微積分

仙女仙女

最後編輯: 2025 年 7 月 1 日

目錄

單元 1

數列與單變數函數的極限

1.1 確界原理

定義 1.1.1 設 S 為 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $r \in \mathbb{R}$,

(1) 若 $s \in S$, 均有 $r \geq s$, 則稱 r 為 S 的**上界**.

(2) 若 $s \in S$, 均有 $r \leq s$, 則稱 r 為 S 的**下界**.

(3) 若 r 是 S 的上界且 $r \in S$, 則稱 r 為 S 的**最大元**, 記作 $\max S$.

(4) 若 r 是 S 的下界且 $r \in S$, 則稱 r 為 S 的**最小元**, 記作 $\min S$.

(5) 若 $r = \min\{u \in \mathbb{R} : u\,是\,S\,的上界\}$, 則稱 r 為 S 的**最小上界**或**上確界**, 記作 $\sup S$ 或 $\operatorname{lub} S$.

(6) 若 $r = \max\{u \in \mathbb{R} : u\,是\,S\,的下界\}$, 則稱 r 為 S 的**最大下界**或**下確界**, 記作 $\inf S$ 或 $\operatorname{glb} S$.

註記 1.1.2 關於上、下界的術語, 我們有以下約定:

(1) 任一實數都是空集合 $\varnothing$ 的上、下界.

(2) 我們以 $\sup S = +\infty$ 及 $\inf S = -\infty$ 分別表示 S 沒有上、下界, 此時我們說 $\sup S = +\infty$ 及 $\inf S = -\infty$ 不存在.

(3) 若 S 的上界 (相應地, 下界) 存在, 則稱 S 上有界 (相應地, 下有界), 否則稱為上無界 (相應地, 下無界).

公理 1.1.3 (確界原理 (上確界的存在性); 完備公設) 實數的所有上有界的非空子集必有上確界.

註記 1.1.4 事實上, 實數系有六個基本原理互相等價:

$$\begin{aligned}&\text{確界原理} \iff \text{單調有界收斂準則} \iff \text{Cantor 區間套定理}\\ &\iff \text{Bolzano-Weierstrass 定理} \iff \text{Cauchy 收斂定理} \iff \text{Heine-Borel 有限覆蓋定理}\end{aligned}$$

例 1.1.5 一些集合的上界:

(1) $\sup(-\infty, 0) = 0, \qquad \sup(-\infty, 0] = 0$

(2) $\sup(-4, -1) = -1, \qquad \sup(-4, -1] = -1$

(3) $\sup\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots\} = 1$

(4) $\sup\{-1/2, -1/8, -1/27, \ldots, -1/n^3, \ldots\} = 0$

(5) $\sup\{x : x^2 < 3\} = \sup\{x : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\} = \sqrt{3}$

(6) 對於以十進制表示的小數 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots$, 我們有 $b = \sup\{0.b_1, 0.b_1b_2, 0.b_1b_2b_3, \ldots\}$.

定理 1.1.6 (最小上界的逼近性) 若 $M = \sup S$ 且 $\varepsilon > 0$, 則存在 $s \in S$ 使 $M - \varepsilon < s \leq M$.

證明 令 $\varepsilon > 0$, 由於 M 是 S 的上界, 那麼 $s \leq M$ 對於所有 $s \in S$ 恆成立. 採矛盾法, 假設不存在 $s \in S$ 使 $s > M - \varepsilon$, 則對所有 $x \in S$, 必有 $x \leq M - \varepsilon$, 即 $M - \varepsilon$ 是 S 的上界. 但 $M - \varepsilon < M$, 這與 M 是 S 的最小上界矛盾, 故原命題成立. □

定理 1.1.7 (確界原理 (下确界)) 實數的所有下有界的非空子集必有下确界.

證明 設 S 非空且有下界 k, 即對所有 $s \in S$, 都有 $k \leq s$, 則 $\forall\, s \in S, -s \leq -k$, 亦即 $-k$ 是集合 $-S = \{-s : s \in S\}$ 的上界. 由最小上界的存在性 (確界原理; 公理 1.1.3), 可知 $-S$ 有上確界, 記作 m, 即對所有 $s \in S$, 都有 $-s \leq m$, 由此可得對所有 $s \in S$, 都有 $-m \leq s$, 故 $-m$ 是 S 的下界. 我們宣稱 $-m$ 就是 S 的下确界. 如果不是, 存在 m_1 滿足對所有 $s \in S$, 都有 $-m < m_1 \leq s$, 則對所有 $s \in S$, 式 $-s \leq -m_1 < m$ 成立, 由此推得 m 不會是 $-S$ 的上確界, 矛盾. □

定理 1.1.8 (最大下界的逼近性) 若 $m = \inf S$ 且 $\varepsilon > 0$, 則存在 $s \in S$ 使 $m \leq s < m + \varepsilon$.

註記 1.1.9 如果引入兩個符號 $+\infty, -\infty$, 定義 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, +\infty]$, 並規定對所有 $r \in \mathbb{R}$, 都有以下條件滿足:

$$r + (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad r - (\pm\infty) = \mp\infty, \qquad \frac{r}{\pm\infty} = 0, \qquad -\infty < r < +\infty,$$

$$\begin{gathered}
\text{若}\, r > 0, \text{則有}\, r \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad \frac{r}{0} = +\infty; \\
\text{若}\, r < 0, \text{則有}\, r \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \qquad \frac{r}{0} = -\infty; \\
(+\infty) + (+\infty) = (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, \\
(-\infty) + (-\infty) = (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,
\end{gathered}$$

我們稱 $\overline{\mathbb{R}}$ 為**廣義實數系**. 注意到在廣義實數系中, 任何非空子集都有上界和下界.

注意 1.1.10 在某些教材會把「$+\infty$」的正號省略不寫, 直接以「∞」表示正無窮大, 但也有教材把「∞」和「$+\infty$」視為不同的概念, 即把正、負無窮大統稱為無窮大, 以符號「∞」表示無窮遠處且不分其在實數軸的左右方向. 本講義採後者.

命題 1.1.11 (1) 實數有**阿基米德性**, 即對所有 $x \in \mathbb{R}$, 從存在 $n \in \mathbb{R}$, 使得 $n > x$. 此性質等價於正整數集的無界性.

