\nabla v - v\nabla u$. 先計算該向量場的散度. 根據散度的乘積法則 $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla f \cdot \mathbf{A}$, 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u\nabla v) &= u(\nabla \cdot \nabla v) + \nabla u \cdot \nabla v = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v, \\ \nabla \cdot (v\nabla u) &= v(\nabla \cdot \nabla u) + \nabla v \cdot \nabla u = v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u. \end{aligned}$$

兩式相減, 由於向量內積滿足交換律 ($\nabla u \cdot \nabla v = \nabla v \cdot \nabla u$), 得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) = u \Delta v - v \Delta u.$$

另一方面, $\mathbf{F}$ 在曲面 Σ 外法線方向 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 上的投影為

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = u(\nabla v \cdot \mathbf{n}) - v(\nabla u \cdot \mathbf{n}) = u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

利用高斯散度定理, 將第一類曲面積分與向量場內積作聯繫:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

將上述計算結果代入, 即得所要證明的等式:

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

例 9.5.6 計算曲面積分

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

其中 Σ 為包圍原點 $(0, 0, 0)$ 的任意分片光滑的簡單閉曲面, Σ 的方向為外側.

解 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 則向量場為 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$. 易知當 $r \neq 0$ 時, 偏導數為

$$P'_x = \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot (x/r)}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

同理可得 $Q'_y = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$ 以及 $R'_z = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$. 於是 $\mathbf{F}$ 的散度為

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

但是, 原點 $(0, 0, 0)$ 是向量場 $\mathbf{F}$ 的奇點, 分量函數及其偏導數在該點無定義 (分母為零), 因此不能直接由 Σ 包圍的整個閉域上應用高斯散度定理.

為此, 在 Σ 內部選取一個以原點為中心、半徑為 a 的足夠小的球面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 規定其方向為內側 (即法向量指向原點). 此時外邊界 Σ 與內邊界 Σ_1 共同圍成了一個空間複連通閉域 Ω , 且奇點 (原點) 不包含在 Ω 內.

在 Ω 上函數滿足一階連續偏導數條件, 應用高斯散度定理, 有

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d(x, y, z) = \oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

因為在 Ω 內 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 故三重積分為零, 即得

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

若記 Σ_1^- 為球面 Σ_1 取外側, 則 $\oiint_{\Sigma_1^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, 移項可得

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\Sigma_1^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

由於在球面 Σ_1^- 上, 外法線方向餘弦為 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$, 且滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 故利用兩類曲面積分的聯繫可得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma_1^-} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma_1^-} \left(\frac{x}{a^3} \cdot \frac{x}{a} + \frac{y}{a^3} \cdot \frac{y}{a} + \frac{z}{a^3} \cdot \frac{z}{a} \right) dS = \iint_{\Sigma_1^-} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} dS \\ &= \iint_{\Sigma_1^-} \frac{a^2}{a^4} dS = \frac{1}{a^2} \iint_{\Sigma_1^-} dS.\end{aligned}$$

因為 $\iint_{\Sigma_1^-} dS$ 即為半徑為 a 的球面之表面積 $4\pi a^2$, 所以

$$\iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi.$$

定理 9.5.7 設 G 是空間二維單連通區域, 若向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 G 內具有一階連續偏導數, 則曲面積分

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

在 G 內與所取曲面 Σ 無關而只取決於 Σ 的邊界曲線 (或沿 G 內任一閉曲面的曲面積分爲零) 的充要條件是

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 0$$

在 G 內恆成立.

證明 充分性: 若等式 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 在 G 內恆成立, 任取 G 內一閉曲面 S , 由於 G 是空間二維單連通區域, S 所圍成的閉域 Ω 全屬於 G . 由高斯散度定理可得

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d(x, y, z) = \iiint_{\Omega} 0 d(x, y, z) = 0.$$

這說明沿 G 內任意閉曲面的曲面積分爲零, 因此條件是充分的.

必要性: 假設沿 G 內任一閉曲面的曲面積分均爲零, 若等式 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 在 G 內不恆成立, 就是說在 G 內至少有一點 M_0 , 使得

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})|_{M_0} \neq 0.$$

不妨假定該函數值大於零, 即 $(\nabla \cdot \mathbf{F})|_{M_0} = \eta > 0$. 由於 $\mathbf{F}$ 的散度在 G 內連續, 可以在 G 內取得一個以 M_0 爲球心、半徑足夠小的實心球體閉域 Ω , 使得在 Ω 上恆有

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \geq \frac{\eta}{2}.$$

若記 Ω 的邊界球面爲 Σ_0 (取外側), 於是由高斯散度定理及三重積分的性質就有

$$\iint_{\Sigma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d(x, y, z) \geq \frac{\eta}{2} V,$$

這裡 V 是 Ω 的體積. 因為 $\eta > 0, V > 0$, 從而

$$\iint_{\Sigma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} > 0.$$

這結果與沿 G 內任意閉曲面的曲面積分爲零的假定相矛盾, 可見 G 內使條件不成立的點不可能存在, 即 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 在 G 內處處成立. 條件是必要的. 證畢. $\square$

例 9.5.8 計算曲面積分

$$\iint_{\Sigma} (2x + y^2) dy dz + (z - 2y) dz dx + 3 dx dy,$$

其中 Σ 為上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$), 取上側.

解 令向量場 $\mathbf{F} = (P, Q, R) = (2x + y^2, z - 2y, 3)$, 計算其散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 2 + (-2) + 0 = 0.$$

因為整個空間是二維單連通區域, 且 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 處處成立, 所以曲面積分與所取曲面無關, 只取決於邊界曲線.

Σ 的邊界曲線為 xy 平面上的圓周 $C: x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. 為了計算方便, 選取以 C 為邊界的圓盤面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$. 為了保持與 Σ 有相同的邊界正向, Σ_1 應取上側 (即法向量指向 z 軸正向, 為 $(0, 0, 1)$).

在 Σ_1 上, $z = 0$, 且投影微元 $dy dz = 0, dz dx = 0, dx dy = d(x, y)$. 於是, 將積分曲面由 Σ 替換為 Σ_1 , 可得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma_1} (2x + y^2) dy dz + (z - 2y) dz dx + 3 dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_1} 3 d(x, y) = 3 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} d(x, y) = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

9.6 斯托克斯旋度定理

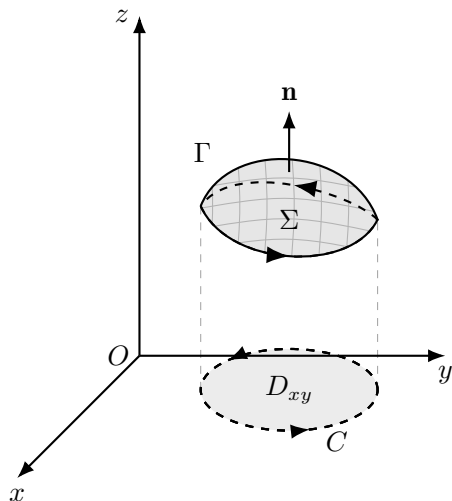
定理 9.6.1 (斯托克斯旋度定理) 設 Γ 為分段光滑的空間有向閉曲線, Σ 是以 Γ 為邊界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向與 Σ 的側符合右手規則 (即當右手除大拇指外的四指依 Γ 的繞行方向時, 拇指所指的方向與 Σ 上法向量的指向相同). 若向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在曲面 Σ (連同邊界 Γ) 上具有一階連續偏導數, 則有

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

或者寫成坐標分量形式:

$$\iint_{\Sigma} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

證明 為方便起見, 先假定曲面 Σ 與平行於 z 軸的直線相交不多於一點, 且設 Σ 為曲面 $z = f(x, y)$ 的上側, 其正向邊界曲線 Γ 在 xy 平面上的投影為平面有向曲線 C , C 所圍成的閉域為 D_{xy} .



設法把曲面積分

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy)$$

化為閉域 D_{xy} 上的二重積分，然後透過格林定理使它與曲線積分相聯繫。根據對面積的和對坐標的曲面積分間的關係，有

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = \iint_{\Sigma} (P'_z \cos \beta - P'_y \cos \gamma) dS.$$

由偏導函數與曲面法向量的方向餘弦公式可知，有向曲面 Σ 的法向量方向餘弦為

$$\cos \alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

因此 $\cos \beta = -f'_y \cos \gamma$ ，將其代入上式得

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = - \iint_{\Sigma} (P'_y + P'_z f'_y) \cos \gamma dS,$$

即

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = - \iint_{D_{xy}} (P'_y + P'_z f'_y) dx dy.$$

上式右端的曲面積分化為二重積分時，應把 $P(x, y, z)$ 中的 z 用 $f(x, y)$ 來代替。因為由複合函數的微分法，有

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) = P'_y + P'_z f'_y.$$

於是，上式可寫成

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

根據格林定理，上式右端的二重積分可化為沿閉域 D_{xy} 的邊界 C 的曲線積分：

$$- \iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f(x, y)) dx dy = \oint_C P(x, y, f(x, y)) dx.$$

所以

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = \oint_C P(x, y, f(x, y)) dx.$$

因為函數 $P(x, y, f(x, y))$ 在曲線 C 上點 (x, y) 處的值與函數 $P(x, y, z)$ 在曲線 Γ 上對應點 (x, y, z) 處的值是一樣的，並且兩曲線上的對應小弧段在 x 軸上的投影也一樣，根據曲線積分的定義，上式右端的曲線積分等於曲線 Γ 上的曲線積分 $\oint_{\Gamma} P dx$ 。因此，我們證得

$$\iint_{\Sigma} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) = \oint_{\Gamma} P dx.$$

如果 Σ 取下側， Γ 也相應地改成相反的方向，那麼上式兩端同時改變符號，故公式仍然成立。若曲面與平行於 z 軸直線的交點多於一個，則可作輔助曲線把曲面分成幾部分，然後應用上述結論並相加，沿輔助曲線方向相反的積分互相抵消，故公式對一般曲面也成立。

同理可證：

$$\iint_{\Sigma} (R'_x - P'_z) dz dx = \oint_{\Gamma} Q dy, \quad \iint_{\Sigma} (Q'_y - R'_x) dx dy = \oint_{\Gamma} R dz.$$

將三式相加，即得斯托克斯旋度公式。

□

例 9.6.2 利用斯托克斯公式計算曲線積分

$$\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz,$$

其中 Γ 為平面 $2x + 2y + z = 2$ 被三個坐標面所截成的三角形的整個邊界, 它的正向與這個平面三角形 Σ 上側的法向量之間符合右手規則.

解 令向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$. 計算其旋度:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = (-1, -1, -1).$$

按斯托克斯公式, 有

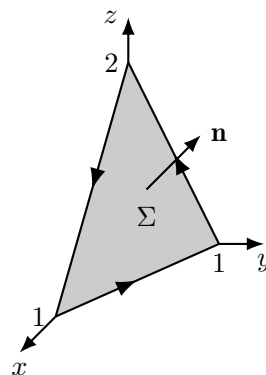
$$\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Sigma} dy \, dz - \iint_{\Sigma} dz \, dx - \iint_{\Sigma} dx \, dy.$$

而

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dy \, dz &= \iint_{D_{yz}} d(y, z) = 1, \\ \iint_{\Sigma} dz \, dx &= \iint_{D_{zx}} d(z, x) = 1, \\ \iint_{\Sigma} dx \, dy &= \iint_{D_{xy}} d(x, y) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

其中 D_{yz}, D_{zx} 與 D_{xy} 分別為 Σ 在 yz, zx 與 xy 面上的投影區域 (皆為直角三角形). 因此

$$\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz = -1 - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

**例 9.6.3** 利用斯托克斯公式計算曲線積分

$$I = \oint_{\Gamma} z^2 \, dx + x^2 \, dy + y^2 \, dz,$$

其中 Γ 為平面 $x + y + z = 2$ 與圓柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交線, 若從 z 軸的正向往下看去, 取逆時針方向.

解 取 Σ 為平面 $x + y + z = 2$ 的上側被 Γ 所圍成的部分. Σ 的單位法向量為 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 即方向餘弦為

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

令向量場 $\mathbf{F} = (z^2, x^2, y^2)$, 計算其旋度:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (2y - 0, 2z - 0, 2x - 0) = (2y, 2z, 2x).$$

按斯托克斯公式, 有

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\Sigma} (2y, 2z, 2x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) \, dS.$$

因為在 Σ 上恆有 $x + y + z = 2$, 故

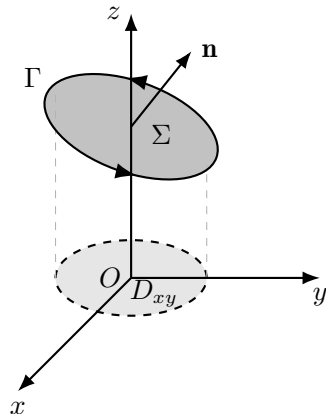
$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (2) dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS.$$

又 Σ 在 xy 平面上的投影區域 D_{xy} 為圓盤 $x^2 + y^2 \leq 1$, 根據對面積的曲面積分與二重積分的關係, 面積微元 $dS = \sqrt{3} d(x, y)$, 所以

$$I = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} d(x, y) = 4 \iint_{D_{xy}} d(x, y).$$

由於 D_{xy} 為半徑 $R = 1$ 的圓, 面積為 π , 故得

$$I = 4\pi.$$



例 9.6.4 利用斯托克斯旋度定理計算曲面積分

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S},$$

其中向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + z, x - z^2, x^2 + y)$, Σ 為旋轉拋物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 介於 xy 平面上方 ($z \geq 0$) 的部分, 且取上側.

解 首先計算向量場 $\mathbf{F}$ 的旋度. 令 $P = 2y + z, Q = x - z^2, R = x^2 + y$, 則

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) \\ &= (1 - (-2z), 1 - 2x, 1 - 2) \\ &= (1 + 2z, 1 - 2x, -1). \end{aligned}$$

如果直接在拋物面 Σ 上進行曲面積分, 由於曲面方程式為 $z = 4 - x^2 - y^2$, 其法向量與微元轉換較為繁瑣.

注意到 Σ 的邊界為 xy 平面 ($z = 0$) 上的圓周 $\Gamma: x^2 + y^2 = 4$. 因為 Σ 取上側, 根據右手規則, 邊界曲線 Γ 的正向為從 z 軸正向往下看逆時針方向.

根據斯托克斯旋度定理, 向量場的旋度在具有相同邊界且定向相容的任意分片光滑曲面上的積分值皆相等. 因此, 可將複雜的曲面 Σ 替換為由邊界 Γ 所圍成的最簡單的平面圓盤區域 Σ_1 , 即

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0.$$

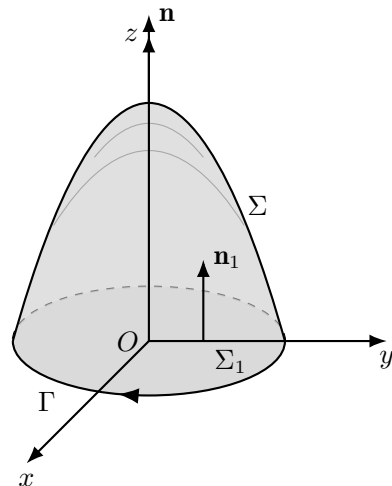
為了保持與邊界 Γ 的定向相容, Σ_1 同樣應取上側, 此時其單位法向量 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

在平底面 Σ_1 上, $z = 0$, 且 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (0, 0, 1) dx dy$. 於是積分轉化為

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{\Sigma_1} (1 + 0, 1 - 2x, -1) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_1} (-1) d(x, y). \end{aligned}$$

這恰好是求圓盤 Σ_1 面積的負值. 因為 Σ_1 是半徑為 2 的圓, 其面積為 4π , 故得

$$I = -4\pi.$$



定理 9.6.5 設空間區域 G 是一維單連通區域, 若向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 G 內具有一階連續偏導數, 則空間曲線積分

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

在 G 內與路徑無關 (或沿 G 內任一閉曲線的曲線積分爲零) 的充要條件是其旋度在 G 內恆爲零向量, 即

$$\nabla \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0, 0, 0)$$

在 G 內恆成立.

