重積分化為累次積分、累次積分的換序

仙女國公主

最後編輯: 2026 年 1 月 5 日

本文將舉一些例子來說明如何單靠解不等式的技巧來進行累次積分積分換序的操作, 並且在某些例子中順道附上大家常見的「畫圖換序法」來「驗證」此方法的可行性. 我們先從簡單的二重積分開始, 再來挑戰三重積分. 本文所寫下的內容只爲了清楚表達自己的想法, 一般上在正式的過程中不必如此長篇大論. 本文中, 一律假設函數 f(不論作爲雙變數函數還是三變數函數) 均滿足傅比尼定理的使用條件.

基本操作 步驟一: 先確認各變數所能涵蓋的「最大」範圍. 注意, 由於可能受到邊界形狀的限制, 各變數不一定能「同時」取得這裡所謂的最大範圍的邊界. 方法大致爲: 各邊界的方程式任取兩條方程湊成一組方程組, 並解之, 所有可能組合都要考慮到.

步驟二: 確定積分順序, 比如說先對 x 積分, 再對 y 積分, 最後再對 z 積分.

步驟三: 最後一個積分變數 (z) 的範圍即爲步驟一中所確定的最大範圍, 此時將 z 固定爲該範圍內任意一數 z.

步驟四: 確定最後第二個積分變數 (y) 與定數 z 所滿足的不等關係. 注意此時我們要的 y 的積分範圍不能與其他變數 (如 x) 有關. 固定 $y = y$.

步驟五: 依此類推, 對於下一個積分變數, 重複如上一個步驟的操作, 並且秉持著「只能與之前步驟所固定下來的變數有關係」的原則, 寫出其與該些變數有關的不等式, 直到最後一個變數 (x).

例 1 將重積分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ 寫成累次積分的形式, 其中 D 是由直線 $y=1$、$x=-1$ 及 $y=x$ 所圍成的閉區域.

解 步驟一: 先確認各變數所能涵蓋的最大範圍. 解各不等式組:

$$\begin{cases} y = x, \\ x = -1, \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1, \\ y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x, \\ y = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

故得最大可能範圍爲 $\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 1. \end{cases}$

步驟二: 確定積分次序, 我們先考慮「先 y 再 x」, 過後再試試反過來的次序.

步驟三: 固定 $x = x \in [-1,1]$, 要確定 y 的範圍. 首先, D 的邊界中, 只有 $y=x$ 和 $y=1$ 與 y 有關, 此時需要確定不等式 ___ $\le y \le$ ___ 中的上下限各應對應哪條邊界線. 因爲 $\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le y \le 1, \end{cases}$ 即 y 一定會不超過 1, 而固定的 x 嚴格小於 1, 所以在固定了 $x \in [-1,1]$ 之後, 對於 y 的邊界 $y=x$ 及 $y=1$, 顯然有 $x \le y \le 1$ 作爲 y 的「嚴格」範圍.

步驟四: 由上述步驟, 有

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x \le y \le 1, \end{cases}$$

故可將重積分寫成累次積分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

註記 如果「先 x 再 y」, 並且使用上述操作的話, 會有

$$\begin{cases} -1 \le x \le y, \\ -1 \le y \le 1, \end{cases}$$

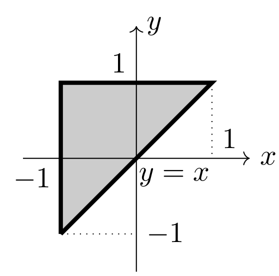
由此可寫出相應的累次積分. 但如果已經有了 $\int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, 那麼我們可以由此直接得到連鎖不等式

$$-1 \le x \le y \le 1.$$

從上述連鎖不等式中, 可以直接看出 y 的「嚴格」範圍及 x 的「最大」範圍, 由此交換累次積分的積分次序:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下附上大家最熟悉的圖:



例 2 將重積分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ 寫成累次積分的形式, 其中 D 是由拋物線 $y = x^2$ 和直線 $y = x + 2$ 所圍成的區域.