(2) 有理數稠密於 $\mathbb{R}$, 即對所有滿足 $a < b$ 的 $a, b \in \mathbb{R}$, 存在 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$;

(3) 無理數稠密於 $\mathbb{R}$, 即對所有滿足 $a < b$ 的 $a, b \in \mathbb{R}$, 存在 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

註記 1.1.12 實數的阿基米德性的等價敘述:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, a > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, Na > b.$$

證明 (1) 如果 $x < 0$, 結論顯然成立. 假設 $x \geq 0$, 且

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\},$$

則 $A \neq \varnothing$ 且有上界 x, 依確界原理 (公理 1.1.3), $s := \sup A \in \mathbb{R}$ 存在, 故存在 $a \in A$ 滿足 $s - \frac{1}{2} < a$, 從而得到 $s < n := a + 1$, 但此時, $n \notin A$ 和 $n > x$.

(2) 因 $b-a>0$, 由 (1), 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $n>\frac{1}{b-a}>0$, 即 $nb>na+1$, 再次由 (1), 存在 $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$m_1>na,\quad m_2>-na,$$

即 $-m_2<na<m_1$, 所以存在 $m\in\mathbb{Z}$ 滿足 $m-1\le na<m$. 故

$$na<m\le 1+na<nb,$$

取 $r:=m/n\in\mathbb{Q}$ 即得證.

(3) 由 (2), 存在 $r_1,r_2\in\mathbb{Q}$ 使得 $a<r_1<r_2<b$, 令

$$s:=r_1+\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}},$$

那麼

$$r_1<s,\quad r_2-s=(r_2-r_1)\left(1-\frac{1}{2}\right)>0,$$

即 $a<r_1<s<r_2<b$. 若 $s\in\mathbb{Q}$, 則

$$\sqrt{2}=\frac{r_2-r_1}{s-r_1}\in\mathbb{Q},$$

矛盾, 所以 $s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

□

1.2 數列極限的性質與計算

回顧: 數列可以看作是以自然數 $\mathbb{N}$ 為定義域的函數.

數列極限的定義與性質

定義 1.2.1 設 $\{x_n\}$ 為一數列, 如果存在一個常數 $a\in\mathbb{R}$, 對於任意給定的正數 ε, 總存在正整數 N, 使得對於 $n>N$ 時的一切 n, 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 均成立, 則稱常數 a 是數列 $\{x_n\}$ 的**極限**, 或者稱數列 $\{x_n\}$ **收斂**於 a, 記作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\quad 或\quad x_n\to a\quad (n\to\infty).$$

如果這樣的常數 a 不存在, 則稱數列極限不存在或沒有極限, 或稱數列**發散**.
用數學語言描述為:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\iff \forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbb{N}\,使得當\,n>N\,時,\,恆有\,|x_n-a|<\varepsilon.$$

註記 1.2.2 正整數 N 與任予的 ε 有關. 對於給定的 ε, 相應的 N 不唯一, 即只要其存在, 並無要求其達到最小.

註記 1.2.3 所謂極限不存在, 嚴格來說要說明是於什麼集合中不存在. 比如說, 數列

$$\{3,3.14,3.141,3.1415,3.14159,\ldots\}$$

的極限不存在於 $\mathbb{Q}$, 但存在於 $\mathbb{R}$ 中 (其極限為 π) ; 而平方數數列 $\{1,4,9,16,\ldots\}$ 的極限不存在於 $\mathbb{R}$ 中, 但存在於 $\overline{\mathbb{R}}$ 中 (其極限為 $+\infty$) ; 數列 $\{\sin n\}$ 不存在於 $\overline{\mathbb{R}}$ 中. 一般上, 若不特別強調, 我們所謂的「不存在」是「不存在於 $\mathbb{R}$ 中」. 如果數列的極限存在於 $\overline{\mathbb{R}}$ 中, 則稱數列的**廣義極限存在**.

例 1.2.4 證明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

證明 任予 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, 則當 $n > N$ 時, 恆有 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 故數列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的極限為 0. □

例 1.2.5 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

證明 任予 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

即 $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, 不等式兩邊取對數, $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, 從而 $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, 取 $N = \max\left\{1, \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right\}$ (當 $\varepsilon \geq 1$ 時, $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \leq 0$), 則當 $n > N$ 時, 恆有 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 故數列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的極限為 0. □

註記 1.2.6 實際上, 對於任意滿足 $0 < |q| < 1$ 的實數 q, 都有 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 證明留作習題.

例 1.2.7 $\lim_{n\to\infty} k = k$, 其中 k 是任一常數.

定理 1.2.8 對任意實數 x, 都有 $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

證明 因為 $x \in \mathbb{R}$, 所以由實數的阿基米德性 (命題 1.1.11), $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ 使 $|x| \leq N_0$ 成立. 當 $n \geq N_0$ 時, 觀察不等式:

$$\left|\frac{x^n}{n!} - 0\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N_0}}{N_0!} \cdot \frac{|x|}{N_0 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^{N_0}}{N_0!} \cdot \frac{|x|}{n}.$$

任給 $\varepsilon > 0$, 取

$$N > \max\left\{N_0, \frac{|x|^{N_0+1}}{N_0!\varepsilon}\right\},$$

則對任意 $n > N$, 不等式

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| < \varepsilon$$

恆成立. □

注意 1.2.9 以下為一些重要的極限:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad (x > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

我們將在單元 1.4 (重要準則與重要極限) 中定義 $\ln x$.

例 1.2.10 如果 $x_n = 0.3\cdots3$ (n 個 3), 證明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.\dot{3} = \frac{1}{3}$.

證明 提示:

$$|x_n - 0.3| = \left|0.\underbrace{33\cdots33}_{n} - 0.\underbrace{33\cdots33}_{n}33\cdots\right| = \left|0.\underbrace{00\cdots00}_{n}33\cdots\right| < 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1 = \frac{1}{10^n}.$$

□

注意 1.2.11 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 不存在 $\iff \forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n \neq a \iff \forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N$ 使 $|x_n - a| \geq \varepsilon_0$.