證明 充分性: 如果等式 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 在 G 內恆成立, 那麼由斯托克斯公式立即可以看出, 沿閉曲線的曲線積分爲零, 因此條件是充分的.

必要性: 假設沿 G 內任一閉曲線的曲線積分均爲零. 若 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 在 G 內不恆成立, 即在 G 內至少有一點 M_0 , 使得旋度的三個分量不完全爲零. 例如不妨假定

$$(Q'_x - P'_y)|_{M_0} = \eta > 0.$$

過點 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 作平面 $z = z_0$, 並在這個平面上取一個以 M_0 爲圓心、半徑足夠小的圓形閉域 K , 使得在 K 上恆有

$$Q'_x - P'_y \geq \frac{\eta}{2}.$$

設 γ 是 K 的正向邊界曲線. 因爲 γ 在平面 $z = z_0$ 上, $dz = 0$, 所以按曲線積分定義有

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\gamma} P dx + Q dy.$$

又由斯托克斯公式 (或格林定理) 有

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_K (Q'_x - P'_y) dx dy \geq \frac{\eta}{2} \sigma,$$

其中 σ 是 K 的面積. 因爲 $\eta > 0, \sigma > 0$, 從而

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz > 0.$$

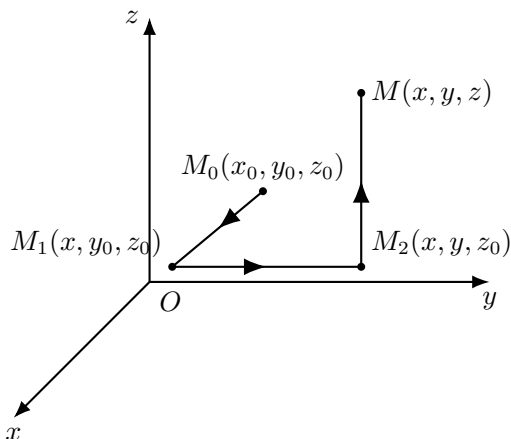
這結果與假設相矛盾, 從而 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 在 G 內恆成立. 證畢. $\square$

定理 9.6.6 設區域 G 是空間一維單連通區域, 若向量場 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 在 G 內具有一階連續偏導數, 則表達式 $P dx + Q dy + R dz$ 在 G 內成爲某一函數 $u(x, y, z)$ 的全微分的充要條件是 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 在 G 內恆成立; 當條件滿足時, 該位場的位函數 (不計一常數之差) 可用下式求出:

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 爲 G 內某一定點, 點 $M(x, y, z) \in G$. 爲計算簡便, 通常選取平行於坐標軸的折線段作爲積分路徑 (如下圖所示, 且確保積分路徑全在 G 內), 此時位函數可表示爲:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt.$$



例 9.6.7 驗證向量場 $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z, x^2, x)$ 是保守場，並計算積分

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2xy + z) dx + x^2 dy + x dz.$$

解 令 $P = 2xy + z, Q = x^2, R = x$. 計算該向量場的旋度分量：

$$R'_y - Q'_z = 0 - 0 = 0,$$

$$P'_z - R'_x = 1 - 1 = 0,$$

$$Q'_x - P'_y = 2x - 2x = 0.$$

因為 $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$ 在整個空間 $\mathbb{R}^3$ (這是一維單連通區域) 內恆成立，所以 $\mathbf{F}$ 是一個位場，該積分與路徑無關。

為了計算該積分，可求出其位函數 $u(x, y, z)$. 選擇起點為原點 $M_0(0, 0, 0)$ ，沿著平行於坐標軸的折線段進行積分：

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x (2t \cdot 0 + 0) dt + \int_0^y (x^2) dt + \int_0^z (x) dt \\ &= x^2 y + xz. \end{aligned}$$

於是，根據曲線積分的基本定理，從 $(0, 0, 0)$ 到 $(1, 1, 1)$ 的積分值為位函數在兩端點的差：

$$I = u(1, 1, 1) - u(0, 0, 0) = (1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - 0 = 2.$$

9.7 曲線積分與曲面積分的應用

例 9.7.1 (曲線積分的應用——變力作功) 設一個質點在點 $M(x, y)$ 處受到力 $\mathbf{F}$ 的作用， $\mathbf{F}$ 的大小與點 M 到原點 O 的距離成正比，且 $\mathbf{F}$ 的方向始終與位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 垂直並指向逆時針方向。此質點由原點 $O(0, 0)$ 沿拋物線 $y = x^2$ 移動到點 $A(1, 1)$ ，求力 $\mathbf{F}$ 所作的功 W 。

解 點 M 的位置向量為 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ ，其到原點的距離為 $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。由假設可知， $\mathbf{F}$ 的方向與位置向量 (x, y) 垂直且指向逆時針方向 (即旋轉 90°)，故可設 $\mathbf{F} = k(-y, x)$ ，其中 $k > 0$ 是比例常數。此時力的大小 $|\mathbf{F}| = k\sqrt{x^2 + y^2}$ ，恰與距離成正比。於是力 $\mathbf{F}$ 所作的功為

$$W = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} -ky dx + kx dy = k \int_{OA} -y dx + x dy.$$

利用拋物線的方程式 $y = x^2$, 可將曲線積分化為對單一變數 x 的定積分. 沿該路徑有 $dy = 2x dx$, 且起點 O 與終點 A 分別對應積分下限 $x = 0$ 與上限 $x = 1$. 於是

$$W = k \int_0^1 (-(x^2) + x(2x)) dx = \frac{k}{3} \quad (\text{焦耳}).$$

例 9.7.2 (曲面積分的應用——流體的流量) 設有穩定流動⁸的不可壓縮流體, 其速度場為 $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, 2z)$. 求單位時間內流過曲面 Σ 的流體流量 Φ , 其中 Σ 為旋轉拋物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 介於 xy 平面上方 ($z \geq 0$) 的部分, 且指定流體流向為曲面的上側.

解 (解一) 根據流體流量的幾何意義, 單位時間內流過曲面 Σ 的流量 Φ 可由第二類曲面積分計算:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + 2z dx dy.$$

將 Σ 投影到 xy 平面, 其投影區域 D_{xy} 為圓盤 $x^2 + y^2 \leq 1$. 設曲面方程式為 $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, 因為 Σ 取上側 (法向量與 z 軸正向夾銳角), 故其有向面積微元可表示為

$$d\mathbf{S} = (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy = (2x, 2y, 1) dx dy.$$

將速度場 $\mathbf{v}$ 限制在曲面 Σ 上, 即將 z 代換為 $1 - x^2 - y^2$, 可得

$$\mathbf{v} = (x, y, 2(1 - x^2 - y^2)).$$

於是, 被積函數為

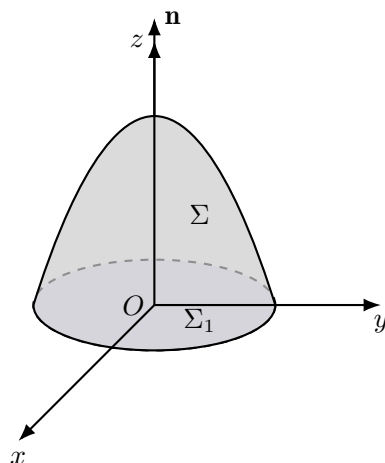
$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= (2x^2 + 2y^2 + 2 - 2x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= 2 dx dy. \end{aligned}$$

將曲面積分轉化為在 D_{xy} 上的二重積分:

$$\Phi = \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} dx dy.$$

因為 D_{xy} 是半徑為 1 的圓盤, 其面積為 π , 故流量為

$$\Phi = 2(\pi) = 2\pi \quad (\text{立方公尺/秒}).$$



解 (解二) 利用高斯散度定理. 由於 Σ 不是封閉曲面, 我們添加輔助曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 且取下側 (外法向量 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)$). 此時 Σ 與 Σ_1 構成一個封閉曲面 (皆取外側), 包圍的空間閉域記為 Ω .

計算速度場 $\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ 的散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = P'_x + Q'_y + R'_z = 1 + 1 + 2 = 4.$$

根據高斯散度定理, 有

$$\oiint_{\Sigma + \Sigma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) d(x, y, z) = \iiint_{\Omega} 4 d(x, y, z).$$

利用柱面坐標計算該三重積分:

$$\iiint_{\Omega} 4 d(x, y, z) = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} dz dr d\theta = 4(2\pi) \int_0^1 r(1-r^2) dr = 2\pi.$$

⁸即流速與時間無關.

接著計算輔助曲面 Σ_1 上的曲面積分. 在 Σ_1 上, $z = 0$, 且有面積微元為 $d\mathbf{S} = (0, 0, -1) dx dy$. 此時速度場 $\mathbf{v} = (x, y, 0)$, 故

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0.$$

因此, 在輔助曲面上的積分為

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

綜合以上結果, 所求流量為

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} 4 d(x, y, z) - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi - 0 = 2\pi \quad (\text{立方公尺/秒}).$$

例 9.7.3 求向量場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z(x^2 + y^2))$ 穿過曲面 Σ 流向上側的通量, 即曲面積分

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

其中 Σ 為旋轉拋物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 介於 xy 平面上方 ($z \geq 0$) 的部分.

解 令 $\mathbf{A} = (P, Q, R) = (xy^2, x^2y, z(x^2 + y^2))$, 計算該向量場的散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = P'_x + Q'_y + R'_z = y^2 + x^2 + (x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2).$$

因為 Σ 不是封閉曲面, 為了利用高斯散度定理, 引入輔助平面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 且取下側, 使得 Σ 與 Σ_1 共同構成一個取外側的封閉曲面, 記其包圍的空間閉域為 Ω .

根據高斯散度定理, 有

$$\oiint_{\Sigma + \Sigma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d(x, y, z) = \iiint_{\Omega} 2(x^2 + y^2) d(x, y, z).$$

利用柱面坐標系計算該三重積分:

$$\iiint_{\Omega} 2(x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \int_0^{1-r^2} 2r^2 dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r(2r^2)(1-r^2) dr = \frac{\pi}{3}.$$

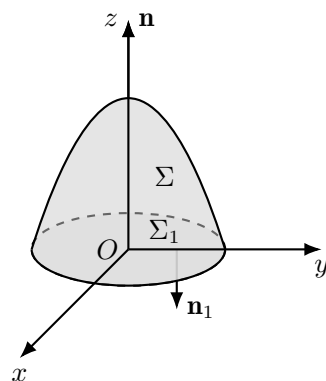
接下來計算輔助曲面 Σ_1 上的通量. 在 Σ_1 上, $z = 0$, 向量場退化為 $\mathbf{A} = (xy^2, x^2y, 0)$. 又 Σ_1 取下側, 其單位外法向量為 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)$, 故有面積微元為 $d\mathbf{S} = (0, 0, -1) dx dy$. 於是

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (xy^2, x^2y, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0.$$

這意味著 $\iint_{\Sigma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

綜合以上結果, 所求向量場穿過 Σ 的通量為

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d(x, y, z) - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$$



例 9.7.4 求向量場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2 - y, 4z, x^2)$ 沿閉曲線 Γ 的環流量, 即曲線積分

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} (x^2 - y) dx + 4z dy + x^2 dz,$$

其中 Γ 為錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 2$ 的交線, 從 z 軸正向看 Γ 為逆時針方向.

解 令 $\mathbf{A} = (P, Q, R) = (x^2 - y, 4z, x^2)$, 計算該向量場的旋度:

$$\nabla \times \mathbf{A} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (0 - 4, 0 - 2x, 0 - (-1)) = (-4, -2x, 1).$$

根據斯托克斯旋度定理, 環流量可以轉化為以 Γ 為邊界的曲面 Σ 上的曲面積分. 為了計算簡便, 不需要在複雜的錐面上積分, 而是選取由 Γ 所圍成的平面圓盤區域作為積分曲面 Σ , 即

$$\Sigma: x^2 + y^2 \leq 4, z = 2.$$

因為從 z 軸正向看 Γ 為逆時針方向, 根據右手規則, Σ 的法向量應指向上方, 即單位法向量為 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. 在平面 Σ 上, 有向面積微元為 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (0, 0, 1) dx dy$. 於是, 旋度場在 Σ 上的法向分量為

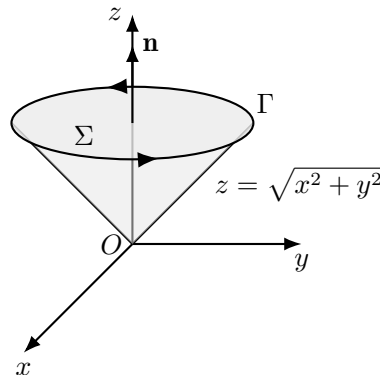
$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = (-4, -2x, 1) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 1 dx dy.$$

因此, 所求的環流量為

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 1 dx dy.$$

該二重積分的值即為半徑為 2 的圓盤面積, 故

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi(2^2) = 4\pi.$$



例 9.7.5 在靜電學中, 靜電場 $\mathbf{E}$ 是一個保守場 (即位場), 其與電位 $\varphi(x, y, z)$ 的關係為 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. 設空間中存在一靜電場

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (y^2 + 2xz, 2xy + z^2, x^2 + 2yz).$$

- (1) 驗證 $\mathbf{E}$ 為保守場, 並求出其空間中的電位分布 $\varphi(x, y, z)$ (假設原點的電位為零).
- (2) 若將一帶電量為 q 的點電荷從原點 $O(0, 0, 0)$ 沿任意路徑移動至點 $A(1, 1, 1)$, 求靜電場對該點電荷所作的功 W .

解 (1) 令 $\mathbf{E} = (P, Q, R) = (y^2 + 2xz, 2xy + z^2, x^2 + 2yz)$, 先計算該向量場的旋度分量:

$$R'_y - Q'_z = 2z - 2z = 0,$$

$$P'_z - R'_x = 2x - 2x = 0,$$

$$Q'_x - P'_y = 2y - 2y = 0.$$

因為旋度 $\nabla \times \mathbf{E} = (0, 0, 0)$ 在全空間 ($\mathbb{R}^3$, 為一維單連通區域) 內恆成立, 所以 $\mathbf{E}$ 是保守場, 沿場中任意路徑的曲線積分與路徑無關.

根據電位與電場的定義關係 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, 有

$$\varphi'_x = -P = -(y^2 + 2xz).$$

將上式對 x 積分 (將 y, z 視為常數), 得

$$\varphi(x, y, z) = \int -(y^2 + 2xz) dx = -xy^2 - x^2z + f(y, z),$$

其中 $f(y, z)$ 為以 y, z 為自變數的待定函數. 對其求 y 的偏導數並與 $-Q$ 比較:

$$\varphi'_y = -2xy + f'_y(y, z) = -(2xy + z^2),$$

由此可得 $f'_y(y, z) = -z^2$. 將此式對 y 積分, 得

$$f(y, z) = -yz^2 + g(z),$$

即此時電位函數為 $\varphi(x, y, z) = -xy^2 - x^2z - yz^2 + g(z)$. 接著再對 z 求偏導數並與 $-R$ 比較:

$$\varphi'_z = -x^2 - 2yz + g'(z) = -(x^2 + 2yz),$$

由此得 $g'(z) = 0$, 積分得 $g(z) = C$ (常數). 故一般電位函數為

$$\varphi(x, y, z) = -xy^2 - x^2z - yz^2 + C.$$

由於題目給定原點的電位 $\varphi(0, 0, 0) = 0$, 代入可得 $C = 0$, 故最終的電位分布為

$$\varphi(x, y, z) = -xy^2 - x^2z - yz^2.$$

(2) 點電荷從 O 移動到 A 時, 靜電場對其所作的功 W 定義為沿路徑的曲線積分:

$$W = \int_O^A q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

由於 $\mathbf{E}$ 是位場, 積分與路徑無關, 且 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. 根據曲線積分的基本定理, 可直接利用位函數 (電位) 在兩端點的差值來計算:

$$W = q \int_O^A (-\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = -q(\varphi(A) - \varphi(O)) = q(\varphi(O) - \varphi(A)).$$

代入點 $O(0, 0, 0)$ 與 $A(1, 1, 1)$ 的電位值:

$$\varphi(O) = 0,$$

$$\varphi(A) = -(1)(1)^2 - (1)^2(1) - (1)(1)^2 = -3.$$

因此, 靜電場所作的功為

$$W = q(0 - (-3)) = 3q.$$

(註: 這在物理上意味著靜電力作正功, 導致點電荷的電位能減少了 $3q$.)