解 先確認各變數所能涵蓋的最大範圍. 解不等式:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = x^2, \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1, \\ y = 2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

當 $-1 \le x \le 2$ 時, 由 $y = x^2$ 得 $0 \le y \le 4$, 由 $y = x + 2$ 得 $1 \le y \le 4$. 於是, 最大可能範圍爲

$$\begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 4. \end{cases}$$

- 考慮「先 x 後 y」之積分順序. 固定 $y\in[0,4]$, 當我們想要在不等式「___ $\le x\le$ ___」中填入上、下界時, 發現有三條邊界限制 x:

$$x=y-2,\quad x=\sqrt{y},\quad x=-\sqrt{y}.$$

稍作簡單又快速的分析: 當 $0\le y\le 4$ 時, $-\sqrt{y}$ 恆非正, 而 $x=y-2$ 有正有負, 而 $\sqrt{y}$ 恆正. 因為 $\sqrt{y}-(y-2)=\underbrace{(2-\sqrt{y})}_{\ge 2-\sqrt{4}=0}\underbrace{(1+\sqrt{y})}_{\ge 1+\sqrt{0}>0}\ge 0$, 所以 $\sqrt{y}\ge y-2$. 另一方面, 恆有 $\sqrt{y}\ge-\sqrt{y}$. 於是,

$$\max\{-\sqrt{y},y-2\}\le x\le\sqrt{y}.$$

令 $-\sqrt{y}=y-2$, 容易解得 $y=1$, 於是

  - 當 $0\le y\le 1$ 時, $y-2\le-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}$;
  - 當 $1\le y\le 4$ 時, $-\sqrt{y}\le y-2\le x\le\sqrt{y}$.

因此,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- 考慮「先 y 後 x」之積分順序. 固定 $x\in[-1,2]$, 欲在不等式「___ $\le y\le$ ___」中填入上、下界. 注意到

$$x+2-x^2=\underbrace{(2-x)}_{\ge 2-2=0}\cdot\underbrace{(1+x)}_{\ge 1+(-1)=0}\ge 0,$$

所以當 $-1\le x\le 2$ 時, 恆有 $x+2\ge x^2$. 因此 $x^2\le y\le x+2$, 從而

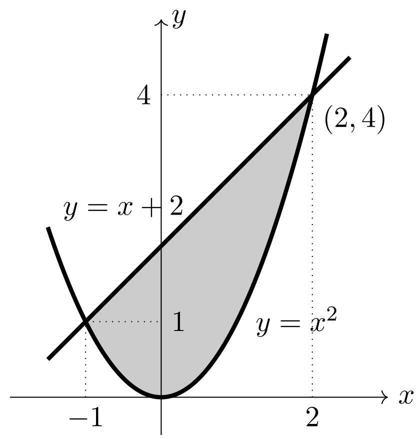
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

註記 如果我們先有「先 x 後 y」之積分順序, 想要直接由此交換積分順序, 其實一點都不難! 從目前有的資訊求出 y 的最大可能範圍, 以及 x 的所有嚴格限制, 操作如下:

$$\begin{cases}-1\le x\le 2,\\ x^2\le y\le x+2,\end{cases}\implies\begin{cases}-1\le x\le 2,\\ y\le x+2\le 4,\\ 0\le x^2\le y,\end{cases}\implies\begin{cases}-1\le x\le 2,\\ 0\le y\le 4,\\ x\ge y-2,\\ -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y},\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}0\le y\le 4,\\ \max\{-\sqrt{y},y-2\}\le x\le\sqrt{y}.\end{cases}$$

接著只需要劃分區間討論 $-\sqrt{y}$ 和 $y-2$ 的大小關係便可. 大家若使用傳統的畫圖法, 便會得到以下圖形:



接下來考慮可能需要變數變換的例子.