例 1.2.12 設 $x_n = (-1)^n$, 證明 $\{x_n\}$ 發散.

證明 設 $a \in \mathbb{R}$,
當 $a < 0$ 時, 取 $\varepsilon = 1 > 0$, 對任何 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n = 2N > N$, 則 $|x_n - a| = |(-1)^{2N} - a| = |1 - a| > 1 = \varepsilon$.
當 $a \geq 0$ 時, 取 $\varepsilon = 1 > 0$, 對任何 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n = 2N + 1 > N$, 則 $|x_n - a| = |(-1)^{2N+1} - a| = |-1 - a| = |a + 1| \geq 1 = \varepsilon$.
即 $\forall\, a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在. □

例 1.2.13 證明數列 $\{\sin n\}$ 發散.

證明 (證一) 假設 $\lim_{n\to\infty} \sin n = a$ 存在, 則由

$$2\sin 1 \cos n = \sin(n+1) - \sin(n-1),$$

得到 $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$, 從而

$$\sin(2n) = 2\sin n \cos n \to 0,$$

即 $a = 0$. 但因為 $1 = \sin^2 n + \cos^2 n$, 對等式兩邊取極限, 得到 $0 = 1$, 矛盾. □

證明 (證二) 由於 $|\sin n| \leq 1$, 所以只需證明 $\forall\, a \in [-1, 1]$, 都有 $\lim_{n\to\infty} \sin n \neq a$. 不失一般性, 設 $0 \leq a \leq 1$ (為什麼可以?), 取 $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 對任意 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n_0 = \lfloor (2N\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} \rfloor > N$, 那麼 $\sin n_0 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $|\sin n_0 - a| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = \varepsilon$. □

註記 1.2.14 此例子告訴我們, $\{x_n\}$ 有界推不出 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

定義 1.2.15 設 $\{x_n\}$ 為一數列, 如果對於任給的正數 Y, 總存在正整數 N, 使得對於 $n > N$ 時的一切 n, 不等式 $|x_n| > Y$ 均成立, 即

$$\forall\, Y > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}\,\text{使得當}\,n > N\,\text{時, 恆有}\,|x_n| > Y,$$

則稱數列 $\{x_n\}$ 發散至**無窮大**, 記作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

如果從某一項以後, 都有 $x_n > 0$, 則寫作 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$; 如果 $x_n < 0$, 則寫作 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

例 1.2.16 證明 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$ 發散至無窮大.

證明 令 $Y > 0$, 要使 $|x_n| = |(-1)^n n| = n > Y$, 取 $N = \lfloor Y \rfloor + 1$, 則當 $n > N$ 時, $|x_n| = n > N > Y$, 即 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$. □

例 1.2.17 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 存在, 則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

證明 對任意 $\varepsilon > 0$, 因為 $x_n \to a$, 所以

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}\,\text{使得只要}\,n > N_0\,\text{, 都有}\,|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - a\right| = \left|\frac{x_1 + \cdots + x_n - na}{n}\right| \\
= &\left|\frac{x_1 + \cdots + x_{N_0} - N_0 a}{n} + \frac{(x_{N_0+1} - a) + \cdots + (x_n - a)}{n}\right| \\
\leq &\frac{|x_1 + \cdots + x_{N_0} - N_0 a|}{n} + \frac{|x_{N_0+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \\
\leq &\frac{n - N_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_1 + \cdots + x_{N_0} - N_0 a|}{n},
\end{aligned}$$

取

$$N > \max\left\{N_0, \frac{|x_1 + \cdots + x_{N_0} - N_0 a|}{\frac{\varepsilon}{2}}\right\},$$

便有

$$\left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

註記 1.2.18 上例中, $a \in \mathbb{R}$ 可以推廣到 $a \in \overline{\mathbb{R}}$, 即允許 $a = +\infty$ 或 $-\infty$.

命題 1.2.19 (數列極限的唯一性) 數列 $\{x_n\}$ 不能收斂於兩個不同的極限.

證明 假設同時有 $x_n \to a$ 及 $x_n \to b$, 不妨設 $a < b$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a) > 0$.
由 $x_n \to a$ 可知, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得只要 $n > N_1$, 都有 $|x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$, 即 $x_n < \frac{1}{2}(a+b)$. 由 $x_n \to b$ 可知, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得只要 $n > N_2$, 都有 $|x_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)$, 即 $x_n > \frac{1}{2}(a+b)$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 則當 $n > N$ 時, $x_n < \frac{1}{2}(a+b)$ 和 $x_n > \frac{1}{2}(a+b)$ 同時成立, 矛盾. □

定義 1.2.20 設 $\{x_n\}$ 為一數列.

(1) 如果存在 $M \in \mathbb{R}$ 使一切 x_n 滿足 $x_n \leq M$, 則稱數列 $\{x_n\}$ **有上界**.

(2) 如果存在 $M \in \mathbb{R}$ 使一切 x_n 滿足 $x_n \geq M$, 則稱數列 $\{x_n\}$ **有下界**.

(3) 如果存在 $M > 0$ 使一切 x_n 滿足 $|x_n| \leq M$, 則稱數列 $\{x_n\}$ **有界**.

命題 1.2.21 (收斂數列的有界性) 如果數列 $\{x_n\}$ 收斂, 則該數列一定有界.

證明 設 $x_n \to a$, 則對於 $\varepsilon = 1$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得只要 $n > N$, 都有 $|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$. 因此, 取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$, 則對一切 n, 均有 $|x_n| \leq M$, 即數列 $\{x_n\}$ 有界. □

注意 1.2.22 如果數列無界, 則其一定發散; 但若數列有界, 其未必收斂, 例如, 數列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但不收斂於某一定數.

命題 1.2.23 (收斂數列的保號性) 如果 $x_n \to a$ 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得當 $n > N$ 時, 均有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

證明 設 $a > 0$, 由 $x_n \to a$, 對於 $\varepsilon = \frac{a}{2}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得當 $n > N$ 時, 恆有 $|x_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$.
同理可證 $a < 0$ 的情形. □

系理 1.2.24 如果 $\{x_n\}$ 滿足: $\exists\, N \in \mathbb{N}$ 使得當 $n > N$ 時, $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 則 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

系理 1.2.25 (收斂數列的保序性) 若數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 分別收斂於 a 和 b, 且存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n > N$ 時, 恆有 $x_n \leq y_n$, 則 $a \leq b$.