單元 10

簡易常微分方程式

10.1 微分方程的基本概念

定義 10.1.1 凡表示未知函數、未知函數的導數與自變量之間的關係的方程, 叫做**微分方程** (有時也簡稱方程). 微分方程中所出現的未知函數的最高階導數的階數, 叫做微分方程的**階**.

註記 10.1.2 一般地, n 階微分方程的形式可以寫為隱函數形式

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

其中 $y^{(n)}$ 是必須出現的, 而 $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ 等變數則可以不出現. 如果能從方程中解出最高階導數, 則可得到顯式形式 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

例 10.1.3 以下是一些不同階數的微分方程例子:

(1) $y' = f(x, y)$ 是一階微分方程.

(2) $y'' = f(x, y, y')$ 是二階微分方程.

(3) 方程 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$ 中最高階導數為 y''' , 因此是三階微分方程.

(4) 方程 $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$ 中最高階導數為 $y^{(4)}$, 因此是四階微分方程.

定義 10.1.4 找出一個函數, 把該函數代入微分方程能使該方程成為恆等式, 這個函數就叫做該微分方程的**解**.

- 如果微分方程的解中含有任意常數, 且任意常數的個數與微分方程的階數相同, 這樣的解叫做微分方程的**通解**.
- 確定了通解中的任意常數以後, 就得到微分方程的**特解**.

註記 10.1.5 通解中所含的任意常數必須是相互獨立的, 也就是說, 它們不能合併而使得任意常數的個數減少. 由於通解含有任意常數, 它還不能完全確定地反映某一客觀事物的規律性, 必須根據問題的實際情況提出條件來確定這些常數的值.

定義 10.1.6 用來確定通解中任意常數的條件, 叫做**初值條件**. 求微分方程滿足初值條件的特解這樣一個問題, 叫做**微分方程的初值問題**. 另外, 微分方程的解的圖形是一條曲線, 叫做微分方程的**積分曲線**.

註記 10.1.7 對於一階微分方程的初值問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0, \end{cases}$$

其幾何意義就是求微分方程的通過點 (x_0, y_0) 的那條積分曲線。

對於二階微分方程的初值問題，初值條件通常寫成 $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0$ ，其幾何意義是求通過點 (x_0, y_0) 且在該點處的切線斜率為 y'_0 的那條積分曲線。

例 10.1.8 考慮以下關於未知函數 $x(t)$ 的問題：

(1) 驗證函數

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

的解。

(2) 已知上述函數為該微分方程的通解，求滿足初值條件

$$x|_{t=0} = 5, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 12$$

的特解。

解 (1) 求出所給函數的各階導數：

$$\frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 4C_1 e^{2t} + 9C_2 e^{3t}.$$

把 $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$ 及 x 的表達式代入微分方程的左端，得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x &= (4C_1 e^{2t} + 9C_2 e^{3t}) - 5(2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}) + 6(C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}) \\ &= (4 - 10 + 6)C_1 e^{2t} + (9 - 15 + 6)C_2 e^{3t} = 0. \end{aligned}$$

代入方程後成爲一個恆等式，因此函數 $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$ 是微分方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0$ 的解。

(2) 將條件「 $t = 0$ 時， $x = 5$ 」代入通解表達式，得

$$C_1 + C_2 = 5.$$

將條件「 $t = 0$ 時， $\frac{dx}{dt} = 12$ 」代入一階導數表達式，得

$$2C_1 + 3C_2 = 12.$$

聯立這兩個關於 C_1, C_2 的方程式：

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ 2C_1 + 3C_2 = 12, \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 2.$$

把 C_1, C_2 的值代入通解表達式，就得所求的特解：

$$x = 3e^{2t} + 2e^{3t}.$$

10.2 一階微分方程式

可分離變數的微分方程式

定義 10.2.1 一般地, 如果一個一階微分方程能寫成

$$g(y)dy = f(x)dx$$

的形式, 也就是說, 能把微分方程寫成一端只含 y 的函數和 dy , 另一端只含 x 的函數和 dx , 那麼原方程就稱為可分離變數的微分方程.

註記 10.2.2 假定方程中的函數 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是連續的. 設 $y = \varphi(x)$ 是該微分方程的解, 將它代入方程得到恆等式

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(x)dx.$$

將上式兩端積分, 並由 $y = \varphi(x)$ 引進變數 y , 得

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

設 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次為 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的反導函數 (原函數), 於是有

$$G(y) = F(x) + C.$$

反之, 如果 $y = \Phi(x)$ 是由上式所確定的隱函數, 那麼在 $g(y) \neq 0$ 的條件下, 由隱函數的求導法則可知

$$\Phi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(\Phi(x))} = \frac{f(x)}{g(\Phi(x))}.$$

這就表示函數 $y = \Phi(x)$ 同樣滿足原方程.

所以, 對於已分離變數的方程, 兩端積分後得到的關係式就用隱式給出了方程的解. 由於關係式中含有任意常數, 因此它所確定的隱函數即為原方程的**隱式通解**. (當 $f(x) \neq 0$ 時, 所確定的隱函數 $x = \Psi(y)$ 也可認為是方程的解.)

例 10.2.3 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y$$

的通解.

解 方程是可分離變數的. 當 $y \neq 0$ 時, 將方程分離變數可得

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx,$$

兩端積分

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx,$$

得

$$\ln |y| = x^3 + C_1,$$

從而

$$y = \pm e^{x^3+C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}.$$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 因 e^{C_1} 是任意正數, 故 C 是任意非零常數, 得到

$$y = Ce^{x^3}.$$

另一方面, 必須檢查 $y = 0$ 的情形. 當 $y = 0$ 時, $\frac{dy}{dx} = 0$, 將其代入原方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$, 左右兩端皆為 0, 故 $y = 0$ 也是原微分方程的解.

若允許上述表達式中的常數 $C = 0$, 則 $y = Ce^{x^3}$ 恰好也包含了 $y = 0$ 這個解. 故得方程的通解為

$$y = Ce^{x^3}.$$

例 10.2.4 在某化學反應中, 反應物轉化為生成物的轉化速率與該反應物當時未轉化的濃度 C 成正比. 已知 $t = 0$ 時反應物的濃度為 C_0 , 求反應過程中濃度 $C(t)$ 隨時間 t 變化的規律.

解 反應物的轉化速率即為濃度 $C(t)$ 對時間 t 的導數 $\frac{dC}{dt}$. 由於轉化速率與其濃度成正比, 且濃度隨時間不斷減少, 故得微分方程

$$\frac{dC}{dt} = -kC,$$

其中 k ($k > 0$) 是比例常數. 按題意, 初值條件為

$$C|_{t=0} = C_0.$$

方程是可分離變數的. 在實際化學反應中, 未反應完全前濃度 $C > 0$, 故自然滿足 $C \neq 0$ 的條件. 分離變數後得

$$\frac{dC}{C} = -kdt,$$

兩端積分

$$\int \frac{dC}{C} = \int -k dt,$$

考慮到 $C > 0$, 得

$$\ln C = -kt + C_1.$$

以 $\ln A$ 表示任意常數 C_1 ($A > 0$), 得

$$\ln C = -kt + \ln A,$$

即

$$C = Ae^{-kt}.$$

這就是方程的通解 (若單從純數學方程考量, $C = 0$ 亦為解, 相當於允許常數 $A = 0$, 但此處無物理意義). 將初值條件代入上式, 得

$$C_0 = Ae^0 = A,$$

所以

$$C = C_0 e^{-kt}.$$

這就是所求的濃度變化規律. 由此可見, 反應物的濃度隨時間的增加而按指數規律衰減.

例 10.2.5 設一質量為 m 的動力小船在湖面以初速度 v_0 直線滑行. 關閉發動機後, 船所受的水流阻力與其速度 v 成正比, 設比例常數為 k ($k > 0$). 求船的速度 v 與時間 t 的函數關係.

解 設船的速度為 $v(t)$. 關閉發動機後, 船在水平方向僅受阻力 $F = -kv$ 的作用. 根據牛頓第二運動定律 $F = ma$ (其中 a 為加速度), 得函數 $v(t)$ 應滿足的方程為

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

按題意, 初值條件為

$$v|_{t=0} = v_0.$$

方程是可分離變數的. 當 $v \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt.$$

兩端積分

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m} dt.$$

考慮到船一直朝同方向滑行 (速度沒有反向), 即 $v > 0$, 積分得

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1,$$

或寫成

$$v = C_2 e^{-\frac{k}{m}t},$$

其中 $C_2 = e^{C_1} > 0$. (另外需注意, 當 $v = 0$ 時, $\frac{dv}{dt} = 0$, 顯然 $v = 0$ 亦為原方程的解, 物理意義上代表船靜止不動. 若將常數範圍擴展至 $C_2 \geq 0$, 則通解亦包含了此平凡解).

將初值條件 $v|_{t=0} = v_0$ 代入通解表達式, 得

$$v_0 = C_2 e^0 = C_2.$$

於是所求的特解為

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

齊次微分方程式

定義 10.2.6 如果一階微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式, 那麼就稱這方程為**齊次方程**.

例如, 方程 $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$ 是齊次方程, 因為它可化成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

註記 10.2.7 在齊次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中, 引進新的未知函數

$$u = \frac{y}{x},$$

就可以把它化為可分離變數的方程.

具體推導如下: 因為由 $y = ux$, 對 x 求導得

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

代入方程, 使得

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

分離變數, 得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

兩端積分, 得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

求出積分後, 再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 使得所給齊次方程的通解.

例 10.2.8 求解微分方程

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = y^2.$$

解 原方程可寫成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x},$$

因此是齊次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 則 $y = ux$, 且對 x 求導得

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

代入原方程得

$$u + x \frac{du}{dx} = u^2 - u,$$

即

$$x \frac{du}{dx} = u^2 - 2u = u(u - 2).$$

在分離變數之前, 必須嚴謹討論兩端同除以 $u(u - 2)$ 的情形. 若 $u(u - 2) = 0$, 則 $u = 0$ 或 $u = 2$, 它們分別對應到函數 $y = 0$ 與 $y = 2x$. 將這兩個函數代入原微分方程檢驗, 發現皆使左右兩端相等 ($0 = 0$ 以及 $4x^2 = 4x^2$), 因此 $y = 0$ 與 $y = 2x$ 確實都是原方程的解.

當 $u(u - 2) \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{du}{u(u - 2)} = \frac{dx}{x}.$$

兩端積分, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u} \right) du &= \int \frac{dx}{x} \implies \frac{1}{2} (\ln |u-2| - \ln |u|) = \ln |x| + C_1 \\ &\implies \ln \left| \frac{u-2}{u} \right| = 2 \ln |x| + 2C_1 = \ln x^2 + 2C_1. \end{aligned}$$

取指數得

$$\frac{u-2}{u} = \pm e^{2C_1} x^2 = Cx^2,$$

其中 $C = \pm e^{2C_1}$ 為任意非零常數. 將 $u = \frac{y}{x}$ 代回並整理:

$$1 - \frac{2x}{y} = Cx^2 \implies \frac{2x}{y} = 1 - Cx^2 \implies y = \frac{2x}{1 - Cx^2}.$$

最後, 回頭檢查先前的解 $y = 0$ 與 $y = 2x$. 若允許常數 $C = 0$, 則通解公式給出 $y = 2x$, 因此 $y = 2x$ 已包含在該通解中. 然而, 無論 C 取何實數, 都無法從該通解公式中得出 $y = 0$, 故 $y = 0$ 是該方程的一個**奇解**¹.

¹所謂**奇解**, 是指滿足該微分方程, 但無法從通解中透過調整任意常數得到的特殊解.

綜上所述, 該微分方程的解為通解 $y = 2x/(1 - Cx^2)$ 以及奇解 $y = 0$.

例 10.2.9 求解微分方程

$$y \frac{dx}{dy} = x + y \sin \left(\frac{x}{y} \right).$$

解 將方程兩端同除以 y , 可化為

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sin \left(\frac{x}{y} \right).$$

這是一個將 x 視為 y 的函數的齊次方程. 令 $v = \frac{x}{y}$, 則 $x = vy$, 且對 y 求導得

$$\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}.$$

代入方程得

$$v + y \frac{dv}{dy} = v + \sin v,$$

即

$$y \frac{dv}{dy} = \sin v.$$

在分離變數時, 需要除以 $\sin v$, 故必須討論 $\sin v = 0$ 的情形. 若 $\sin v = 0$, 則 $v = k\pi$ (k 為整數), 對應到直線族 $x = k\pi y$. 將其代回原方程檢驗, 左端為 $y(k\pi)$, 右端為 $k\pi y + y \sin(k\pi) = k\pi y$, 兩端相等, 因此 $x = k\pi y$ 皆為方程的解.

當 $\sin v \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{dy}{y}, \quad \text{或寫作} \quad \csc v \, dv = \frac{dy}{y}.$$

兩端積分, 得

$$\int \csc v \, dv = \int \frac{dy}{y} \implies \ln \left| \tan \frac{v}{2} \right| = \ln |y| + C_1.$$

取指數得

$$\tan \frac{v}{2} = \pm e^{C_1} y = Cy,$$

其中 C 為任意非零常數. 將 $v = \frac{x}{y}$ 代回, 得到方程的隱式通解:

$$\tan \left(\frac{x}{2y} \right) = Cy.$$

最後, 來檢查先前的解 $x = k\pi y$ 是否包含在通解中. 這些解對應於 $v = k\pi$. 若 k 為偶數 (即 $v = 2m\pi, x = 2m\pi y$), 此時 $\tan \frac{v}{2} = \tan(m\pi) = 0$. 若允許通解中的常數 $C = 0$, 則通解能涵蓋這部分解. 若 k 為奇數 (即 $v = (2m+1)\pi, x = (2m+1)\pi y$), 此時 $\tan \frac{v}{2} = \tan \left(m\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ 無意義, 它無法由通解得出, 故 $x = (2m+1)\pi y$ 為方程的奇解.

綜上所述, 方程的解為通解 $\tan(x/2y) = Cy$ (包含 $C = 0$ 時的解), 以及奇解 $x = (2m+1)\pi y$ (其中 m 為整數).

*** 形如 $y' = f(ax + by)$ 的微分方程式**

註記 10.2.10 對於形如

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

的微分方程, 其中 a, b 為常數且 $b \neq 0$, 可以透過引入新的未知函數來將其化為可分離變數的方程.

具體作法為: 令 $v = ax + by$, 將兩端對 x 求導, 得

$$\frac{dv}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}.$$

將原方程 $\frac{dy}{dx} = f(v)$ 代入上式, 便得到

$$\frac{dv}{dx} = a + bf(v).$$

這是一個關於 v 和 x 的可分離變數方程. 分離變數後求解, 再將 $v = ax + by$ 代回, 即可得到原方程的通解.