例 3 設 D 是由圓弧 $x^2+y^2=2$ $(x\geq 1, y\geq 0)$、直線 $x=1$ 及 x 軸圍成的區域, 計算重積分

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}.$$

解 首先, 作變數變換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r\geq 0).$$

現把各邊界的方程求出:

- $x^2+y^2=2 \implies r^2=2 \implies r=\sqrt{2}$;
- $x=1 \implies r\cos\theta=1 \implies r=\sec\theta$;
- $y=0 \implies r\sin\theta=0 \implies \sin\theta=0$, 由 $x\geq 1$, 知可取 $\theta=0$.

接著, 例行求各組邊界的交點:

$$\begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ r=\sec\theta, \end{cases} \implies \begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \implies \begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \theta=\frac{\pi}{4} \quad (\text{因}\, y\geq 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{2}, \\ \theta=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sec\theta, \\ \theta=0, \end{cases} \implies \begin{cases} r=1, \\ \theta=0. \end{cases}$$

由此, 可得「最大」範圍爲

$$\begin{cases} 1\leq r\leq\sqrt{2}, \\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

接下來要決定積分順序, 但一般上極座標系下的重積分都是採「先 r 再 θ」, 所以不必煩惱. 固定 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 現要找 r 的「嚴格」範圍. 由於 r 的邊界只有 $r=\sqrt{2}$ 及 $r=\sec\theta$, 因此只需在 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ 之範圍下確定它們的大小關係即可. 不難看出

$$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4} \implies \cos\frac{\pi}{4}\leq\cos\theta\leq\cos 0 \implies 1\leq\sec\theta\leq\sqrt{2},$$

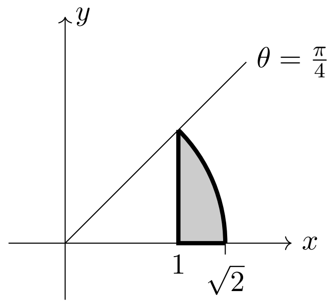
故

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \\ \sec\theta \le r \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

記 D 在變數變換後的像爲 S, 故所求積分爲

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = \iint_S \frac{r\mathrm{d}(r,\theta)}{(r^2+1)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\theta}^{\sqrt{2}} \frac{r}{(r^2+1)^{3/2}} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2-\sqrt{3}}{12}\pi.$$

以下附上大家最喜歡的圖, 看看上述推論有沒有和由作圖法得到的積分範圍一致:



接下來要開始上強度了.

例 4 計算 $\iint_D |\cos(x+y)| \,\mathrm{d}(x,y)$, 其中 D 由 $y=x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 所圍成.

這題雖然區域不複雜, 但特別之處在於, 即使寫出累次積分了, 也會因爲被積函數是分段函數 (含絕對值) 而無法直接計算, 必須要拆掉絕對值才有辦法計算.

解 根據之前的經驗, 可以快速得到各變數的「最大」範圍爲 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. 於是, $0 \le x+y \le \pi$ (確認一下, 因爲有邊界點 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 所以這個範圍邊界當然一定取得到). 又

$$\cos(x+y) \begin{cases} > 0, & 0 \le x+y < \frac{\pi}{2}; \\ = 0, & x+y = \frac{\pi}{2}; \\ < 0, & \frac{\pi}{2} < x+y \le \pi, \end{cases}$$

故 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 即爲用來拆絕對值的分界線. 現在可將 D 分成不重疊[1]的兩個區域 D_1, D_2, 其中它們的「邊界」[2]如下:

$$D_1 : \begin{cases} y = x, \\ y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x+y = \frac{\pi}{2} \quad \left(x+y \le \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} y = x, \\ y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}, \\ x+y = \frac{\pi}{2} \quad \left(x+y \ge \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

現在來一如既往地求各「邊界」的交點. 考察 D_1, 形式上會解得四個交點:

$$(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

[1]所謂兩集合**不重疊**是指它們的開核 (interior; 又稱內部、內域) 相離. 此處 D_1 和 D_2 的開核確實相離, 但邊界相交.

[2]此處是爲方便起見, 才使用左大括號來表示區域的所有邊界及條件, 實際上這是在符號濫用.