證明 考慮數列 $\{y_n - x_n\}$, 證明其收斂於 $b - a$ (由將要討論的計算性質可立刻得出此結論), 再由系理 1.2.24 推得 $b - a \geq 0$ 即得結論. □

思考: 如果當 $n > N$ 時, 恆有 $x_n < y_n$, 系理 1.2.25 的結論是否可改成 $a < b$?

定義 1.2.26 在數列 $\{x_n\}$ 中任意抽取無限項並保持這些項在原數列中的先後次序, 由此得到的一個新數列乘為 $\{x_n\}$ 的**子數列**或**子列**, 記作 $\{x_{n_k}\}$ (注意到 $n_k \geq k$).

命題 1.2.27 如果數列 $\{x_n\}$ 收斂於 a, 則它的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 亦收斂於 a.

證明 任予 $\varepsilon > 0$, 由於 $x_n \to a$, 則 $\exists\, N \in \mathbb{N}$, 當 $n > N$ 時, 恆有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 取 $K = N$, 則當 $k > K$ 時, $n_k > n_K = n_N > N$, 有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, 故 $x_{n_k} \to a$. □

注意 1.2.28 由命題 1.2.27 可知, 若數列 $\{x_n\}$ 的某個子列發散, 或某兩個子列收斂於兩個不同的數, 則數列 $\{x_n\}$ 必發散. 例如, $\{(-1)^n)\}$ 的每奇數項構成的子列 (簡稱奇數子列) 收斂於 -1, 每偶數項組成的子列 (簡稱偶數子列) 收斂於 1, 可知數列 $\{(-1)^n)\}$ 發散.

命題 1.2.29 若數列 $\{x_n\}$ 的奇數子列和偶數子列都收斂於 a, 則數列 $\{x_n\}$ 收斂且極限為 a; 反之亦然.

數列極限的計算

定理 1.2.30 (數列極限的運算法則) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, k 為常數, 則

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$ (加、減法法則);

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(k \cdot x_n) = k \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot a$ (提出常數法則);

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$ (乘法法則);

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$, 其中 $b \neq 0$ (除法法則);

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n} = \sqrt{a}$, 其中 $x_n \geq 0, a \geq 0$ (交換法則).

證明 僅證明 (1), 餘者留作練習.

任予 $\varepsilon > 0$, 由於 $x_n \to a$, 則 $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$, 當 $n > N_1$ 時, 恆有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

由於 $y_n \to a$, 則 $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$, 當 $n > N_2$ 時, 恆有

$$|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 於是, 當 $n > N$ 時,

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{和} \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同時成立. 於是, 當 $n > N$ 時,

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

因此, (1) 式成立. □

例 1.2.31 以下為數列極限之計算的例子:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4 - 7n^2}{n^2 + 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2} - 7}{1 + \frac{3}{n^2}} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{1 + 0} = 1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k-1)k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1-0=1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)=\dfrac{3}{2}$

注意 1.2.32 (1) 上例的 (1), (3) 均為不定型 $\frac{\infty}{\infty}$, 一般上會將分子、分母同除以它們之中 n 的最高次冪, 使得有形如 $\frac{1}{n^k}$ 的項出現, 才能取極限.

(2) 例 (5) 為不定型 $\infty-\infty$, 一般上我們會將之「有理化」成分式的形式, 方能模仿「分式型」數列極限的處理方式.

(3) 以上例子的 (2), (4), (6) 不能直接取極限, 必須化為有窮項才能取極限.
錯解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=0+0+0+\cdots+0=0.$$

註記 1.2.33 設 $f(n)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0, g(n)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 為多項式, 其中 $g(n)$ 不為零多項式, 則有以下結果:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0, & \text{當 } \deg f<\deg g;\\ \dfrac{a_k}{b_m}, & \text{當 } \deg f=\deg g;\\ +\infty, & \text{當 } \deg f>\deg g \text{ 且 } a_k>0;\\ -\infty, & \text{當 } \deg f>\deg g \text{ 且 } a_k<0.\end{cases}$$

1.3 函數極限的性質與計算

約定: 以符號 D_f 或 $\mathrm{dom}(f)$ 表示函數 f 的定義域, $f(D_f)$ 或 $\mathrm{Im}(f)$ 或 R_f 表示函數 f 的值域.

定義 1.3.1 設 $\delta>0$, $a,r\in\mathbb{R}$,

(1) 集合 $B(a,\delta)=\{x:|x-a|<\delta\}$ 稱為點 a 的 δ **鄰域**, a 稱為 $B(a,\delta)$ 的**中心**, δ 稱作 $B(a,\delta)$ 的**半徑**;

(2) 集合 $B'(a,\delta)=\{x:0<|x-a|<\delta\}$ 稱為點 a 的**去心 δ 鄰域**;

(3) 開區間 $(a-\delta,a)$ 稱為 a 的**左鄰域**, 開區間 $(a,a+\delta)$ 稱為 a 的**右鄰域**;

(4) 如果不強調半徑, 以 a 點為中心的任何開區間稱為點 a 的**鄰域**, 記作 $B(a)$, 而將集合 $B'=B(a)\setminus\{a\}$ 稱為 a 的**去心鄰域**;

(5) 開區間 $(r,+\infty)$ 稱為 $+\infty$ 的 (去心) 鄰域, 開區間 $(-\infty,r)$ 稱為 $-\infty$ 的 (去心) 鄰域, 而集合 $B(\infty,r)\{x\in\mathbb{R}:|x|>r\}$ 稱為 ∞ 的 (去心) 鄰域;

(6)「在 x_0 或 ∞ **附近**」表示「在 x_0 或 ∞ 的某個去心鄰域中」.

定義 1.3.2 設 A 為 $\mathbb{R}$ 的一個子集,

(1) 集合 $\partial A=\{x\in\mathbb{R}:\forall\,\delta>0, B(x,\delta)\cap A\neq\varnothing \text{ 且 } B(x,\delta)\cap(\mathbb{R}\setminus A)\neq\varnothing\}$ 稱為 A 的**邊界**;

(2) 集合 $\mathring{A}=\{x\in A:\exists\,\delta>0, B(x_0,\delta)\subseteq A\}$ 稱為 A 的**內部**;

(3) 集合 $\overline{A} = A \cup \partial A$ 稱為 A 的**閉包**.