例 10.2.11 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2.$$

解 令 $v = x + y$, 兩端對 x 求導得

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

將原方程 $\frac{dy}{dx} = v^2$ 代入, 得

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v^2.$$

分離變數 (因 $1 + v^2 > 0$, 故無須擔心除以零的問題), 得

$$\frac{dv}{1 + v^2} = dx.$$

兩端積分

$$\int \frac{1}{1 + v^2} dv = \int dx,$$

得

$$\tan^{-1} v = x + C.$$

將 $v = x + y$ 代回, 即得原方程的通解為

$$\tan^{-1}(x + y) = x + C, \quad \text{或寫作} \quad x + y = \tan(x + C).$$

*** 形如 $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ 的微分方程式**

註記 10.2.12 對於形如

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

的微分方程, 可以根據係數行列式 $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ 的值分為兩種情況處理:

情況一: 當 $\Delta \neq 0$ (即 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$) 時, 兩直線相交. 令 $x = X + h, y = Y + k$, 其中 h, k 為待定常數. 代入方程得

$$(a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1)dX + (a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2)dY = 0.$$

爲了消去常數項, 選取 h, k 使得它們滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0. \end{cases}$$

解出 h, k 後, 原方程便化爲齊次方程

$$(a_1 X + b_1 Y) dX + (a_2 X + b_2 Y) dY = 0.$$

利用常規的 $Y = uX$ 代換求出此齊次方程的解後, 再將 $X = x - h, Y = y - k$ 代回即可.

情況二: 當 $\Delta = 0$ (即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$) 時, 兩直線平行. 此時 $a_2 x + b_2 y = \lambda(a_1 x + b_1 y)$, 原方程可寫爲

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}.$$

這就回到了上一段筆記中形如 $\frac{dy}{dx} = f(a_1 x + b_1 y)$ 的類型, 直接令 $v = a_1 x + b_1 y$ 即可將其化爲可分離變數的方程.

例 10.2.13 求解方程

$$(x - y - 1)dx + (x + 4y - 1)dy = 0.$$

解 所給方程中, 係數比 $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{4}$, 屬於情況一. 令 $x = X + h, y = Y + k$, 代入解聯立方程組:

$$\begin{cases} h - k - 1 = 0, \\ h + 4k - 1 = 0, \end{cases}$$

解得 $h = 1, k = 0$. 於是作代換 $x = X + 1, y = Y$, 原方程化爲齊次方程

$$(X - Y)dX + (X + 4Y)dY = 0, \quad \text{即} \quad \frac{dY}{dX} = \frac{Y - X}{X + 4Y}.$$

令 $Y = uX$, 則 $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$, 代入上式得

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{uX - X}{X + 4uX} = \frac{u - 1}{1 + 4u} \implies X \frac{du}{dX} = \frac{u - 1}{1 + 4u} - u = \frac{u - 1 - u - 4u^2}{1 + 4u} = -\frac{1 + 4u^2}{1 + 4u}.$$

分離變數 (因 $1 + 4u^2 > 0$, 無除以零的問題) 得

$$\frac{1 + 4u}{1 + 4u^2} du = -\frac{dX}{X}.$$

兩端積分, 得

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{1 + 4u^2} + \frac{4u}{1 + 4u^2} \right) du &= -\int \frac{1}{X} dX \implies \frac{1}{2} \tan^{-1} 2u + \frac{1}{2} \ln(1 + 4u^2) = -\ln|X| + \frac{1}{2}C, \\ &\implies \tan^{-1} 2u + \ln((1 + 4u^2)X^2) = C. \end{aligned}$$

將 $u = \frac{Y}{X}$ 代回:

$$\tan^{-1} \frac{2Y}{X} + \ln(X^2 + 4Y^2) = C.$$

最後將 $X = x - 1, Y = y$ 代入, 即得原方程的隱式通解:

$$\tan^{-1} \frac{2y}{x-1} + \ln((x-1)^2 + 4y^2) = C.$$

例 10.2.14 求解方程

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

解 所給方程中, 係數比 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 屬於情況二. 方程可改寫為

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 1}{2(x + y) - 1}.$$

引入新變數 $v = x + y$, 則 $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$. 代入上式得

$$\frac{dv}{dx} = 1 - \frac{v + 1}{2v - 1} = \frac{2v - 1 - v - 1}{2v - 1} = \frac{v - 2}{2v - 1}.$$

在分離變數時, 需討論 $v - 2 = 0$ 的情形. 若 $v - 2 = 0$, 則 $v = 2$, 對應的函數為 $x + y = 2 \implies y = 2 - x$, $dy = -dx$. 將其代入原方程檢驗:

$$(2 + 1)dx + (2(2) - 1)(-dx) = 3dx - 3dx = 0,$$

因此直線 $x + y = 2$ 是原方程的一個解.

當 $v - 2 \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{2v - 1}{v - 2} dv = dx, \quad \text{即} \quad \left(2 + \frac{3}{v - 2}\right) dv = dx.$$

兩端積分

$$\int \left(2 + \frac{3}{v - 2}\right) dv = \int dx \implies 2v + 3 \ln |v - 2| = x + C_1.$$

將 $v = x + y$ 代回:

$$2(x + y) + 3 \ln |x + y - 2| = x + C_1,$$

整理得

$$x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| = C_1.$$

若將上式取指數改寫為 $|x + y - 2|^3 = Ce^{-(x+2y)}$ (其中 $C = e^{C_1} > 0$), 並允許常數 C 可為 0, 則 $C = 0$ 恰好對應到剛剛討論出的解 $x + y = 2$. 故方程的通解可表為:

$$|x + y - 2|^3 = Ce^{-(x+2y)}.$$

一階線性微分方程式

定義 10.2.15 方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

叫做**一階線性微分方程**, 因為它對於未知函數 y 及其導數是一次方程. 如果 $Q(x) = 0$, 那麼方程稱為**齊次的**; 如果 $Q(x) \neq 0$, 那麼方程稱為**非齊次的**.

註記 10.2.16 為求出非齊次線性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, 通常有以下兩種方法:

(1) 常數變易法: 首先, 把 $Q(x)$ 換成零, 寫出對應的齊次線性方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

分離變數得 $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$, 兩端積分可得對應齊次方程的通解為

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}.$$

現在使用參數變異法, 把通解中的常數 C 換成 x 的未知函數 $u(x)$, 即作變換

$$y = u(x)e^{-\int P(x) dx}.$$

對其求導得

$$\frac{dy}{dx} = u'(x)e^{-\int P(x) dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x) dx}.$$

將 y 與 $\frac{dy}{dx}$ 代入原非齊次方程, 化簡後可得

$$u'(x)e^{-\int P(x) dx} = Q(x), \quad \text{即} \quad u'(x) = Q(x)e^{\int P(x) dx}.$$

兩端積分, 得

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

將 $u(x)$ 代回變換式, 便得非齊次線性方程的通解公式:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

(2) 積分因子法: 對於標準形式的線性方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

在方程兩端同乘上一個被稱為「**積分因子**」的函數 $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$. 由於 $\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x)$, 乘上積分因子後, 方程左端恰好可以湊成兩個函數乘積的導數:

$$e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x) dx} y = Q(x)e^{\int P(x) dx},$$

即

$$\frac{d}{dx} \left(ye^{\int P(x) dx} \right) = Q(x)e^{\int P(x) dx}.$$

對兩端同時積分, 得

$$ye^{\int P(x) dx} = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

將積分因子 $e^{\int P(x) dx}$ 除過去, 同樣可得到一階線性微分方程的通解公式:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

註: 將通解公式展開後可寫為 $y = Ce^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx$, 第一項是對應的齊次方程的通解, 第二項是非齊次方程的一個特解. 由此可知, 一階非齊次線性方程的通解等於對應的齊次方程的通解與非齊次方程的一個特解之和.

註記 10.2.17 為什麼可以把齊次方程通解 $y = Ce^{-\int P(x) dx}$ 中的常數 C 直接換成未知函數 $u(x)$, 就能用來求解非齊次方程呢? 這表面上看起來好像欠缺對其他形式的解的考慮, 但其背後有著嚴謹的變數代換邏輯.

對於非齊次線性方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

可以嘗試作一個乘積形式的變數代換. 假設將未知函數 $y(x)$ 拆解為兩個函數的乘積:

$$y(x) = u(x)v(x),$$

其中 $u(x)$ 是新的未知函數, 而 $v(x)$ 是一個準備要「刻意設計」的已知函數.

利用乘法微分公式, 對 x 求導得

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

將 y 與 $\frac{dy}{dx}$ 代入原非齊次方程中, 得到

$$\left(v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) + P(x)(uv) = Q(x).$$

將含有 u 的項合併並提取出來:

$$v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + P(x)v \right) = Q(x).$$

此時, 不難發現括號內的結構非常眼熟. 因為 $v(x)$ 是可以自由定義的函數, 為了讓這個方程變得最容易求解, 理所當然地會希望中括號裡面的值為零, 藉此把 u 給消去. 也就是說, 要求 $v(x)$ 必須滿足:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

這恰好就是對應的齊次線性微分方程! 只需取它的一個最簡單的非零特解 (即取常數為 1) 即可, 於是解得

$$v(x) = e^{-\int P(x) dx}.$$

當作了這個絕妙的選擇後, 原方程中括號的部分被消滅了, 整個微分方程大幅簡化為只剩下

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x) \implies \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}.$$

因為 $v(x)$ 已知, 這已經變成了一個可以直接積分求解的最簡單方程.

總結來說, 常數變易法本質上是一種**變數變換法** ($y = u \cdot v$). 這並非盲目地將常數變成函數, 而是因為選取齊次方程的解作為乘積因式 $v(x)$, 恰好能抵消掉左端不需要的項, 從而分離出 $u'(x)$, 使方程變得可以直接積分.

例 10.2.18 求一階線性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}$$

的通解. (不妨設 $x > 0$)

解 (常數變易法) 先求對應的齊次方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 0$$

的通解.

當 $y \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx.$$

兩端積分

$$\int \frac{dy}{y} = -3 \int \frac{dx}{x},$$

得

$$\ln|y| = -3\ln|x| + C_1 \implies y = \pm e^{C_1} x^{-3} = Cx^{-3}.$$

(必須檢查 $y = 0$ 的情形. 將 $y = 0$ 代入齊次方程, 發現其滿足等式, 故 $y = 0$ 亦為齊次方程的解. 允許常數 $C = 0$ 即可涵蓋此解).

現, 把 C 換成 x 的未知函數 $u(x)$, 即令

$$y = u(x)x^{-3}.$$

對 x 求導得

$$\frac{dy}{dx} = u'(x)x^{-3} - 3u(x)x^{-4}.$$

代入所給非齊次方程, 得

$$u'(x)x^{-3} - 3u(x)x^{-4} + \frac{3}{x}(u(x)x^{-3}) = \frac{\sin x}{x^3},$$

化簡得

$$u'(x)x^{-3} = \frac{\sin x}{x^3}.$$

兩端同乘 x^3 (因 $x > 0$, 故 $x^3 \neq 0$), 得

$$u'(x) = \sin x.$$

兩端積分, 得

$$u(x) = -\cos x + C.$$

把上式代回變換式, 即得所求方程的通解為

$$y = \frac{C - \cos x}{x^3}.$$

解 (積分因子法) 所給方程為標準形式的一階線性非齊次方程, 其中 $P(x) = 3/x$, $Q(x) = (\sin x)/x^3$.

計算積分因子:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3.$$

將方程兩端同乘積分因子 x^3 (因 $x > 0$, 不影響等式成立), 得

$$x^3 \frac{dy}{dx} + 3x^2 y = \sin x,$$

方程左端恰好可寫成乘積的導數, 即

$$\frac{d}{dx}(x^3 y) = \sin x.$$

兩端同時對 x 積分, 得

$$x^3 y = -\cos x + C,$$

故通解為

$$y = \frac{C - \cos x}{x^3}.$$

例 10.2.19 有一個 RC 電路, 其中電源電動勢為交流電 $E = E_m \cos(\omega t)$ (E_m, ω 都是常數), 電阻 R 和電容 C_0 都是常數. 若開關閉合的時刻 $t = 0$ 時, 電容器上的初始電荷量為零, 求電容器上的電荷量 $q(t)$.

解 由電學知識, RC 電路滿足迴路電壓定律

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0} q = E_m \cos(\omega t),$$

兩端同除以 R , 化爲一階線性微分方程的標準形式:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC_0} q = \frac{E_m}{R} \cos(\omega t).$$

按題意, 初始條件爲

$$q|_{t=0} = 0.$$

這是一個非齊次線性方程, 可直接應用一階線性方程的通解公式求解. 這裡

$$P(t) = \frac{1}{RC_0}, \quad Q(t) = \frac{E_m \cos(\omega t)}{R},$$

積分因子爲 $e^{\int \frac{1}{RC_0} dt} = e^{\frac{t}{RC_0}}$. 代入公式得

$$q(t) = e^{-t/RC_0} \left(\int \frac{E_m}{R} e^{t/RC_0} \cos(\omega t) dt + K \right),$$

其中 K 爲任意常數. 又算括號內的積分

$$\int e^{t/RC_0} \cos(\omega t) dt = \frac{e^{t/RC_0}}{\left(\frac{1}{RC_0}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{RC_0} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right),$$

故將其代入前式並整理, 即得方程的通解

$$q(t) = \frac{E_m C_0}{1 + (\omega RC_0)^2} (\cos(\omega t) + \omega RC_0 \sin(\omega t)) + K e^{-t/RC_0}.$$

將初始條件 $q|_{t=0} = 0$ 代入上式, 得

$$0 = \frac{E_m C_0}{1 + (\omega RC_0)^2} (1 + 0) + K \implies K = -\frac{E_m C_0}{1 + (\omega RC_0)^2}.$$

因此, 所求電荷量函數 $q(t)$ 爲

$$q(t) = \frac{E_m C_0}{1 + (\omega RC_0)^2} (\cos(\omega t) + \omega RC_0 \sin(\omega t) - e^{-t/RC_0}).$$

例 10.2.20 解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2}.$$

解 原方程對 y 而言不是線性方程, 但若把 x 視爲 y 的函數, 將原方程變形爲

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y},$$

即

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = y,$$

這便是一階線性非齊次方程, 可按線性方程的解法求得通解.

在取倒數時隱含了 $y \neq 0$ 的假設. 必須回頭檢查 $y = 0$ 的情形: 將 $y = 0$ 代回原方程 $dy/dx = y/(x+y^2)$, 可知 $dy/dx = 0$, 左端等於右端, 故 $y = 0$ 亦是原方程的一個解.

對於方程 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y$, 積分因子為

$$e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{|y|}.$$

情形一: 當 $y > 0$ 時, 積分因子為 $\frac{1}{y}$. 在方程兩端同乘 $\frac{1}{y}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y^2} x &= 1 \implies \frac{d}{dy} \left(\frac{x}{y} \right) = 1 \\ \implies \frac{x}{y} &= y + C_1 \\ \implies x &= y^2 + C_1 y. \end{aligned}$$

情形二: 當 $y < 0$ 時, 積分因子為 $-\frac{1}{y}$. 在方程兩端同乘 $-\frac{1}{y}$, 得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y^2} x &= -1 \implies \frac{d}{dy} \left(-\frac{x}{y} \right) = -1 \\ \implies -\frac{x}{y} &= -y + C_2 \\ \implies x &= y^2 - C_2 y. \end{aligned}$$

由於 C_1, C_2 皆為任意常數, 若令 $C = C_1$ 或 $C = -C_2$, 則無論 $y > 0$ 或 $y < 0$, 通解皆可統一表示為

$$x = y^2 + Cy.$$

檢視通解 $x = y^2 + Cy$, 無論常數 C 取何值, 皆無法表示出函數 $y = 0$ 的完整圖形 (僅能得出原點 $(0, 0)$), 故 $y = 0$ 是本方程的奇解. 綜上所述, 方程的解為 $x = y^2 + Cy$ 以及 $y = 0$.