而對於 D_1 來說, 我們要求 $x+y \le \frac{\pi}{2}$, 所以 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 不會是 D_1 要考慮的點. 於是在這 D_1 中, 各變數的「最大」範圍爲

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

現在要寫出 D_1 上的積分範圍. 固定 $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 注意到 x 受到如下「邊界條件」限制:

$$x = y, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x \le \frac{\pi}{2} - y,$$

於是稍微比較一下各邊界的序關係, 可得

$$\begin{cases} y \le x \le \frac{\pi}{2} - y, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

考察 D_2, 形式上也會求得 (1) 四個交點. 而對於 D_2 來說, 我們要求 $x+y \ge \frac{\pi}{2}$, 所以 $(0,0)$ 不會是 D_2 要考慮的點. 於是在 D_2 中, 各變數的「最大」範圍爲

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

現在來寫出 D_2 上的積分範圍. 固定 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 注意到 y 受到如下「邊界條件」限制:

$$x = y, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x \ge \frac{\pi}{2} - y,$$

於是稍微比較一下各邊界的序關係, 可得

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - x \le y \le x. \end{cases}$$

現在可以來寫出累次積分並計算了:

$$\begin{aligned} \iint_D |\cos(x+y)| \, \mathrm{d}(x,y) &= \iint_{D_1} |\cos(x+y)| \, \mathrm{d}(x,y) + \iint_{D_2} |\cos(x+y)| \, \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x} (-\cos(x+y)) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

非常鼓勵讀者模仿上述論證手法自行嘗試寫出「D_1 中先 y 再 x」以及「D_2 中先 x 再 y」的積分範圍ㄛ! 下面我們要來嘗試由上述結果練習直接交換積分次序的操作.

對於 D_1, 有

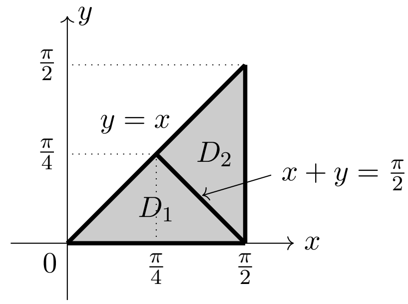
$$\begin{cases} y \le x \le \frac{\pi}{2} - y, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}, \end{cases} \implies \begin{cases} {\color{red}0 \le} {\color{blue}y \le} x {\color{green}\le \frac{\pi}{2} - y} {\color{red}\le \frac{\pi}{2}}, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}, \end{cases} \implies \begin{cases} {\color{red}0 \le x \le \frac{\pi}{2}}, \\ {\color{blue}0 \le y \le x}, \\ {\color{green}y \le \frac{\pi}{2} - x}, \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le y \le \min\left\{x, \frac{\pi}{2} - x\right\}, \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ 0 \le y \le x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x, \end{cases}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_y^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{x}\cos(x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

對於 D_2 也可用類似的方法討論. 以下給出作圖法會用到的圖以供對照:



例 5 設平面區域 D 由曲線 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ 與 x 軸圍成, 計算重積分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}(x,y)$.

解 這種題目很明顯, 不論是直接畫圖還是想要直接討論各變數的最大範圍, 都令人難以招架. 根據該曲線的形式, 很自然會想到採極座標代換, 故令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\geq 0$, 並記 D 在變數變換後的像集爲 S.[3] 現寫出 S 的「邊界」[4]:

$$\begin{cases}\left(r^2\right)^2=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta,\\ r\cos\theta\geq 0,\\ r\sin\theta\geq 0,\\ r\sin\theta=0\quad(x\text{ 軸}),\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r^2=\cos 2\theta,\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\\ \sin\theta=0,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r^2=\cos 2\theta,\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\\ \theta=0.\end{cases}$$

由 $\cos 2\theta=r^2\geq 0$ 得 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$, 故實際上 θ 的最大範圍應爲 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$. 又顯然有 $0\leq r\leq\sqrt{\cos 2\theta}$, 因此

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\mathrm{d}(x,y)&=\iint_S r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}(r,\theta)=\iint_S r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}(r,\theta)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

要準備邁向三重積分了, 小朋友, 你準備好了嗎! 不過我們不會舉太多從題目給的邊界去解出範圍的例子, 而主要著重在「已知一個累次積分並由此直接由此換序」的練習.