例 1.3.3 (1) $A = (1, 2]$, $\mathring{A} = (1, 2)$, $\partial A = \{1, 2\}$, $\overline{A} = [1, 2]$;

(2) $A = [0, 1) \cup (2, 3] \cup \{4\}$, $\mathring{A} = (0, 1) \cup (2, 3)$, $\partial A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\overline{A} = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$;

(3) $A = (-\infty, 0)$, $\mathring{A} = (-\infty, 0)$, $\partial A = \{0\}$, $\overline{A} = (-\infty, 0]$;

(4) $A = \mathbb{Q}$, $\mathring{A} = \varnothing$, $\partial A = \mathbb{R}$, $\overline{A} = \mathbb{R}$;

(5) $A = \mathbb{R}$, $\mathring{A} = \mathbb{R}$, $\partial \mathbb{R} = \varnothing$, $\overline{A} = \mathbb{R}$;

(6) $A = \varnothing$, $\mathring{A} = \partial A = \overline{A} = \varnothing$.

註記 1.3.4 (1) 若 I 是開區間, 則 $\mathring{I} = I$;

(2) 若 I 是閉區間, 則 $\overline{I} = I$;

(3) $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$;

(4) 一些基本結論: $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$, $\mathring{A} \cap \partial A = \varnothing$, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$.

函數極限的定義與性質

定義 1.3.5 (自變量趨向正無窮大時的極限) 設函數 f 當 x 大於某一數時有定義, 如果存在常數 A, 對於任給的正數 ε, 總存在正數 X, 使得只要 $x \in D_f$ 滿足不等式 $x > X$, 對應的函數值 $f(x)$ 都滿足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 則稱 A 為函數 f 當 $x \to +\infty$ 時的極限, 記作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to +\infty).$$

也可以簡述為:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0 \text{ 使得只要 } x \in D_f \text{ 且 } x > X, \text{ 恆有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

定義 1.3.6 (自變量趨向負無窮大時的極限) 設函數 f 當 x 小於某一數時有定義, 如果存在常數 A, 對於任給的正數 ε, 總存在正數 X, 使得只要 $x \in D_f$ 滿足不等式 $x < -X$, 對應的函數值 $f(x)$ 都滿足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 則稱 A 為函數 f 當 $x \to -\infty$ 時的極限, 記作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to -\infty).$$

也可以簡述為:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0 \text{ 使得只要 } x \in D_f \text{ 且 } x < -X, \text{ 恆有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

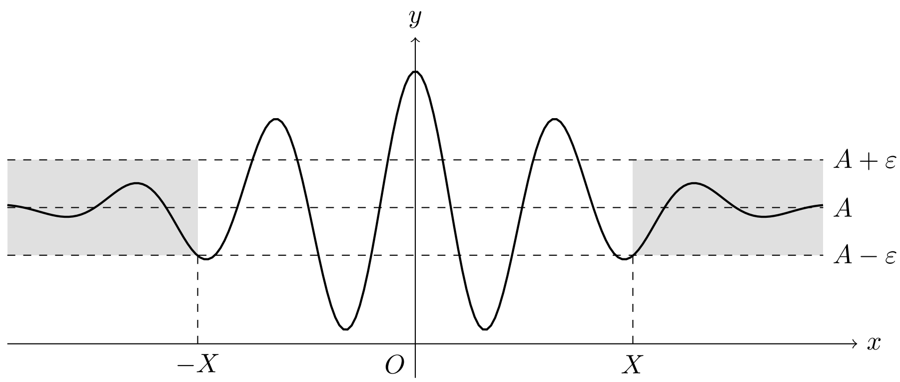
定義 1.3.7 (自變量趨向無窮大時的極限)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0 \text{ 使得只要 } x \in D_f \text{ 且 } |x| > X, \text{ 恆有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意 1.3.8 (1) 切勿混淆: 本講義中 $x \to \infty$ 表示 $|x| \to +\infty$, 即沒有特別說 x 一定是正的還是負的, 而不僅僅是討論 $x \to +\infty$ 而已;

(2) $x \to +\infty$ 表 $x \to \infty$ 且 $x > 0$; $x \to -\infty$ 表 $x \to \infty$ 且 $x < 0$. 也就是說, 對於 $x \to \infty$ 成立的定理一般上對於 $x \to +\infty$ 及 $x \to -\infty$ 都適用, 只是多了 $x > 0$ 或 $x < 0$ 的約束而已. 因此, 以後證明定理時, 我們都只針對 $x \to \infty$ 的情況討論;

(3) 數列的極限中, 我們只用 $n \to \infty$, 不特別強調是正方向的無窮大, 是因為正整數集有最小元, 只有一個方向的無窮大, 而不如實數那樣有兩個方向的無窮大.



註記 1.3.9 「$x \in D_f$ 且 $|x| > X$」表示 x 在 D_f 和 ∞ 的某個去心鄰域的交集中. 定義 1.3.5 和 1.3.6 中也有類似的概念.

定理 1.3.10 若存在 $X > 0$ 使得函數 f 在 $x > X$ 及 $x < -X$ 時都有定義, 則

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

例 1.3.11 $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 但 $\lim_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

例 1.3.12 證明 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

證明

$$|f(x) - A| = \left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$$

對所有 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只需 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, 故取 $X = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, 則當 $|x| > X$ 時, 恆有

$$|f(x) - A| \le \frac{1}{|x|} < \frac{1}{X} = \varepsilon.$$

□

定義 1.3.13 (自變量趨近於有限值時的極限) 設函數 f 在點 x_0 的某一去心鄰域內有定義, 如果存在常數 A, 對於任給的正數 ε, 總存在正數 δ, 使得當 $x \in D_f$ 滿足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 對應的函數值 $f(x)$ 都滿足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 則稱 A 為函數 f 在 $x \to x_0$ 時的極限, 記作