* 白努利型

定義 10.2.21 方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

叫做**白努利方程**. 當 $n = 0$ 或 $n = 1$ 時, 這是線性微分方程. 當 $n \neq 0$ 且 $n \neq 1$ 時, 這方程不是線性的, 但是透過變數的代換, 便可把它化為線性的.

註記 10.2.22 為了解白努利方程, 需要將其化為一階線性方程.

首先, 在方程兩端同除以 y^n 之前, 必須嚴謹討論 $y = 0$ 的情形. 若 $n > 0$, 將 $y = 0$ 代入原方程會發現左右兩端皆為 0, 因此 $y = 0$ 必然是原方程的一個解. (若 $n < 0$ 則 y 不能為 0).

當 $y \neq 0$ 時, 將方程兩端同除以 y^n , 得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

容易看出, 上式左端第一項與 $\frac{d}{dx}(y^{1-n})$ 只差一個常數因子 $1 - n$. 因此引入新的未知函數

$$z = y^{1-n},$$

對 x 求導可得

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

用 $1-n$ 乘以前面方程的兩端, 並代入上述變換, 便得到關於 z 的一階線性微分方程:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

利用常數變易法或積分因子法求出這個線性方程的通解後, 再以 y^{1-n} 代回 z , 即可得到原白努利方程的通解. (最後別忘了補上先前討論的 $y=0$ 這個解).

例 10.2.23 求方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^3$$

的通解. (不妨設 $x > 0$)

解 觀察方程可知, 將 $y=0$ 代入方程, 左右兩端皆為 0, 故 $y=0$ 是該方程的一個解.

當 $y \neq 0$ 時, 將方程兩端同除以 y^3 , 得

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-2} = x.$$

令 $z = y^{-2}$, 則對 x 求導得

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \implies -2y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y^{-2} = -2x,$$

代入 z 與 $\frac{dz}{dx}$, 得到關於 z 的一階線性方程:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = -2x.$$

對於此一階線性方程, 使用積分因子法求解. 積分因子為

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}.$$

在方程兩端同乘積分因子 x^{-2} , 得

$$x^{-2} \frac{dz}{dx} - 2x^{-3} z = -2x^{-1},$$

即

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}z) = -2x^{-1}.$$

兩端積分, 得

$$x^{-2}z = -2 \ln x + C \implies z = x^2(C - 2 \ln x).$$

最後, 以 y^{-2} 代替 z , 即得方程的通解為

$$y^{-2} = x^2(C - 2 \ln x), \quad \text{即} \quad y^2 = \frac{1}{x^2(C - 2 \ln x)}.$$

檢視通解, 無論常數 C 取何實數值, 均無法包含函數 $y=0$, 因此 $y=0$ 是原方程的奇解. 綜上所述, 方程的解為通解 $y^2 = 1/(x^2(C - 2 \ln x))$ 以及奇解 $y=0$.

10.3 高階微分方程式

可降階的高階微分方程

註記 10.3.1 (形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的微分方程) 如果微分方程的右端僅含有自變數 x , 即形如

$$y^{(n)} = f(x),$$

這類方程的解法最爲直觀. 只要把 $y^{(n-1)}$ 作爲新的未知函數, 原方程就是關於新函數的一階微分方程. 只需對等式兩端連續進行 n 次積分, 每次積分都會產生一個新的任意常數, 積分 n 次後即可得到含有 n 個任意常數的通解.

例 10.3.2 一質點作直線運動, 其加速度與時間的關係爲 $a(t) = 12t^2 - 6t$. 已知 $t = 0$ 時, 質點的位置爲 $x = 1$, 速度爲 $v = 2$. 求質點的位置函數 $x(t)$.

解 由物理學知識可知, 加速度是位置函數 $x(t)$ 對時間 t 的二階導數, 即

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 12t^2 - 6t.$$

這是 $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$ 型的可降階微分方程. 對等式兩端關於 t 積分一次, 得到速度函數:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \int (12t^2 - 6t) dt = 4t^3 - 3t^2 + C_1.$$

代入初始條件 $v(0) = 2$, 得

$$4(0)^3 - 3(0)^2 + C_1 = 2 \implies C_1 = 2.$$

故速度函數爲 $\frac{dx}{dt} = 4t^3 - 3t^2 + 2$.

再對等式兩端關於 t 積分一次, 得到位置函數:

$$x(t) = \int (4t^3 - 3t^2 + 2) dt = t^4 - t^3 + 2t + C_2.$$

代入初始條件 $x(0) = 1$, 得

$$0^4 - 0^3 + 2(0) + C_2 = 1 \implies C_2 = 1.$$

於是, 質點的位置函數爲

$$x(t) = t^4 - t^3 + 2t + 1.$$

註記 10.3.3 (形如 $y'' = f(x, y')$ 的微分方程) 如果微分方程中不顯含未知函數 y , 即形如

$$y'' = f(x, y'),$$

那麼可透過引入新的未知函數 $p = y'$ 來降階. 此時 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$, 原方程就化爲關於變數 x, p 的一階微分方程

$$p' = f(x, p).$$

求出這個一階微分方程的解 $p = \varphi(x, C_1)$ 後, 由於 $p = \frac{dy}{dx}$, 因此再進行一次積分即可得到原方程的通解:

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

例 10.3.4 求微分方程

$$(1 + x^2)y'' = 2xy'$$

的通解.

解 設 $y' = p$, 則 $y'' = \frac{dp}{dx}$. 代入原方程得

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} = 2xp.$$

這是一個可分離變數的一階方程. 在分離變數前, 必須討論 $p = 0$ 的情形: 若 $p = 0$, 則 $y' = 0 \implies y = C$ (常數). 將 $y = C$ 代入原方程, 左右兩端皆為 0, 故 $y = C$ 是原方程的解.

當 $p \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

兩端積分

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{1+x^2} dx,$$

得

$$\ln |p| = \ln(1+x^2) + C_1 \implies p = \pm e^{C_1}(1+x^2).$$

令 $C_2 = \pm e^{C_1}$ 為任意非零常數, 則 $p = C_2(1+x^2)$. 若允許 $C_2 = 0$, 則恰好對應到先前討論的 $p = 0$ 的情形. 因此 y' 的通解可統一寫為

$$y' = C_2(1+x^2).$$

再對兩端關於 x 積分一次, 得原方程的通解為

$$y = \int C_2(1+x^2) dx = C_2 \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right) + C_3.$$

註記 10.3.5 (形如 $y'' = f(y, y')$ 的微分方程) 如果微分方程中不顯含自變數 x , 即形如

$$y'' = f(y, y'),$$

同樣令 $y' = p$. 但為了消去 x , 必須利用連鎖律將 y'' 化為對 y 的導數:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

這樣, 原方程就化為關於變數 y, p 的一階微分方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

解出這個一階方程得到 $p = \varphi(y, C_1)$ 後, 也就是 $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$, 再次分離變數並積分, 即可求得原方程的通解.

例 10.3.6 求微分方程

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

的通解.

解 方程中不顯含自變數 x , 屬於 $y'' = f(y, y')$ 型. 設 $y' = p$, 則 $y'' = p \frac{dp}{dy}$. 代入原方程得

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \implies p \left(y \frac{dp}{dy} + p \right) = 0.$$

這意味著 $p = 0$ 或者 $y \frac{dp}{dy} + p = 0$.

情形一: 若 $p = 0$, 則 $y' = 0$, 積分得 $y = C$ (常數).

情形二: 若 $p \neq 0$, 則兩端除以 p 得

$$y \frac{dp}{dy} + p = 0 \implies y \frac{dp}{dy} = -p.$$

在分離變數時, 需要除以 y 和 p . (此時已假設 $p \neq 0$; 若 $y = 0$ 則導致 $p = y' = 0$, 已在情形一中包含). 當 $y \neq 0$ 且 $p \neq 0$ 時, 分離變數得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}.$$

兩端積分得

$$\ln |p| = -\ln |y| + C_1 \implies \ln |py| = C_1 \implies py = \pm e^{C_1} = C_2,$$

其中 C_2 為非零常數. 即

$$p = \frac{C_2}{y}.$$

將 $p = \frac{dy}{dx}$ 代回, 得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{y}.$$

再次分離變數 (顯然 $y \neq 0$), 得

$$y dy = C_2 dx.$$

兩端積分得

$$\frac{1}{2}y^2 = C_2x + C_3 \implies y^2 = 2C_2x + 2C_3.$$

令 $K_1 = 2C_2, K_2 = 2C_3$, 通解可寫為

$$y^2 = K_1x + K_2.$$

最後, 回顧情形一中的解 $y = C$ (常數). 若在上式中允許 $K_1 = 0$, 則 $y^2 = K_2 \implies y = \pm\sqrt{K_2}$, 恰好就是常數解. 因此, 方程的通解可以統一表示為

$$y^2 = K_1x + K_2.$$

高階線性微分方程之理論

定義 10.3.7 形如

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

的方程稱為 n 階線性微分方程, 因為它對於未知函數 y 及其各階導數是一次方程. 當方程右端 $f(x) \equiv 0$ 時, 稱該方程為齊次的; 當 $f(x) \neq 0$ 時, 稱該方程為非齊次的.

註記 10.3.8 為了書寫與證明方便, 通常引入線性微分算子 L , 將方程左端記為

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

由於導數運算具有線性性, 算子 L 也滿足線性性, 即對於任意常數 c_1, c_2 及充分可導的函數 y_1, y_2 , 恆有

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2).$$

利用算子 L , n 階齊次與非齊次線性方程可分別簡記為 $L(y) = 0$ 與 $L(y) = f(x)$.

定義 10.3.9 設 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 為定義在區間 I 上的 n 個函數. 如果存在 n 個不全為零的常數 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使得當 $x \in I$ 時, 恆有等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \equiv 0$$

成立, 那麼稱這 n 個函數在區間 I 上**線性相依**; 否則 (即要使上式恆成立必須要求 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 時), 稱這 n 個函數在區間 I 上**線性獨立**.

定理 10.3.10 (齊次線性方程解的疊加原理) 如果函數 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ 是 n 階齊次線性方程 $L(y) = 0$ 的 k 個解, 那麼它們的線性組合

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

也是該方程的解, 其中 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是任意常數.

證明 將 $y = c_1 y_1 + \dots + c_k y_k$ 代入方程左端, 利用微分算子 L 的線性性質, 得

$$L(y) = L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \dots + c_k L(y_k).$$

由於 $y_1, y_2, \dots, y_k$ 都是齊次方程 $L(y) = 0$ 的解, 故 $L(y_i) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 因此, $L(y) = c_1(0) + c_2(0) + \dots + c_k(0) \equiv 0$, 即 y 也是 $L(y) = 0$ 的解. $\square$

定義 10.3.11 給定 n 個具有 $n-1$ 階導數的函數 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 由它們及其各階導數所構成的行列式

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

稱為這 n 個函數的**朗斯基行列式**.

準則 10.3.12 (朗斯基行列式判定準則) 設 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 是 n 階齊次線性微分方程 $L(y) = 0$ 在區間 I 上的 n 個解, 則這 n 個解在 I 上線性獨立的充要條件是: 它們的朗斯基行列式在 I 上處處不為零, 即 $W(x) \neq 0$ ($x \in I$). (事實上, 根據阿貝爾定理², 齊次線性方程解的朗斯基行列式或者在區間上恆為零, 或者處處不為零.)

證明 為求論證簡潔, 改為證明其等價敘述: $y_1, \dots, y_n$ 在 I 上線性相依的充要條件是 $W(x) \equiv 0$.

必要性: 若 $y_1, \dots, y_n$ 在 I 上線性相依, 則存在不全為零的常數 $k_1, \dots, k_n$, 使得恆有

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \equiv 0.$$

將此式兩端連續求導 $n-1$ 次, 可得到一個代數上的齊次線性方程組:

$$\begin{cases} k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0, \\ k_1 y_1' + k_2 y_2' + \dots + k_n y_n' = 0, \\ \vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-1)} + \dots + k_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

對於任意給定的 $x \in I$, 上述以 $k_1, \dots, k_n$ 為未知數的方程組皆有非零解 (因為常數 k_i 不全為零). 根據線性代數中克拉瑪公式的結論, 該方程組的係數行列式必定恆為零. 而該係數行列式正是朗斯基行列式 $W(x)$, 故 $W(x) \equiv 0$ 在 I 上恆成立.

² 此定理可參考微分方程的教科書.

充分性: 假設存在某點 $x_0 \in I$ 使得 $W(x_0) = 0$. 這意味著在 x_0 處, 上述以 $k_1, \dots, k_n$ 為未知數的方程組的係數行列式為零, 因此該代數方程組必存在一組不全為零的解 $c_1, \dots, c_n$, 使得

$$c_1 y_1^{(j)}(x_0) + c_2 y_2^{(j)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(j)}(x_0) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

現在利用這組常數構造一個新的函數 $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$. 由齊次方程的疊加原理可知, $Y(x)$ 也是 $L(y) = 0$ 的解; 並且根據剛才的構造, 它滿足初始條件

$$Y(x_0) = 0, Y'(x_0) = 0, \dots, Y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

根據常微分方程初值問題的「解的唯一性定理³」, 滿足零初值條件的齊次方程的解, 只能是恆為零的平凡解, 即 $Y(x) \equiv 0$. 於是得到 $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0$, 且常數 c_i 不全為零, 故這 n 個解在 I 上線性相依.

(補充註記: 根據阿貝爾恆等式, 齊次線性方程解的朗斯基行列式 $W(x)$ 若在區間內某點為零, 則必定處處為零; 若在某點不為零, 則處處不為零. 故線性獨立的充要條件即為 $W(x)$ 處處不為零.) $\square$

定理 10.3.13 如果 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 階齊次線性方程 $L(y) = 0$ 的 n 個線性獨立的解, 那麼此方程的通解為

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 為任意常數. (這組線性獨立的解通常被稱為該方程的**基本解組**).

定理 10.3.14 設 $y^*(x)$ 是 n 階非齊次線性方程 $L[y] = f(x)$ 的一個特解, $Y(x)$ 是與之對應的齊次線性方程 $L[y] = 0$ 的通解, 則

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齊次線性微分方程 $L[y] = f(x)$ 的通解.

證明 把 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程 $L[y] = f(x)$ 的左端, 利用算子 L 的線性性質, 得

$$L[y] = L[Y + y^*] = L[Y] + L[y^*].$$

由於 Y 是對應齊次方程的解, 故 $L[Y] \equiv 0$; 又 y^* 是非齊次方程的解, 故 $L[y^*] \equiv f(x)$. 因此

$$L[y] = 0 + f(x) = f(x).$$

這說明 $y = Y(x) + y^*(x)$ 確實是 $L[y] = f(x)$ 的解. 又因為 $Y(x)$ 中含有 n 個互相獨立的任意常數, 所以 $y = Y(x) + y^*(x)$ 中也含有 n 個獨立的任意常數, 從而它就是 n 階非齊次線性方程的通解. 證畢. $\square$

定理 10.3.15 (非齊次線性方程解的疊加原理) 設非齊次線性方程的右端 $f(x)$ 是兩個函數之和, 即 $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, 而 $y_1^*(x)$ 與 $y_2^*(x)$ 分別是方程

$$L[y] = f_1(x) \quad \text{與} \quad L[y] = f_2(x)$$

的特解, 則 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程 $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

證明 將 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 代入方程的左端, 利用算子 L 的線性性質, 得

$$L[y^*] = L[y_1^* + y_2^*] = L[y_1^*] + L[y_2^*].$$

因為 y_1^*, y_2^* 分別是 $L[y] = f_1(x)$ 與 $L[y] = f_2(x)$ 的特解, 所以

$$L[y_1^*] \equiv f_1(x), \quad L[y_2^*] \equiv f_2(x).$$

代入上式即得

$$L[y^*] = f_1(x) + f_2(x).$$

因此, $y_1^* + y_2^*$ 是原方程的一個特解. 證畢. $\square$

³本講義暫時無法給出此定理的證明, 有興趣的讀者請自行查閱微分方程的教材.