例 6 設 Ω 爲由柱面 $y=x^2$、平面 $z=y$、$y=4$ 以及 xy 平面所圍成的立體區域, 試將 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ 寫成六種三次積分的形式.

解 由 $y=x^2\geq 0$ 及 $y=4$ 得知 Ω 中必有 $0\leq y\leq 4$. 又 $z=y$ 及 $z=0$ (xy 平面) 這兩個條件告訴我們 $0\leq z\leq y\leq 4$. 而 $x^2=y\leq 4$ 可解得 $-2\leq x\leq 2$ (當然, 請自行確認或驗證各範圍的邊界點在 Ω 中

[3]從該曲線的極座標方程可容易看出, 其圖形爲雙紐線.

[4]此處也是爲方便起見, 才使用左大括號來表示區域的所有邊界及條件, 實際上這是在符號濫用.

眞的會達到). 因此, 有

$$\begin{cases} 0 \le x^2 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le y \le 4, \\ -2 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 4, \\ 0 \le z \le 4. \end{cases}$$

(其實此不等式組的前兩條連鎖不等式已蘊含了後三條, 但爲了接下來討論能一目了然地看出各變數的最大範圍, 所以才列出來.)

(1) 考慮積分順序「$x \to y \to z$」. 固定 $z \in [0,4]$, 則 $z \le y \le 4$ (記得「不能選取含未固定好的變數寫在邊界」的原則, 所以此處不選 $x^2 \le y \le 4$). 又由 $x^2 \le y$ 推得 $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$. 因此,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_z^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 考慮積分順序「$x \to z \to y$」. 固定 $y \in [0,4]$, 則 $0 \le z \le y$. 又由 $x^2 \le y$ 推得 $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$. 因此

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

(3) 考慮積分順序「$z \to y \to x$」. 固定 $x \in [-2,2]$, 則 $x^2 \le y \le 4$. 又有 $0 \le z \le y$, 因此

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

(4) 考慮積分順序「$z \to x \to y$」. 固定 $y \in [0,4]$, 則由 $0 \le x^2 \le y$ 得 $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$. 又 $0 \le z \le y$, 因此

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

(5) 考慮積分順序「$y \to z \to x$」. 固定 $x \in [-2,2]$, 再固定 $z \in [0,4]$. 因爲 $\max\{x^2, z\} \le y \le 4$, 所以需要討論 x 和 z 的大小關係. 由於 x 已固定, 所以 $0 \le x^2 \le 4$, 即點 x^2 將 z 的範圍 $[0,4]$ 劃分成兩個部分. 當 $x^2 \ge z (\ge 0)$ 時, $x^2 \le y \le 4$; 當 $x^2 \le z (\le 4)$ 時, $z \le y \le 4$. 因此,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-2}^2 \int_0^4 \int_{\max\{x^2,z\}}^4 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{x^2} \int_{x^2}^4 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_z^4 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(6) 考慮積分順序「$y \to x \to z$」. 固定 $z \in [0,4]$, 再固定 $x \in [-2,2]$. 因爲 $\max\{x^2, z\} \le y \le 4$, 所以需要討論 x 和 z 的大小關係. 由於 z 已固定, 所以 $0 \le z \le 4$, 即點 $\sqrt{z}$ 將 x 的範圍 $[-2,2]$ 劃分成三個部分: $[-2,2] = [-2,-\sqrt{z}] \cup [-\sqrt{z},\sqrt{z}] \cup [\sqrt{z},2]$.