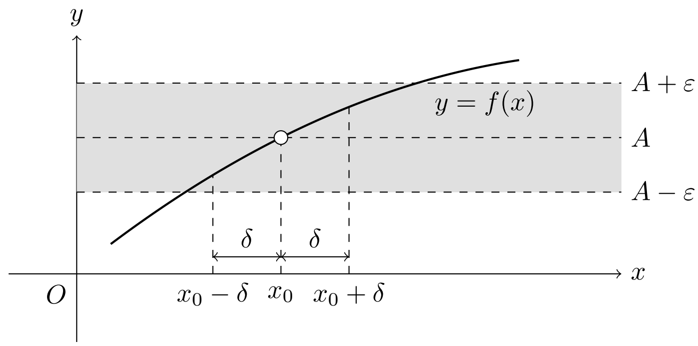
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$

也可以簡述為:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,使得只要\, x \in D_f \,且\, 0 < |x - x_0| < \delta,\, 恆有\, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注意 1.3.14 這裡 δ 與 ε, x_0 有關.

註記 1.3.15 定義中「存在正數 δ, 使得當 $x \in D_f$ 滿足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時」的意義即為「存在 x_0 的某個去心鄰域, 使得只要 x 落在 D_f 與該去心鄰域的交集中」.



例 1.3.16 證明 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

證明 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 有

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

□

例 1.3.17 證明 $\lim_{x\to x_0} k = k$, 其中 k 是常數. (註: 對於 $x_0 = \infty$, 仍有此結果.)

證明 $\forall\, \varepsilon > 0$, 無論取何 $\delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 都有

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

□

例 1.3.18 證明 $\lim_{x\to 1}(5x - 3) = 2$.

證明 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon > 0$, 當 $0 < |x - 1| < \delta$ 時, 有

$$|f(x) - 2| = |(5x - 3) - 2| = 5|x - 1| < 5\delta = 5 \cdot \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

例 1.3.19 證明 $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

證明 草稿:

$\forall\, \varepsilon > 0$, 希望找到 $\delta > 0$ 使只要 $0 < |x - 2| < \delta$, 有

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2| < |x + 2|\delta$$

(但不可以取 $\delta = \frac{1}{|x+2|}$.)

如果限制 $|x - 2| < 1$, 則有

$$-1 < x - 2 < 1 \implies 3 < x + 2 < 5 \implies |x + 2| < 5,$$

代回上式, 有

$$|x^2 - 4| < \delta|x + 2| < 5\delta,$$

想要取 $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, 然而此時取的 δ 必須要能使得 $|x - 2| < 1$, 才能有上式成立! 因此, 宜取 $\delta = \min\{\frac{1}{5}\varepsilon, 1\}$.

正式地把證明寫下來:

$\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{1}{5}\varepsilon,1\}$, 則當 $0<|x-2|<\delta$ 時, 有以下兩式成立:

$$|x-2|<\delta\le 1 \implies |x+2|<5 \tag{1.1}$$

$$|x-2|<\delta\le \frac{1}{5}\varepsilon \tag{1.2}$$

那麼

$$|f(x)-4|=|x^2-4|=|x+2||x-2| \overset{\text{由}(1.1)}{<} 5|x-2|<5\delta \overset{\text{由}(1.2)}{\le} 5\cdot\frac{1}{5}\varepsilon=\varepsilon.$$

□

例 1.3.20 證明 $\lim_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+2x+2)=7$.

證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\frac{1}{27}\}>0$, 當 $0<|x-1|<\delta$ 時, 因 $\delta\le 1$ 蘊含 $\forall\,n\in\mathbb{N},\delta^n\le 1$, 故

$$\begin{aligned}|(x^4+x^3+x^2+2x+2)-7|&=|(x-1)^4+5(x-1)^3+10(x-1)^2+11(x-1)|\\&\le|x-1|^4+5|x-1|^3+10|x-1|^2+11|x-1|\\&<\delta^4+5\delta^3+10\delta^2+11\delta\\&\le\delta+5\delta+10\delta+11\delta=27\delta\le\varepsilon.\end{aligned}$$

□

例 1.3.21 證明 $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$.

證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=2\varepsilon>0$, 當 $0<|x-5|<\delta$ 時, 有

$$|\sqrt{x-1}-2|=\frac{|x-1-4|}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{|x-5|}{\sqrt{x-1}+2}\le\frac{1}{2}|x-5|<\frac{1}{2}\delta=\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

□

例 1.3.22 設 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ne 2\\ 1, & x=2\end{cases}$, 證明 $\lim_{x\to 2}f(x)=4$.

證明 任予 $\varepsilon>0$.

觀察: 對於 $x\ne 2$, 希望

$$|f(x)-4|=|x^2-4|<\varepsilon\,\text{即}\,4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon,$$

如果 $\varepsilon<4$, 就有 $\sqrt{4-\varepsilon}<|x|<\sqrt{4+\varepsilon}$, 在滿足 $x>0$ 的 2 的去心鄰域中, 有 $\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}$, 即當 $0<\varepsilon<4$ 且 $x\in(\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon})\setminus\{2\}$ 時, 有 $|f(x)-4|<\varepsilon$.

當 $\varepsilon\ge 4$ 時,

$$0\le 4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon\implies 0<x^2<4+\varepsilon\implies 0<|x|<\sqrt{4+\varepsilon},$$

而在滿足 $x>0$ 的 2 的去心鄰域中, $0<x<\sqrt{4+\varepsilon}$.

綜合以上觀察可知, 當 $0<\varepsilon<4$ 時, 取 $\delta=\min\{2-\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}-2\}>0$; 當 $\varepsilon\ge 4$ 時, 取 $\delta=\min\{2,\sqrt{4+\varepsilon}-2\}$. 在兩者情況下, 只要 $0<|x-2|<\delta$, 便有 $|f(x)-4|=|x^2-4|<\varepsilon$. □

註記 1.3.23 由於極限的定義中有要求「$0<|x-2|<\delta$」即 $x\ne 2$, 故上例中相當於求證 $\lim_{x\to 2}x^2=4$.

例 1.3.24 設 $x_0\in\mathbb{R}$, 證明 $\lim_{x\to x_0}|x|=|x_0|$.