註記 10.3.16 (n 階線性微分方程的常數變易法) 考慮 n 階非齊次線性微分方程

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

假設已經求得對應的齊次方程 $L[y] = 0$ 的 n 個線性獨立的解 (基本解組) 為 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, 則齊次方程的通解為

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x).$$

常數變易法的核心思想是: 將通解中的常數 C_i 替換為未知函數 $v_i(x)$, 令非齊次方程的解為

$$y = v_1y_1 + v_2y_2 + \cdots + v_ny_n.$$

以下證明常數變易法的合理性: 將上式對 x 求導, 得

$$y' = (v_1y_1' + v_2y_2' + \cdots + v_ny_n') + (v_1'y_1 + v_2'y_2 + \cdots + v_n'y_n).$$

為了簡化後續的高階導數, 人為規定第二個括號內的值為 0, 即:

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 + \cdots + v_n'y_n = 0.$$

在這樣的規定下, $y' = v_1y_1' + \cdots + v_ny_n'$. 繼續求二階導數, 再次產生 v_i' 的項, 再次令含有 v_i' 的項總和為零. 依此類推, 直到第 $n-1$ 階導數, 共施加了 $n-1$ 個條件:

$$\sum_{i=1}^n v_i'y_i^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2).$$

在這些條件下, y 的前 $n-1$ 階導數形式上就如同 v_i 是常數一樣:

$$y^{(k)} = v_1y_1^{(k)} + v_2y_2^{(k)} + \cdots + v_ny_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

對 $y^{(n-1)}$ 再求導一次 (這一次不再令 v_i' 的項為零), 得到:

$$y^{(n)} = (v_1y_1^{(n)} + \cdots + v_ny_n^{(n)}) + (v_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-1)}).$$

現在, 把 $y, y', \dots, y^{(n)}$ 代入原方程 $L[y] = f(x)$ 中, 並將含有相同 v_i 的項合併:

$$v_1L[y_1] + v_2L[y_2] + \cdots + v_nL[y_n] + (v_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-1)}) = f(x).$$

因為 $y_1, \dots, y_n$ 是齊次方程 $D[y] = 0$ 的解, 所以 $L[y_i] \equiv 0$. 因此, 方程大幅簡化為:

$$v_1'y_1^{(n-1)} + v_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-1)} = f(x).$$

將這個等式與前面人為規定的 $n-1$ 個條件聯立, 得到一個關於未知函數 $v_1', v_2', \dots, v_n'$ 的代數線性方程組:

$$\begin{cases} v_1'y_1 + \cdots + v_n'y_n = 0, \\ v_1'y_1' + \cdots + v_n'y_n' = 0, \\ \vdots \\ v_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ v_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

該方程組的係數行列式恰好是基本解組的朗斯基行列式 $W(x)$. 由於 $y_1, \dots, y_n$ 線性獨立, 故 $W(x) \neq 0$. 因此, 可透過克拉瑪公式唯一解出 $v_i'(x)$. 對 $v_i'(x)$ 積分即可求得 $v_i(x) = C_i + \int v_i'(x) dx$, 代回即可得到非齊次方程的通解. 這證明了只要 $W(x) \neq 0$, 此構造方法在數學上是完全合理且必定可解的.

例 10.3.17 已知齊次方程 $x^2 y'' - 2y = 0$ 的兩個線性獨立解為 $y_1 = x^2$ 與 $y_2 = x^{-1}$ (其中 $x > 0$). 求非齊次方程

$$x^2 y'' - 2y = 3x^2$$

的通解.

解 首先, 將非齊次方程化為標準形式 (確保最高次項係數為 1). 在方程兩端同除以 x^2 (因 $x > 0$, 故 $x^2 \neq 0$), 得

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 3,$$

即 $f(x) = 3$.

計算基本解組 $y_1 = x^2, y_2 = x^{-1}$ 的朗斯基行列式:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{vmatrix} = -3.$$

由於 $W(x) = -3 \neq 0$, 解是線性獨立的.

令通解為 $y = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2 = v_1x^2 + v_2x^{-1}$, 則由常數變易法得方程組:

$$\begin{cases} v_1'x^2 + v_2'x^{-1} = 0, \\ v_1'(2x) + v_2'(-x^{-2}) = 3. \end{cases}$$

利用克拉瑪公式解出 v_1' 與 v_2' :

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1} \\ 3 & -x^{-2} \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{x}, \quad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 3 \end{vmatrix}}{-3} = -x^2.$$

對兩式進行積分:

$$v_1 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_1 \quad (\text{因 } x > 0), \quad v_2 = \int (-x^2) dx = -\frac{1}{3}x^3 + C_2.$$

將 v_1, v_2 代回, 得方程的通解:

$$y = (\ln x + C_1)x^2 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + C_2\right)x^{-1} = C_1x^2 + C_2x^{-1} + x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2.$$

由於 $-\frac{1}{3}x^2$ 可被 C_1x^2 吸收 (將 $C_1 - \frac{1}{3}$ 重新記為 C_1), 故通解可化簡為

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + x^2 \ln x.$$

例 10.3.18 已知齊次微分方程 $y'' + y = 0$ 的兩個線性獨立解為 $y_1 = \cos x$ 及 $y_2 = \sin x$, 求解非齊次微分方程

$$y'' + y = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

解 計算朗斯基行列式:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

由於 $W(x) = 1 \neq 0$, 且方程已是標準形式 ($f(x) = \sec x$), 令通解為

$$y = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x.$$

由常數變易法可列出方程組:

$$\begin{cases} v_1' \cos x + v_2' \sin x = 0, \\ v_1'(-\sin x) + v_2' \cos x = \sec x. \end{cases}$$

利用克拉瑪公式 (且分母 $W = 1$) 解出 v_1', v_2' :

$$v_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \sec x = -\tan x,$$

$$v_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = \cos x \sec x = 1.$$

對兩式進行積分 (在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 內, $\cos x > 0$):

$$v_1 = \int (-\tan x) dx = \ln(\cos x) + C_1, \quad v_2 = \int 1 dx = x + C_2.$$

將 v_1, v_2 代回, 得原非齊次方程的通解為

$$\begin{aligned} y &= (\ln(\cos x) + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x. \end{aligned}$$

常係數齊次線性微分方程

說明 n 階常係數齊次線性微分方程的一般形式為

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

其中 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 都是實數常數. 為了推導方便, 引入微分算子 $D = \frac{d}{dx}$, 則 $\frac{d^k y}{dx^k} = D^k y$. 將方程左端提取出 y , 可以記作

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n) y = 0.$$

把括號內的算子多項式記為 $L(D)$, 則原方程可簡寫為 $L(D)y = 0$.

如同二階方程的經驗, 猜測解具有指數函數的形式 $y = e^{rx}$ (其中 r 為待定常數). 將 $y = e^{rx}$ 代入微分算子, 由於 $D^k e^{rx} = r^k e^{rx}$, 可得

$$L(D)e^{rx} = L(r)e^{rx} = 0.$$

因為對於任意實數 x , $e^{rx} \neq 0$ 恆成立, 所以必須要有

$$L(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0.$$

這個關於 r 的 n 次代數方程式, 就稱為該微分方程的**特徵方程式**. 根據代數學基本定理, 特徵方程式在複數體中恰好有 n 個根 (包含重根). 依這 n 個根的不同性質, 詳細討論對應的線性獨立解:

(1) 特徵根為單實根的情形: 若 r 為特徵方程式的一個單實根, 則對應一個解:

$$y_1 = e^{rx}.$$

(2) 特徵根為 k 重實根的情形: 若 r 為特徵方程式的 k 重實根, 這意味著算子多項式 $L(D)$ 含有因式 $(D-r)^k$, 即 $L(D) = M(D)(D-r)^k$. 要使 $L(D)y = 0$, 只需找滿足 $(D-r)^k y = 0$ 的函數即可. 此處引入一個極為重要的算子平移定理 (指數位移法則): 對於任意充分可微的函數 $u(x)$, 有

$$(D-r)(u(x)e^{rx}) = (u'(x)e^{rx} + ru(x)e^{rx}) - ru(x)e^{rx} = u'(x)e^{rx}.$$

反覆應用此性質 k 次, 得到:

$$(D - r)^k (u(x)e^{rx}) = u^{(k)}(x)e^{rx}.$$

令其等於零, 即 $u^{(k)}(x)e^{rx} = 0 \implies u^{(k)}(x) = 0$. 對 $u^{(k)}(x) = 0$ 連續積分 k 次, 得到 $u(x)$ 必定是一個最高次數為 $k - 1$ 次的多項式:

$$u(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + \cdots + A_kx^{k-1}.$$

因此, 對應於 k 重實根 r 的通解部分為 $y = u(x)e^{rx}$, 展開即得到 k 個線性獨立的解:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}.$$

- (3) 特徵根為一對單複數根的情形: 由於特徵方程式的係數 p_i 均為實數, 複數根必定以共軛對的形式出現. 設 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (其中 α, β 為實數, $\beta \neq 0$) 為一對單複數根. 在複變函數中, 指數函數的求導法則不變, 故得到兩個複數值函數解:

$$Y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad Y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

為了得到實數值函數的解, 利用歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 將其展開:

$$Y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad Y_2 = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

根據齊次線性方程的疊加原理, 複數值解的任意常數線性組合仍為解. 取它們的實部與虛部 (即進行和差運算):

$$y_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = \frac{1}{2i}(Y_1 - Y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

容易驗證 $y_2/y_1 = \tan \beta x$ 不是常數, 故這兩個實數值函數是線性獨立的. 因此, 一對單複數根給出兩個線性獨立的實數解:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- (4) 特徵根為一對 k 重複數根的情形: 若 $r = \alpha \pm i\beta$ 是一對 k 重共軛複數根. 根據與「 k 重實根」完全相同的算子平移定理邏輯, 只不過此時的根落在了複數體: 對應的複數值解為 $x^m e^{(\alpha+i\beta)x}$ 與 $x^m e^{(\alpha-i\beta)x}$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$. 對這每一對 (m 相同時) 複數解, 同樣利用歐拉公式展開並取其實部與虛部, 即可分離出實數值解:

$$\text{實部: } x^m e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \text{虛部: } x^m e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

這便給出了 $2k$ 個線性獨立的實數解:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

這部分的通解組合可以寫為:

$$e^{\alpha x} ((A_1 + A_2x + \cdots + A_kx^{k-1}) \cos \beta x + (B_1 + B_2x + \cdots + B_kx^{k-1}) \sin \beta x).$$

由上述得到 n 個線性獨立解後, 每一項各配上一個獨立的任意常數相加, 就能得到由 n 個線性獨立解構成的 n 階常係數齊次線性微分方程的完整通解

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n.$$

例 10.3.19 考慮一個無交流電源的 RLC 串聯電路 (阻尼振盪系統), 其中電感 $L = 1$ H (亨利), 電阻 $R = 2$ Ω (歐姆), 電容 $C = 0.2$ F (法拉). 若初始時刻 $t = 0$ 時, 電容器上的電荷量為 q_0 , 且電路中無初始電流, 求電容器上的電荷量 $q(t)$ 隨時間變化的規律.

解 根據克希荷夫電壓定律, 該電路滿足的微分方程為

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

代入已知數值, 得到二階常係數齊次線性微分方程:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dt} + 5q = 0.$$

寫出其特徵方程式:

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

利用公式解得一對共軛複數根⁴:

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2j.$$

因此, 電荷量 $q(t)$ 的通解結構為

$$q(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

接著代入初始條件來確定特解. 由初始電荷量 $q(0) = q_0$, 得 $C_1 = q_0$. 再對 $q(t)$ 求導, 得電流函數:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{-t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t).$$

由初始電流 $i(0) = 0$, 代入 $t = 0$ 得

$$-C_1 + 2C_2 = 0 \implies C_2 = \frac{C_1}{2} = \frac{q_0}{2}.$$

故電荷量隨時間變化的規律為

$$q(t) = q_0 e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right).$$

(這在物理上稱為欠阻尼振盪, 電荷量會隨時間呈指數衰減並來回振盪).

例 10.3.20 求微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解.

解 此為三階常係數齊次線性微分方程. 其特徵方程式為

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0,$$

不難解得特徵根為一個單實根與一對單純虛數根:

$$r_1 = 2, \quad r_{2,3} = \pm i.$$

根據特徵根與解的對應關係, 對應於實根 $r_1 = 2$ 有一解 e^{2x} ; 對應於複數根 $r_{2,3} = \pm i$ 有兩解 $\cos x$ 與 $\sin x$. 故原微分方程的通解為

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

例 10.3.21 求微分方程

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

的通解.

⁴在電學中, 虛數單位常記作 j , 以區分電流 i .

解 該四階方程的特徵方程式為

$$r^4 + 2r^3 + r^2 = 0,$$

不難解得特徵根為兩對二重實根:

$$r_{1,2} = 0 \text{ (二重)}, \quad r_{3,4} = -1 \text{ (二重)}.$$

對於二重根 $r = 0$, 對應的解項為 $C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} = C_1 + C_2 x$. 對於二重根 $r = -1$, 對應的解項為 $(C_3 + C_4 x) e^{-x}$. 將其疊加, 即得原微分方程的通解為

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^{-x}.$$

例 10.3.22 求微分方程 $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ 的通解.

解 其特徵方程式為

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0,$$

不難解得特徵根為一對二重的純虛數根:

$$r_{1,2,3,4} = \pm 2i \text{ (二重)}.$$

根據一對 k 重複數根的通解結構法則, 原微分方程的通解為

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

* 常係數非齊次線性微分方程

說明 考慮 n 階常係數非齊次線性微分方程

$$L(D)y = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x).$$

由線性微分方程的解的結構可知, 求通解的關鍵在於求出該非齊次方程的一個特解 y^* . 當右端函數 $f(x)$ 具有某些特殊形式時, 可以不用積分, 直接透過猜測解的形式並比較係數來求得特解, 這種方法稱為**待定係數法**.

以下直接針對 n 階方程詳細推導 $f(x)$ 取三種常見形式時的特解結構.

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型: 其中 λ 為常數, $P_m(x)$ 是 x 的一個 m 次多項式.

由於指數函數與多項式乘積的導數仍為指數函數與多項式的乘積, 大膽猜測特解具有形式

$$y^* = R(x) e^{\lambda x},$$

其中 $R(x)$ 是一個待定的多項式. 利用算子平移定理 (指數位移法則)

$$L(D) (u(x) e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} L(D + \lambda) [u(x)],$$

將 y^* 代入原方程得

$$L(D) (R(x) e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} L(D + \lambda) (R(x)) = P_m(x) e^{\lambda x}.$$

消去 $e^{\lambda x}$ 後, 得到關於未知多項式 $R(x)$ 的方程:

$$L(D + \lambda) (R(x)) = P_m(x).$$

將微分算子多項式 $L(D + \lambda)$ 在 λ 處進行泰勒展開:

$$L(D + \lambda) = L(\lambda) + L'(\lambda)D + \frac{L''(\lambda)}{2!}D^2 + \cdots + \frac{L^{(n)}(\lambda)}{n!}D^n.$$

代入上式, 得到

$$\left(L(\lambda) + L'(\lambda)D + \cdots + \frac{L^{(n)}(\lambda)}{n!}D^n \right) R(x) = P_m(x).$$

現在根據 λ 是否為特徵方程 $L(r) = 0$ 的根來分類討論:

- (一) 若 λ 不是特徵方程的根 ($k = 0$): 此時 $L(\lambda) \neq 0$. 方程左端的最低階導數項為 $L(\lambda)R(x)$. 要使等式兩端同為 m 次多項式, $R(x)$ 必須是一個 m 次多項式. 故可設 $R(x) = R_m(x)$.
- (二) 若 λ 是特徵方程的 k 重根 ($k > 0$): 此時 $L(\lambda) = L'(\lambda) = \cdots = L^{(k-1)}(\lambda) = 0$, 但 $L^{(k)}(\lambda) \neq 0$. 算子展開式的前 k 項皆為 0, 方程變為

$$D^k \left(\frac{L^{(k)}(\lambda)}{k!} + \frac{L^{(k+1)}(\lambda)}{(k+1)!}D + \cdots \right) R(x) = P_m(x).$$

括號內的算子作用在多項式上不會改變其最高次數 (因為常數項 $L^{(k)}(\lambda)/k! \neq 0$). 因此, $D^k R(x)$ 必須是一個 m 次多項式. 這意味著 $R(x)$ 本身必須是一個 $m+k$ 次多項式. 由於 $R(x)$ 中次數低於 k 的項在求 k 階導數後會消失 (且這些項剛好被包含在對應齊次方程的通解中), 因此不妨直接將低次項設為 0, 即設 $R(x) = x^k R_m(x)$, 其中 $R_m(x)$ 是與 $P_m(x)$ 同次的 m 次多項式.