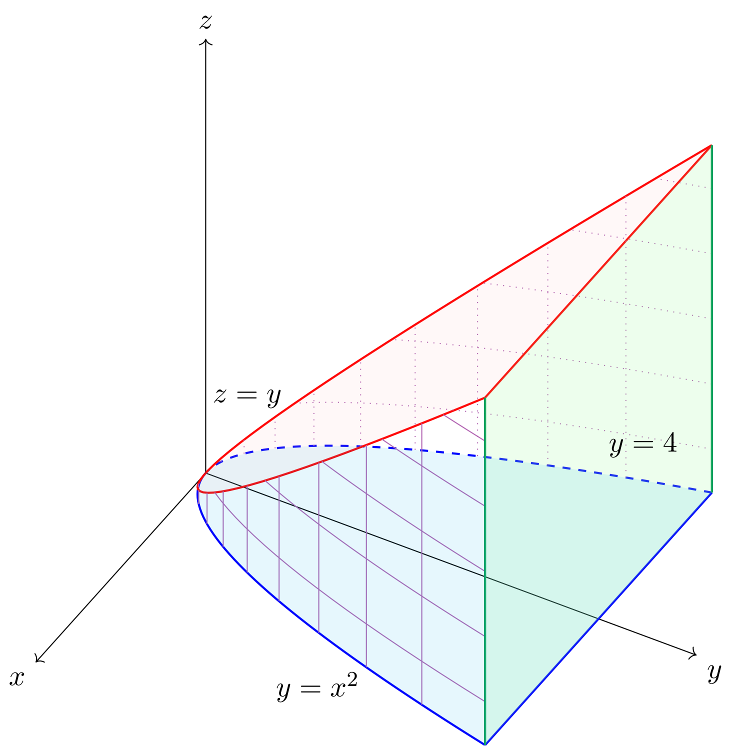
x 的範圍	$-2 \le x \le -\sqrt{z}$	$-\sqrt{z} \le x \le \sqrt{z}$	$\sqrt{z} \le x \le 2$
x^2 與 z 的比較	$z \le x^2$	$z \ge x^2$	$z \le x^2$
y 的嚴格範圍	$x^2 \le y \le 4$	$z \le y \le 4$	$x^2 \le y \le 4$

因此,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_{-2}^2 \int_{\max\{x^2,z\}}^4 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^4 \int_{-2}^{-\sqrt{z}} \int_{x^2}^4 f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_z^4 f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \int_0^4 \int_{\sqrt{z}}^2 \int_{x^2}^4 f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

讀者不妨從其中任意一個積分順序結果用熟悉的作圖法推出其他積分順序的範圍來驗證是否與此結論吻合. 下圖爲大家最喜歡的立體圖:



來看看比較簡單一點的題目吧!

例 7 設 Ω 由平面 $x=0$, $y=0$, $x=z$, $y=z$ 及 $z=1$ 圍成, 試將重積分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ 化爲六個三次積分.

解 先來找到所有不等式:

- 從 $x=z, z=1, x=0$ 這三條方程式可看出 $0 \le x \le z \le 1$.
- 從 $y=0, y=z, y=1$ 這三條方程式可看出 $0 \le y \le z \le 1$.

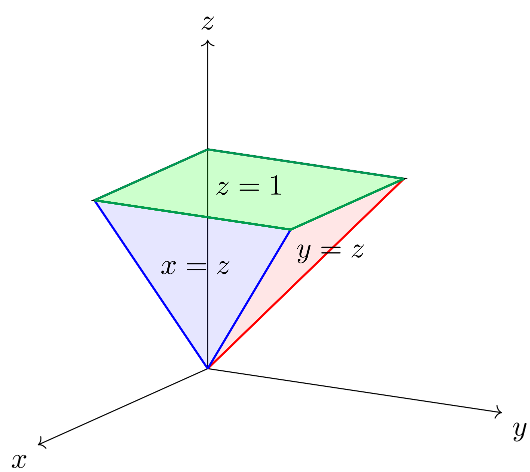
於是, 有如下的變數關係與最大範圍:

$$\begin{cases} 0 \le x \le z, \\ 0 \le y \le z, \\ \max\{x, y\} \le z \le 1, \end{cases} \qquad \text{及} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

有了上述資訊, 不難寫出各個積分順序的累次積分:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^z f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^z f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^z f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1 \int_y^1 \int_x^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^x \int_x^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_x^1 \int_y^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

以下爲本題立體圖, 相信沒什麼幫助:



例 8 設 Ω 爲由單葉雙曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 以及平面 $z=\sqrt{3}$、$z=0$ 所圍成的立體區域, 試將重積分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ 寫成在直角坐標系下之「先對 x、次對 y、最後對 z」以及在柱坐標系下的三次積分.