證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon>0$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, 有

$$||x|-|x_0||\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

□

例 1.3.25 設 $x_0>0$ 且 $n\in\mathbb{N}$, 證明 $\lim_{x\to x_0} x^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}}$.

證明 觀察: 如果要求 $|x-x_0|\le \frac{1}{2}x_0$, 就有 $x\ge \frac{1}{2}x_0>0$, $x^{\frac{n-k}{n}} \ge \left(\frac{1}{2}x_0\right)^{\frac{n-k}{n}} = 2^{-\frac{n-k}{n}} x_0^{\frac{n-k}{n}}$, 其中 $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

$$
\begin{aligned}
\left|x^{\frac{1}{n}}-x_0^{\frac{1}{n}}\right| &= \frac{|x-x_0|}{\left|x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}x_0^{\frac{2}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}}+x_0^{\frac{n-1}{n}}\right|}\\
&\le \frac{|x-x_0|}{x_0^{\frac{n-1}{n}}\left(2^{-\frac{n-1}{n}}+2^{-\frac{n-2}{n}}+2^{-\frac{n-3}{n}}+\cdots+2^{-\frac{1}{n}}+1\right)} \qquad \left(\because x\le \frac{1}{2}x_0\right)\\
&= \frac{|x-x_0|}{x_0^{\frac{n-1}{n}}M}
\end{aligned}
$$

其中, $M=2^{-\frac{n-1}{n}}+2^{-\frac{n-2}{n}}+2^{-\frac{n-3}{n}}+\cdots+2^{-\frac{1}{n}}+1$.

現 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}x_0, x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M\cdot\varepsilon\right\}>0$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, 有 $x\ge\frac{1}{2}x_0$ 及 $\delta\le x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M\cdot\varepsilon$ 都成立, 且

$$
\left|x^{\frac{1}{n}}-x_0^{\frac{1}{n}}\right| \le \frac{|x-x_0|}{x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M} < \frac{\delta}{x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M} \le \frac{x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M\cdot\varepsilon}{x_0^{\frac{n-1}{n}}\cdot M} = \varepsilon.
$$

□

例 1.3.26 設 $a>1$, $x_0\in\mathbb{R}$, 證明 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. (實際上對於 $0<a\le 1$ 仍成立)

證明 $\forall\,\varepsilon>0$ (足夠小), 取

$$
\delta=\min\left\{\left|\log_a(1-a^{-x_0}\varepsilon)\right|, \left|\log_a(1+a^{-x_0}\varepsilon)\right|\right\} = \min\left\{-\log_a(1-a^{-x_0}\varepsilon), \log_a(1+a^{-x_0}\varepsilon)\right\}>0,
$$

當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時,

$$
\begin{aligned}
&\log_a(1-a^{-x_0}\varepsilon)\le -\delta < x-x_0<\delta\le \log_a(1+a^{-x_0}\varepsilon)\\
\Longrightarrow\ & 1-a^{-x_0}\varepsilon < a^{x-x_0} < 1+a^{-x_0}\varepsilon\\
\Longrightarrow\ & |a^{x-x_0}-1| < a^{-x_0}\varepsilon\\
\Longrightarrow\ & a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon\\
\Longrightarrow\ & |a^x-a^{x_0}|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

例 1.3.27 設 $a>1$, $x_0>0$, 證明 $\lim_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$. (實際上對於 $0<a<1$ 仍成立)

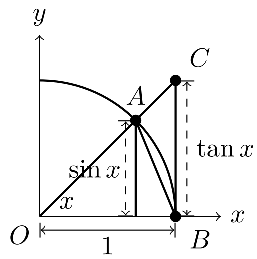
證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{|x_0(a^{-\varepsilon}-1)|, |x_0(a^{\varepsilon}-1)|\right\}=\min\left\{x_0(1-a^{-\varepsilon}), x_0(a^{\varepsilon}-1)\right\}>0$,
當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時,

$$
\begin{aligned}
&x_0(a^{-\varepsilon}-1)\le -\delta<x-x_0<\delta\le x_0(a^{\varepsilon}-1)\\
\Longrightarrow\ & x_0a^{-\varepsilon}-x_0<x-x_0<x_0a^{\varepsilon}-x_0\\
\Longrightarrow\ & a^{-\varepsilon}<\frac{x}{x_0}<a^{\varepsilon}\\
\Longrightarrow\ & -\varepsilon<\log_a\frac{x}{x_0}<\varepsilon\\
\Longrightarrow\ & -\varepsilon<\log_a x-\log_a x_0<\varepsilon\\
\Longrightarrow\ & |\log_a x-\log_a x_0|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

引理 1.3.28 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時, 有 $0 < \sin x < x < \tan x$.

證明 觀察以下圖形:



顯然有 $0 <$ △OAB 的面積 $<$ 扇形 OAB 的面積 $< OBC$ 的面積

$$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$
$$\Longrightarrow 0 < \sin x < x < \tan x$$

□

例 1.3.29 設 $x_0 \in \mathbb{R}$, 證明 $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

證明 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\pi, \varepsilon\}$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時,

(1) $|x - x_0| < \pi \implies -\frac{\pi}{2} < \frac{x-x_0}{2} < \frac{\pi}{2}$

對於 $0 < \frac{x-x_0}{2} < \frac{\pi}{2}$, 由引理 1.3.28, 有 $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < \left|\frac{x-x_0}{2}\right|$;

對於 $-\frac{\pi}{2} < \frac{x-x_0}{2} < 0$, 有 $0 < \frac{x_0-x}{2} < \frac{\pi}{2} \implies \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| = \left|\sin\frac{x_0-x}{2}\right| < \left|\frac{x_0-x}{2}\right| = \left|\frac{x-x_0}{2}\right|$.

(2) $\delta \le \varepsilon$

故有

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0| < \delta \le \varepsilon.$$

□

註記 1.3.30 類似地, 我們還有結論 $\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$. 證明留作習題.