結論: 對於 n 階方程, 若 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 則特解可設為

$$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x},$$

其中 k 按 λ 是特徵方程的重根次數來取值 (不是根取 0, 單根取 1, s 重根取 s).

- (2) $f(x) = e^{\lambda x} (P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x)$ 型: 其中 $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$, $P_l(x), Q_n(x)$ 分別是 l 次和 n 次多項式. 為了將其轉化為已解決的第一種形式, 可應用歐拉公式

$$\cos \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} \quad \text{與} \quad \sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}.$$

將 $f(x)$ 寫成複變指數函數的形式:

$$f(x) = P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x},$$

其中 $P(x)$ 是複係數的 m 次多項式 ($m = \max\{l, n\}$), 且第一項與第二項互為共軛.

根據解的疊加原理, 先求對應於 $f_1(x) = P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$ 的特解 y_1^* . 利用第一部分的結論, 可設

$$y_1^* = x^k R_m(x) e^{(\lambda+i\omega)x},$$

其中 k 為複數 $\lambda + i\omega$ 作為特徵方程 $L(r) = 0$ 的根的重數. 由於原方程的係數都是實數, 對應於共軛項 $f_2(x) = \overline{P}(x)e^{(\lambda-i\omega)x}$ 的特解必然是 y_1^* 的共軛複數, 即 $y_2^* = \overline{y_1^*}$.

於是, 原方程的特解為這兩個共軛解之和:

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} = 2\operatorname{Re}(y_1^*) \\ &= 2\operatorname{Re} \left(x^k (A_m(x) + iB_m(x)) e^{\lambda x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) \right) \\ &= x^k e^{\lambda x} (R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x). \end{aligned}$$

(相加後虛部自動抵消, 剩下的 $R_m^{(1)}(x)$ 與 $R_m^{(2)}(x)$ 皆為重組後的實係數 m 次多項式).

結論: 特解可設為

$$y^* = x^k e^{\lambda x} (R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x),$$

其中 $m = \max\{l, n\}$, k 為 $\lambda + i\omega$ 作為特徵方程的根的重數 (不是根取 0, 單根取 1, 依此類推).

(3) $f(x) = e^{\lambda x}(P_l(x) \cosh \omega x + Q_n(x) \sinh \omega x)$ 型: 此類型與含有三角函數的情形 (第二型) 同理.

已知雙曲函數的定義為 $\cosh \omega x = (e^{\omega x} + e^{-\omega x})/2$ 與 $\sinh \omega x = (e^{\omega x} - e^{-\omega x})/2$. 若將其代入 $f(x)$ 中展開, $f(x)$ 本質上可以直接化為兩個第一型函數的疊加:

$$f(x) = A(x)e^{(\lambda+\omega)x} + B(x)e^{(\lambda-\omega)x},$$

其中 $A(x)$ 與 $B(x)$ 也是多項式. 只需將問題拆解為分別求解右端為 $A(x)e^{(\lambda+\omega)x}$ 與 $B(x)e^{(\lambda-\omega)x}$ 的兩個非齊次方程. 然後直接套用第一型的結論, 分別檢查實數 $\lambda + \omega$ 與 $\lambda - \omega$ 是否為特徵方程的根及其重數 (k_1 與 k_2), 即可分別寫出兩部分的待定特解形式. 最後將兩部分的特解相加, 即為原方程的特解. (若 $k_1 = k_2 = k$, 也可以重新整理回含有 $\cosh \omega x$ 與 $\sinh \omega x$ 的形式, 但實務上直接拆成兩項實指數函數求解最為直觀且不易出錯).

例 10.3.23 求微分方程

$$y'' - 3y' + 2y = (2x + 1)e^{3x}$$

的通解.

解 首先求對應的齊次方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解. 其特徵方程式為

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

解得兩個相異實根 $r_1 = 1, r_2 = 2$. 故齊次方程的通解為 $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

原方程的右端為 $f(x) = (2x + 1)e^{3x}$, 屬於第一型 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 其中 $\lambda = 3, P_1(x) = 2x + 1$ (為一次多項式). 因為 $\lambda = 3$ 不是特徵根, 故 $k = 0$. 設特解為

$$y^* = (Ax + B)e^{3x}.$$

對其求導:

$$(y^*)' = (3Ax + 3B + A)e^{3x}, \quad (y^*)'' = (9Ax + 9B + 6A)e^{3x}.$$

代入原方程並消去 e^{3x} , 得

$$(9Ax + 9B + 6A) - 3(3Ax + 3B + A) + 2(Ax + B) = 2x + 1,$$

比較兩端同次冪的係數, 得

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 3A + 2B = 1, \end{cases}$$

解得 $A = 1, B = -1$. 於是求得一個特解為 $y^* = (x - 1)e^{3x}$.

從而所求的通解為

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (x - 1)e^{3x}.$$

例 10.3.24 求微分方程

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

的通解.

解 對應的齊次方程的特徵方程式為

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \implies (r - 2)^2 = 0.$$

有二重實根 $r_1 = r_2 = 2$. 齊次方程的通解為 $Y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$.

原方程右端 $f(x) = xe^{2x}$, 屬於第一型, 其中 $\lambda = 2, P_1(x) = x$. 由於 $\lambda = 2$ 剛好是特徵方程的二重根, 故 $k = 2$. 應設特解為

$$y^* = x^2(Ax + B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}.$$

求導得:

$$\begin{aligned}(y^*)' &= (2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx)e^{2x}, \\ (y^*)'' &= (4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B)e^{2x}.\end{aligned}$$

將 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程, 提取 e^{2x} 並合併同類項. 根據理論, 二次以上的項必會消掉 (因 λ 為二重根). 整理後僅剩下:

$$(6Ax + 2B)e^{2x} = xe^{2x}.$$

比較係數得

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 2B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{6}, \\ B = 0. \end{cases}$$

得到特解 $y^* = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$. 因此, 所求的通解為

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

例 10.3.25 一個質量為 $m = 1$ kg 的物體連接在彈力常數為 $k = 5$ N/m 的彈簧上, 並受到阻尼係數 $c = 2$ kg/s 的阻力作用. 若系統同時受到一個外加的週期性驅動力 $F(t) = 10 \cos t$ N 作用, 求系統達到穩定後的穩態位移函數 $x_p(t)$.

解 根據牛頓第二運動定律, 系統的位移 $x(t)$ 滿足微分方程:

$$x'' + 2x' + 5x = 10 \cos t.$$

這是右端為第二型的非齊次方程, 其中 $\lambda = 0, \omega = 1$.

齊次方程 $x'' + 2x' + 5x = 0$ 的特徵方程式為 $r^2 + 2r + 5 = 0$, 解得 $r = -1 \pm 2i$. 其通解為 $x_c(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$. 當 $t \rightarrow +\infty$ 時, 齊次解 (暫態解) 衰減至零, 故穩態解完全由特解 $x_p(t)$ 決定.

因為 $\lambda + i\omega = i$ 不是特徵方程的根 (即 $k = 0$), 故設特解為

$$x_p(t) = A \cos t + B \sin t.$$

對其求導:

$$x_p' = -A \sin t + B \cos t, \quad x_p'' = -A \cos t - B \sin t.$$

代入方程得:

$$(-A \cos t - B \sin t) + 2(-A \sin t + B \cos t) + 5(A \cos t + B \sin t) = 10 \cos t.$$

整理並比較同類項係數:

$$\begin{cases} 4A + 2B = 10, \\ -2A + 4B = 0. \end{cases}$$

解得 $B = 1, A = 2$, 故系統的穩態位移函數 (特解) 爲

$$x_p(t) = 2 \cos t + \sin t.$$

(這表示在阻尼存在時, 強迫振動的頻率與驅動力相同, 但會有相位差).

例 10.3.26 求微分方程

$$y'' + y = 2 \sin x$$

的通解.

解 特徵方程式爲 $r^2 + 1 = 0$, 解得特徵根爲 $r_{1,2} = \pm i$. 齊次方程通解爲 $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

方程右端爲 $f(x) = 2 \sin x$, 屬於第二型, 其中 $\lambda = 0, \omega = 1$, 即 $\lambda + i\omega = i$. 由於 i 剛好是特徵方程的單根, 這在物理上對應到「共振」現象. 此時 $k = 1$, 必須在猜測解中多乘上一個 x . 設特解爲

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x),$$

對其求導:

$$\begin{aligned}(y^*)' &= (A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x), \\ (y^*)'' &= 2(-A \sin x + B \cos x) + x(-A \cos x - B \sin x).\end{aligned}$$

代入原方程 $y'' + y = 2 \sin x$, 含有 $x \cos x$ 與 $x \sin x$ 的項會完全抵消, 剩下:

$$2(-A \sin x + B \cos x) = 2 \sin x.$$

比較係數得

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ 2B = 0, \end{cases}$$

解得 $A = -1, B = 0$, 從而求得一個特解爲 $y^* = -x \cos x$.

因此, 所求的通解爲

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x.$$

例 10.3.27 求微分方程

$$y'' - 4y = 8 \cosh 2x$$

的通解.

解 特徵方程式爲 $r^2 - 4 = 0$, 解得特徵根爲 $r_{1,2} = \pm 2$. 齊次通解爲 $Y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

方程右端爲雙曲函數, 利用定義 $\cosh 2x = (e^{2x} + e^{-2x})/2$ 將其展開:

$$f(x) = 8 \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}.$$

根據疊加原理, 將特解拆成兩部分 $y^* = y_1^* + y_2^*$, 分別對應方程右端的兩項.

第一部分: $y_1'' - 4y_1 = 4e^{2x}$. 這裡 $\lambda_1 = 2$, 恰爲特徵方程的單根 ($k = 1$). 設特解爲

$$y_1^* = A x e^{2x}.$$

代入方程求導, 得

$$(y_1^*)'' = (4A + 4Ax)e^{2x},$$

代入得

$$(4A + 4Ax)e^{2x} - 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} = 4e^{2x} \implies A = 1,$$

故 $y_1^* = xe^{2x}$.

第二部分: $y_2'' - 4y_2 = 4e^{-2x}$. 這裡 $\lambda_2 = -2$, 亦為特徵方程的單根 ($k = 1$). 設特解為

$$y_2^* = Bxe^{-2x}.$$

代入方程求導, 得

$$(y_2^*)'' = (-4B + 4Bx)e^{-2x},$$

代入得

$$(-4B + 4Bx)e^{-2x} - 4Bxe^{-2x} = -4Be^{-2x} = 4e^{-2x} \implies B = -1,$$

故 $y_2^* = -xe^{-2x}$.

將兩部分相加, 得到原方程的特解為

$$y^* = xe^{2x} - xe^{-2x} = x(e^{2x} - e^{-2x}) = 2x \sinh 2x.$$

因此, 所求的通解為

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2x \sinh 2x.$$

* 歐拉微分方程

定義 10.3.28 變係數的線性微分方程中, 形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程 (其中 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 為常數), 叫做歐拉方程.

註記 10.3.29 有些特殊的變係數線性微分方程, 可以通過變數代換化為常係數線性微分方程, 因而容易求解, 歐拉方程就是其中的一種.

通常在 $x > 0$ 的範圍內求解 (如果要討論 $x < 0$ 的情形, 可以作變換 $x = -e^t$ 或 $t = \ln(-x)$). 作變換 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 將自變數 x 換成 t , 利用連鎖律, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}.$$

如果採用記號 D 表示對 t 求導的運算 $\frac{d}{dt}$, 那麼上述計算結果可以移項寫成 $xy' = Dy$. 繼續對 x 求高階導數並轉換為對 t 的算子 D , 可以得到:

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y, \\ x^3 y''' &= \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y, \end{aligned}$$

一般地, 有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1) \cdots (D-k+1)y.$$

把這些算子關係式代入歐拉方程, 便得到一個以 t 為自變數的常係數線性微分方程. 在求出這個常係數方程的解後, 把 t 換成 $\ln x$, 即得原歐拉方程的解.

例 10.3.30 求歐拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$$

的通解.

解 作變換 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 利用微分算子代換

$$xy' = Dy, \quad x^2 y'' = D(D-1)y, \quad x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y,$$

原方程化爲

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t}.$$

展開算子並整理, 得

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 3e^{2t}.$$

這是一個以 t 爲自變數的常係數非齊次線性微分方程.

先求對應的齊次方程 $(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0$ 的通解. 其特徵方程式爲

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0 \implies r(r+1)(r-3) = 0,$$

它有三個相異實根: $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$. 於是齊次方程的通解爲

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}.$$

接著求非齊次方程的一個特解 y^* . 右端函數爲 $3e^{2t}$, 屬於指數多項式型, 且 $\lambda = 2$ 不是特徵方程式的根, 故可設特解爲

$$y^* = Ae^{2t}.$$

將其代入非齊次方程 $(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 3e^{2t}$, 提取 e^{2t} 後得

$$(2^3 - 2(2^2) - 3(2))A = 3 \implies -6A = 3,$$

解得 $A = -\frac{1}{2}$. 故特解爲

$$y^* = -\frac{1}{2}e^{2t}.$$

於是, 以 t 爲自變數的常係數方程通解爲

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

最後, 將 $x = e^t$ (即 $t = \ln x$) 代回上式, 即得所給歐拉方程的通解爲

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

10.4 * 微分方程組

定義 10.4.1 前面討論的都是由一個微分方程求解一個未知函數的情形. 但在研究某些實際問題時, 還會遇到由幾個微分方程聯立起來共同確定幾個具有同一自變數的函數的情形. 這些聯立的微分方程稱爲**微分方程組**. 如果微分方程組中的每一個微分方程都是常係數線性微分方程, 那麼, 這種微分方程組就叫做**常係數線性微分方程組**.

註記 10.4.2 對於常係數線性微分方程組, 我們可以採用消去法來求它的解, 具體步驟如下:

- (1) 引入微分算子並代數化: 引入記號 D 表示對自變數求導的運算, 將原方程組寫成關於 D 的算子方程組形式.
- (2) 消元 (降階): 類似於解代數方程組那樣, 透過對算子進行代數運算 (或使用克拉瑪公式), 從方程組中消去一些未知函數及其各階導數, 得到只含有一個未知函數的高階常係數線性微分方程.
- (3) 求解單一函數: 解此高階微分方程, 求出滿足該方程的未知函數 (這時會產生若干個獨立的任意常數).
- (4) 回代求其餘函數: 把已求得的函數代入原方程組或消元過程中得到的關係式. 一般來說, 不必 (也不宜) 再經過積分就可以求出其餘的未知函數. (若再次積分會產生新的任意常數, 從而必須額外加說明這些常數之間互相制約的關係).

(註: 算子行列式 (即係數行列式) 如果是 D 的 n 次多項式, 這就標誌著該微分方程組是 n 階的, 它的通解中一定恰含 n 個獨立的任意常數).