解 (直角坐標系) 顯然有 $0 \le z \le \sqrt{3}$. 另一方面, 不難看出 x^2+y^2 的下界爲 0, 上界受曲面 $x^2+y^2=z^2+1$ 限制, 故只要固定 $z \in [0, \sqrt{3}]$, 並記 $\Omega_z = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1+z^2\}$, 則可寫出「先二重積分、後定積分」的累次積分:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\sqrt{3}} \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\mathrm{d}z.$$

接下來要把內部的二重積分化為累次積分. 因為在 Ω_z 中,

$$0 \le y^2 \le 1+z^2-x^2 \le 1+z^2 \implies -\sqrt{1+z^2} \le y \le \sqrt{1+z^2},$$

且對於 Ω 的邊界的一部分[5]

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2+1, \\ x=0, \end{cases}$$

均有 $y=\pm\sqrt{1+z^2}$, 所以 y 在 (截面) Ω_z 中的最大範圍為 $-\sqrt{z^2+1} \le y \le \sqrt{z^2+1}$. 固定 $y \in \left[-\sqrt{z^2+1}, \sqrt{z^2+1}\right]$, 不難求出 x 的範圍:

$$0 \le x^2 \le z^2-y^2+1 \implies -\sqrt{z^2-y^2+1} \le x \le \sqrt{z^2-y^2+1}.$$

因此,

$$\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\sqrt{z^2+1}}^{\sqrt{z^2+1}} \int_{-\sqrt{z^2-y^2+1}}^{\sqrt{z^2-y^2+1}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

從而

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{z^2+1}}^{\sqrt{z^2+1}} \int_{-\sqrt{z^2-y^2+1}}^{\sqrt{z^2-y^2+1}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 (柱坐標系) 同上述討論, 有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\sqrt{3}} \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_z = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1+z^2\right\}$. 令

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad (0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi),$$

則

$$0 \le x^2+y^2 \le 1+z^2 \iff 0 \le r^2 \le 1+z^2,$$

由此可得 r 在固定了 z 後的最大範圍爲 $0 \le r \le \sqrt{1+z^2}$. 另一方面, Ω 對 θ 沒有限制, 並且 $(r,\theta) \in \left(0, \sqrt{1+z^2}\right] \times [0, 2\pi)$ 與 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 之間有一一對應關係, 所以 θ 的最大範圍爲 $0 \le \theta \le 2\pi$.[6] 因此, 若記 D_z 在極座標 (柱坐標) 變換之下的像集爲 S_z, 則

$$\begin{aligned} &\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{S_z} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,\mathrm{d}(r,\theta) \\ =& \int_0^{\sqrt{z^2+1}} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z^2+1}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

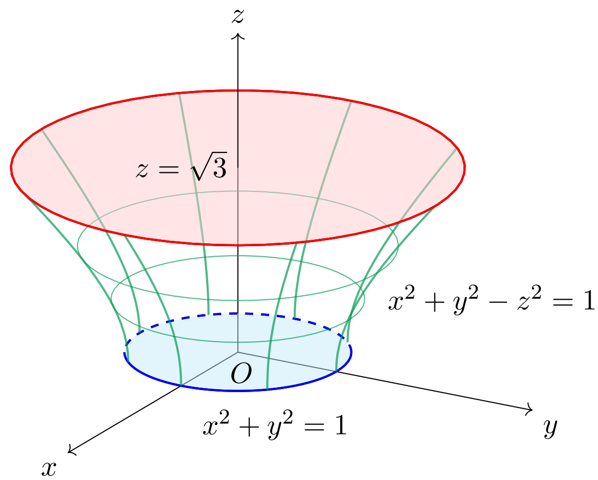
因此,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z^2+1}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

以下爲本題示意圖:

[5] 此爲側面的某兩條經線.