例 10.4.3 解微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 3y + 4z. \end{cases}$$

解 用記號 D 表示 $\frac{d}{dt}$, 則方程組可記作

$$\begin{cases} (D - 2)y - z = 0, \\ -3y + (D - 4)z = 0. \end{cases}$$

這是一個以 t 為自變數的常係數線性微分方程組. 為了消去未知函數 z , 可由第一個方程式得到

$$z = (D - 2)y,$$

這表示 $z = y' - 2y$. 將其代入第二個方程式, 得

$$-3y + (D - 4)((D - 2)y) = 0,$$

展開並整理算子, 得

$$(D^2 - 6D + 8 - 3)y = 0 \implies (D^2 - 6D + 5)y = 0.$$

這是一個二階常係數齊次線性微分方程. 其特徵方程式為

$$r^2 - 6r + 5 = 0 \implies (r - 1)(r - 5) = 0,$$

解得特徵根為 $r_1 = 1, r_2 = 5$. 因此, $y(t)$ 的通解為

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

將 $y(t)$ 代入先前得到的關係式 $z = y' - 2y$ 中, 直接求導而不需要積分:

$$z(t) = D(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) = (C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}) - (2C_1 e^t + 2C_2 e^{5t}) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

於是, 所求微分方程組的通解為

$$\begin{cases} y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ z(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

例 10.4.4 解微分方程組

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = e^{-t}, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = e^t. \end{cases}$$

解 引入算子 D , 寫成代數形式:

$$\begin{cases} (D+1)x + Dy = e^{-t}, \\ (D-1)x + (D-1)y = e^t. \end{cases}$$

試圖消去 y . 可以利用算子行列式的方法, 構造關於 x 的單一微分方程:

$$\begin{vmatrix} D+1 & D \\ D-1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{-t} & D \\ e^t & D-1 \end{vmatrix}.$$

展開左端行列式:

$$((D+1)(D-1) - D(D-1))x = (D^2 - 1 - D^2 + D)x = (D-1)x.$$

展開右端行列式 (注意算子作用在函數上):

$$(D-1)(e^{-t}) - D(e^t) = (-e^{-t} - e^{-t}) - e^t = -2e^{-t} - e^t.$$

於是得到關於 x 的一階常係數非齊次線性方程:

$$\frac{dx}{dt} - x = -2e^{-t} - e^t.$$

該方程對應的齊次方程特徵根為 $r = 1$. 右端函數第一部分 $-2e^{-t}$ 對應 $\lambda = -1$, 故其特解形式為 Ae^{-t} , 代入求得 $A = 1$. 右端第二部分 $-e^t$ 對應 $\lambda = 1$, 為特徵方程的單根, 故特解形式為 Bte^t , 代入 $(Bte^t)' - Bte^t = -e^t \Rightarrow B = -1$. 因此 $x(t)$ 的通解為

$$x(t) = C_1 e^t + e^{-t} - te^t.$$

為求 $y(t)$, 為了避免積分產生多餘常數, 我們觀察原方程組. 將原方程組的第一式減去原第二式, 得

$$2x + y = e^{-t} - e^t \Rightarrow y = -2x + e^{-t} - e^t.$$

將 $x(t)$ 代入, 得

$$\begin{aligned} y(t) &= -2(C_1 e^t + e^{-t} - te^t) + e^{-t} - e^t \\ &= -2C_1 e^t - 2e^{-t} + 2te^t + e^{-t} - e^t \\ &= -(2C_1 + 1)e^t - e^{-t} + 2te^t. \end{aligned}$$

將常數重新記作 $C = -2C_1 - 1$, 以簡化形式, 於是得到通解

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + e^{-t} - te^t, \\ y(t) = -(2C_1 + 1)e^t - e^{-t} + 2te^t. \end{cases}$$

(這組解中僅含有一個獨立任意常數 C_1 , 因為系統的算子行列式為 $D-1$, 其為一次多項式, 標誌著該系統為一階.)

例 10.4.5 解微分方程組

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + y = e^t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + x = 0. \end{cases}$$

解 引入微分算子 $D = \frac{d}{dt}$, 將原方程組寫成算子形式:

$$\begin{cases} D^2x + y = e^t, \\ x + D^2y = 0. \end{cases}$$

由第二條方程式可以直接得到 x 與 y 的關係式:

$$x = -D^2y.$$

將其代入原方程組第一式中, 消去 x , 得到只含 y 的常係數線性微分方程:

$$D^2(-D^2y) + y = e^t \implies (-D^4 + 1)y = e^t,$$

即

$$(D^4 - 1)y = -e^t.$$

這是一個四階常係數非齊次線性微分方程. 先求對應的齊次方程 $(D^4 - 1)y = 0$ 的通解. 其特徵方程式為

$$r^4 - 1 = 0 \implies (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0,$$

解得四個特徵根: $r_1 = 1, r_2 = -1, r_{3,4} = \pm i$. 於是齊次方程的通解為

$$Y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

接著求非齊次方程的一個特解 y^* . 方程右端函數為 $-e^t$, 屬於第一型, 對應 $\lambda = 1$. 因為 $\lambda = 1$ 是特徵方程式的一個單實根 ($k = 1$), 所以我們應設特解為

$$y^* = Ate^t.$$

對其連續求導四次 (可利用萊布尼茲法則或觀察規律):

$$\begin{aligned} (y^*)' &= A(t+1)e^t, \\ (y^*)'' &= A(t+2)e^t, \\ (y^*)''' &= A(t+3)e^t, \\ (y^*)^{(4)} &= A(t+4)e^t. \end{aligned}$$

將 y^* 與 $(y^*)^{(4)}$ 代入方程 $(D^4 - 1)y = -e^t$ 中, 得

$$A(t+4)e^t - Ate^t = -e^t \implies 4Ae^t = -e^t \implies A = -\frac{1}{4}.$$

故特解為 $y^* = -\frac{1}{4}te^t$.

從而求得 $y(t)$ 的通解為

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - \frac{1}{4}te^t.$$

爲了求 $x(t)$, 將 $y(t)$ 代回前面得到的關係式 $x = -D^2y = -y''$. 注意這裡只需要直接求導而不用積分, 可避免產生多餘的常數. $y(t)$ 的二階導數爲

$$y''(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t - \frac{1}{4}(t+2)e^t.$$

於是, 加上負號即可得 $x(t)$:

$$x(t) = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{1}{4}(t+2)e^t.$$

(註: 原系統的算子行列式爲

$$\begin{vmatrix} D^2 & 1 \\ 1 & D^2 \end{vmatrix} = D^4 - 1,$$

它是 D 的四次多項式, 這標誌著該微分方程組是四階的, 故通解中確實應含有四個獨立的任意常數).

綜上所述, 該微分方程組的通解爲

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{1}{4}(t+2)e^t, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - \frac{1}{4}te^t. \end{cases}$$

10.5 * 微分方程式的冪級數解

說明 在許多實際問題中, 我們常會遇到無法用初等函數有限次組合來表示通解的微分方程. 此時, 假設方程的解可以展開爲冪級數, 並透過比較係數來求得級數的各項係數, 是一種非常有效且基本的方法.

(1) 一階微分方程的冪級數解: 對於一階微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

滿足初值條件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解, 如果函數 $f(x, y)$ 可在點 (x_0, y_0) 的鄰域內展開爲 $(x - x_0)$ 與 $(y - y_0)$ 的多項式或冪級數, 那麼可以設所求特解可展開爲 $x - x_0$ 的冪級數:

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是待定的係數. 將此級數及其導數代入原方程中, 比較兩端 $(x - x_0)$ 的同次冪的係數, 即可定出常數 a_n , 從而得到方程的特解.

(2) 二階齊次線性微分方程的冪級數解: 對於二階齊次線性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

有如下重要定理:

如果係數 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 可在 $-R < x < R$ 內展開爲 x 的冪級數, 那麼在 $-R < x < R$ 內方程必定有形如

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

的解. (證明略.)

求解步驟爲: 將上式逐項求導得到 y' 及 y'' 的級數展開式, 將它們代入方程中, 合併 x 的同次冪項, 並令各項的係數爲零, 即可得到各待定係數 a_n 所滿足的遞迴關係式 (遞推公式).

例 10.5.1 求方程

$$\frac{dy}{dx} = -y - x$$

滿足 $y|_{x=0} = 2$ 的特解.

解 這時 $x_0 = 0, y_0 = 2$. 設方程的特解為

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

對其求導, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots.$$

將 y 及 y' 的冪級數展開式代入原方程, 得

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = -2 - (a_1 + 1)x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n - \cdots.$$

上式為恆等式, 比較上式兩端 x 的同次冪的係數, 得

$$a_1 = -2, \quad 2a_2 = -(a_1 + 1), \quad 3a_3 = -a_2, \quad n a_n = -a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

故解得

$$a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad \dots$$

由數學歸納法可得一般項為

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n!} \quad (n \geq 2).$$

於是, 得到特解

$$\begin{aligned} y &= 2 - 2x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 - x + \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n + \cdots\right) \\ &= 1 - x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + e^{-x}. \end{aligned}$$

例 10.5.2 (愛里方程) 求微分方程 $y'' - xy = 0$ 滿足初值條件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 這裡 $P(x) = 0, Q(x) = -x$ 在整個數軸上滿足定理的條件, 因此所求的解可在整個數軸上展開成 x 的冪級數:

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

由條件 $y|_{x=0} = 0$, 得 $a_0 = 0$. 對級數逐項求導, 有

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots.$$

由條件 $y'|_{x=0} = 1$, 得 $a_1 = 1$. 於是所求特解 y 及 y' 的展開式成為

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

$$y' = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots.$$

再次逐項求導, 得

$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots.$$

把 y 和 y'' 代入所給方程 $y'' - xy = 0$, 並按 x 的升冪集項, 得

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n = 0.$$

因為上式是恆等式, 所以左端各項的係數必全為零, 於是有

$$2a_2 = 0 \implies a_2 = 0,$$

以及一般遞迴關係式

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \implies a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

從這遞迴公式可以推得: 當 $n = 1, 4, 7, \dots, 3m-2$ 時:

$$a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2} = 0, \quad a_6 = 0, \quad \dots, \quad a_{3m} = 0.$$

當 $n = 2, 5, 8, \dots, 3m-1$ 時:

$$a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4 \cdot 3}, \quad a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \quad \dots, \quad a_{3m+1} = \frac{1}{(3m+1)3m \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$

當 $n = 3, 6, 9, \dots, 3m$ 時:

$$a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad a_8 = 0, \quad \dots, \quad a_{3m+2} = 0.$$

於是, 所求的特解為

$$y = x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^{3m+1}}{(3m+1)3m \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots.$$

例 10.5.3 用冪級數法求方程 $y'' + y = 0$ 滿足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$ 的特解.

解 設特解為 $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. 由初始條件 $y|_{x=0} = 1$, 得 $a_0 = 1$; 由 $y'|_{x=0} = 0$, 得 $a_1 = 0$. 對級數求二次導數, 得

$$y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

將 y 和 y'' 代入原方程 $y'' + y = 0$, 合併同次冪項得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n)x^n = 0.$$

比較係數得遞迴關係:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \quad (n \geq 0).$$

由 $a_0 = 1$, 對偶數項有:

$$a_2 = -\frac{1}{2!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4!}, \quad \dots, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

由 $a_1 = 0$, 對奇數項有:

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad \dots, \quad a_{2k+1} = 0.$$

於是, 特解的級數展開式為

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

這正是函數 $y = \cos x$ 的泰勒級數展開, 故所求特解為 $y = \cos x$.

10.6 * 全微分方程

定義 10.6.1 一個微分方程寫成

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

的形式後, 如果它的左端恰好是某個函數 $u(x, y)$ 的全微分:

$$du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

那麼方程就叫做**全微分方程**或**正合微分方程**. 容易知道, 如果方程的左端是函數 $u(x, y)$ 的全微分, 那麼

$$u(x, y) = C$$

就是全微分方程的隱式通解, 其中 C 是任意常數.

註記 10.6.2 當 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 在單連通域 G 內具有一階連續偏導數時, 方程成為全微分方程的充要條件是

$$P'_y = Q'_x$$

在區域 G 內恆成立. 而且, 當此條件滿足時, 全微分方程的通解可透過選定 G 內適當的定點 $M_0(x_0, y_0)$ 進行曲線積分求出:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t) ds + Q(s, t) dt = C.$$

例 10.6.3 求解方程

$$(3x^2y + 2y^2) dx + (x^3 + 4xy + 4y^3) dy = 0.$$

解 (解一) 設 $P(x, y) = 3x^2y + 2y^2$, $Q(x, y) = x^3 + 4xy + 4y^3$, 計算偏導數可得

$$P'_y = 3x^2 + 4y, \quad Q'_x = 3x^2 + 4y.$$

因為 $P'_y = Q'_x$ 在全平面上恆成立, 所以所給方程是全微分方程.

利用曲線積分公式, 取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 沿著平行於坐標軸的折線積分, 有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3s^2t + 2t^2) ds + (s^3 + 4st + 4t^3) dt \\ &= \int_0^x P(s, 0) ds + \int_0^y Q(x, t) dt \\ &= \int_0^x 0 ds + \int_0^y (x^3 + 4xt + 4t^3) dt \\ &= x^3y + 2xy^2 + y^4. \end{aligned}$$

於是, 方程的通解爲

$$x^3y + 2xy^2 + y^4 = C.$$

解 (解二) 同解一, 驗證 $P'_y = Q'_x$ 可知其爲全微分方程.

除了利用曲線積分公式以外, 還可以用偏積分的方法求解全微分方程. 因爲要求的方程通解爲 $u(x, y) = C$, 其中 $u(x, y)$ 必須滿足

$$u'_x = 3x^2y + 2y^2,$$

故將其對 x 積分 (將 y 視爲常數), 得

$$u(x, y) = \int (3x^2y + 2y^2) dx = x^3y + 2xy^2 + \varphi(y),$$

這裡 $\varphi(y)$ 是以 y 爲自變數的待定函數. 由此對 y 求偏導數, 得

$$u'_y = x^3 + 4xy + \varphi'(y).$$

又 $u(x, y)$ 必須滿足

$$u'_y = Q(x, y) = x^3 + 4xy + 4y^3.$$

故比較兩式可得

$$x^3 + 4xy + \varphi'(y) = x^3 + 4xy + 4y^3 \implies \varphi'(y) = 4y^3 \implies \varphi(y) = y^4 + C_1.$$

所以, 所給方程的通解爲

$$x^3y + 2xy^2 + y^4 = C.$$

參考資料

- [1] Antonio Galbis, Manuel Maestre, *Vector Analysis Versus Vector Calculus*. Springer.
- [2] Saturnino L. Salas, Einar Hille, and Garret J. Etgen. *Calculus: One and Several Variables*. 10th ed. John Wiley & Sons, 2006.
- [3] James Stewart, Daniel K. Clegg, and Saleem Watson. *Calculus: Early Transcendentals, Metric Edition*. 9th ed. Cengage Learning, 2021.
- [4] George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir, and Joel Hass. *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*. 13th ed. Pearson, 2014.
- [5] 同济大学数学系編, 高等数学下册. 第七版. 高等教育出版社, 2014.
- [6] Vladimir A. Zorich. 数学分析 (第一卷). 李植譯. 原標題: *Mathematical Analysis by V. A. Zorich (Part I, 7th expanded edition)*. 高等教育出版社, 2019.
- [7] Tom M. Apostol. 数学分析. 邢富冲, 邢辰, 李松洁, 贾婉丽譯. 原標題: *Mathematical Analysis, Second Edition*. 机械工业出版社, 2006.
- [8] 黒田紘敏. 微分積分学入門. URL: https://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf.
- [9] 仙女國公主. 單變數微積分. 網址: https://timomath.com/single_variable_calculus_zh-tw.pdf.
- [10] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (下册). 第 1 版. 高等教育出版社, 2003.
- [11] 伍胜健. 数学分析 (第三册). 第 1 版. 北京大学出版社, 2010.