[6] 不難看出 r^2 的上界 $r^2 = 1+z^2$ 是一個中心在原點、半徑為 $\sqrt{1+z^2}$ 的圓.



例 9 將累次積分

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

寫成其他五種三次積分.

本題不等式法的解答直接略去文字說明, 讓大家看看如果不畫圖應該要怎麼寫下過程. 找出所有變數的最大範圍及嚴格範圍的部分還很貼心地爲你用顏色標註相關的不等式的來源, 要記得心存感激!

解 (不等式法)

$$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2},\\ 0\le z\le\sqrt{x},\end{cases}\implies\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\le 1,\\ 0\le z\le\sqrt{x}\le 1,\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}0\le z^2\le x\le \sqrt{1-y^2}\le 1,\\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-z^4}\le 1,\\ 0\le z\le\sqrt{x}\le\sqrt[4]{1-y^2}\le 1.\end{cases}$$

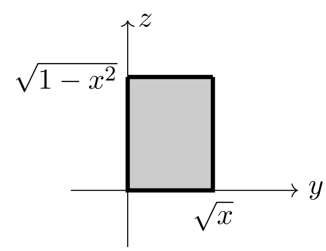
因此,

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{x}} f\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{x}} f\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{\sqrt[4]{1-y^2}}\int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^4}}\int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^1\int_{z^2}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

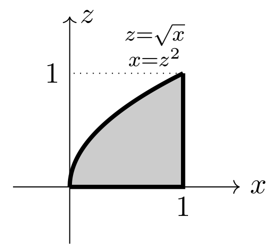
解 (作圖法)

先固定 x, 交換 y 和 z. 由於 y、z 的積分界限均為「常數」, 即積分區域為矩形, 如右圖. 因此可直接換序, 即



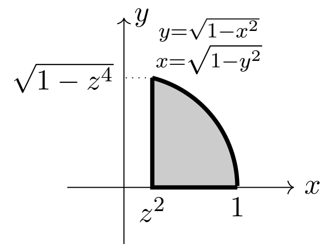
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{x}} f\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

再來, 考慮「 $\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 」, 即固定 y, 交換 x 和 z, 作圖如右. 由圖, 可得 $z^2 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$, 即



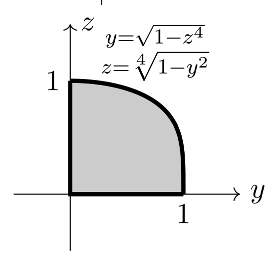
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{z^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

接著, 考慮「 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 」, 即固定 z, 交換 x 和 y, 作圖如右. 由圖, 可得 $0 \le y \le \sqrt{1-z^4}$, $z^2 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, 即



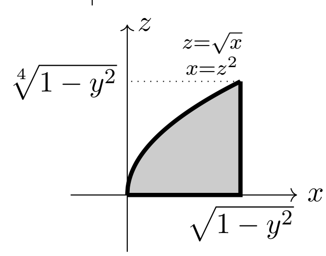
$$\int_0^1 \int_{z^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^4}} \int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

跟著, 考慮「 $\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$ 」, 即固定 x, 交換 y 和 z, 作圖如右. 由圖, 可得 $0 \le z \le \sqrt[4]{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$, 即



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^4}} \int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[4]{1-y^2}} \int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

最後, 考慮「 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 」, 即固定 y, 交換 x 和 z, 作圖如右. 由圖, 可得 $0 \le z \le \sqrt{x}$, $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, 即



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt[4]{1-y^2}} \int_{z^2}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{x}} f \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

看吧, 不等式法和作圖法得到的結論是一樣的 (當然必須會一樣)!

結語

看完以上例子後, 希望大家對不畫圖寫出積分界限或進行積分換序操作有初步的概念, 也鼓勵大家自己動手試試看 $(\partial \cdot \forall \cdot)\partial$