定義 1.3.31 (單邊極限) 設 f 在點 x_0 的某一左鄰域內有定義, 如果存在 A 滿足

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ 使得只要 } x \in D_f \text{ 且 } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 恆有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

則稱 A 為函數 f 在 $x \to x_0$ 時的**左極限**, 記作

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

設 f 在點 x_0 的某一右鄰域內有定義, 如果存在 A 滿足

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ 使得只要 } x \in D_f \text{ 且 } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 恆有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

則稱 A 為函數 f 在 $x \to x_0$ 時的**右極限**, 記作

$$f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

定理 1.3.32 若函數 f 在點 x_0 的某左、右鄰域均有定義, 則

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

注意 1.3.33 $x \to x_0^+$ 表 $x \to x_0$ 且 $x > x_0$; $x \to x_0^-$ 表 $x \to x_0$ 且 $x < x_0$. 也就是說, 對於 $x \to x_0$ 成立的定理一般上對於 $x \to x_0^+$ 及 $x \to x_0^-$ 都適用, 只是多了 $x > x_0$ 或 $x < x_0$ 的約束而已. 因此, 以後證明定理時, 我們都只針對 $x \to x_0$ 的情況討論.

例 1.3.34 已知函數 $f(x) = \sqrt{x}$ 僅在 $x \geq 0$ 時有定義, 而且 $x \to x_0$ 表示 x 趨近於 x_0, 無論方向, 即 x 既可以從 x_0 的左側逼近, 亦可從 x_0 的右側去逼近, 但函數 f 在點 $x_0 = 0$ 的左側並無定義, 特別來說, $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ 不存在. 試問: $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ 是否存在?

解 根據極限的定義, $x \to 0$ 表示 x 在 0 的某個鄰域中**且** $x \in D_f$, 故 $x \to 0$ 在此處和 $x \to 0^+$ 的行為一致, 即極限存在, 且

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

例 1.3.35 設 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$, 則 $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$, 兩者不相等, 故 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 1.3.36 設 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 則有 $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$, $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, 故 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

注意 1.3.37

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x)\,\text{不存在} &\iff \forall\, L \in \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} f(x) \neq L \\ &\iff \forall\, L \in \mathbb{R}, \exists\, \varepsilon > 0\,\text{使得}\,\forall\, \delta > 0, \exists\, x \in D_f\,\text{使得}\,0 < |x - x_0| < \delta\,\text{但}\,|f(x) - L| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

例 1.3.38 設 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 證明 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

證明 設 $L \in \mathbb{R}$.

情況 1: $L \neq \pm 1$, 取 $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}|L-1|, \frac{1}{2}|L+1|\} > 0$, $\forall\, \delta > 0$, 取 $x = \frac{1}{2}\delta$, 則 $x > 0$ 且 $|x - 0| = x = \frac{1}{2}\delta < \delta \implies 0 < |x - 0| < \delta$.

(1) 若 $\delta \in \mathbb{Q}$, 則 $x = \frac{1}{2}\delta \in \mathbb{Q} \implies f(x) = -1 \implies |f(x) - L| = |-1-L| = |L+1| \geq \frac{|L+1|}{2} \geq \varepsilon$.

(2) 若 $\delta \notin \mathbb{Q}$, 則 $x = \frac{1}{2}\delta \notin \mathbb{Q} \implies f(x) = 1 \implies |f(x) - L| = |1 - L| \geq \frac{|1-L|}{2} \geq \varepsilon$.

情況 2: $L = 1$, 取 $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0$, 由 $\mathbb{Q}$ 稠密於 $\mathbb{R}$ 知, $\exists x \in \mathbb{Q}$ 使 $x \in (0, \delta)$, 即 $\exists x \in \mathbb{Q}$ 滿足 $0 < |x - 0| < \delta$. 因此, $|f(x) - L| = |-1-1| = 2 > 1 = \varepsilon$.

情況 3: 與情況 2 類似, 由無理數的稠密性得出結論.

綜上, $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在. □

例 1.3.39 證明 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ 不存在.

證明 設 $L \in \mathbb{R}$, 不失一般性, 設 $L > 0$ (為什麼可以?). 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}L > 0$, $\forall\, \delta > 0$,

情況 1: 若 $\delta \leq \frac{3}{2L}$, 取 $x = \frac{1}{2}\delta$, 則 $0 < |x - 0| < \delta$, 而

$$|f(x) - L| = \left| f\left(\frac{\delta}{2}\right) - L \right| = \left| \frac{2}{\delta} - L \right| > \varepsilon,$$

其中, 最後一個不等式因

$$\delta \leq \frac{2}{3L} \implies \frac{2}{\delta} \geq 3L \implies \frac{2}{\delta} - L \geq 2L > 0 \implies \left| \frac{2}{\delta} - L \right| \geq 2L > \frac{L}{2} = \varepsilon$$

而成立.

情況 2: 若 $\delta > \frac{2}{3L}$, 取 $x = \frac{2}{3L}$, 則 $0 < x = |x-0| = \frac{2}{3L} < \delta$, 而

$$|f(x) - L| = \left|f\left(\frac{2}{3L}\right) - L\right| = \left|\frac{3L}{2} - L\right| = \left|\frac{L}{2}\right| = \frac{1}{2}L \geq \varepsilon.$$

綜上, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在. □

命題 1.3.40 (函數極限的唯一性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x)$) 存在, 則該極限唯一.

證明 證明與數列的情形類似, 此處略去, 並給讀者留作習題. □

命題 1.3.41 (函數極限的局部有界性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x)$) 存在, 那麼存在常數 $M > 0$, 使得在 x_0(或 ∞) 附近, 有 $|f(x)| \leq M$.

證明 僅證明 $x \to x_0$ 的情形: 設 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 則對於 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 恆有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

$$f(x) = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|,$$

記 $M = 1 + |A|$, 則 $|f(x)| \leq M$. □

命題 1.3.42 (函數極限的局部保號性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那麼在 x_0 附近, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

註記 1.3.43 此命題對於 $x \to \infty$ 仍成立.

證明 設 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, 對於 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 都有 $|f(x) - A| \leq \frac{A}{2}$, 則

$$f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

同理可證 $A < 0$ 的情形. □

系理 1.3.44 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$) , 其中 $A \neq 0$, 那麼在 x_0(或 ∞) 附近, 有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

系理 1.3.45 如果函數 f 滿足: 在 x_0 附近, 有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 那麼必有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

註記 1.3.46 此系理對於 ∞ 附近仍成立.

證明 採反證法, 此處省略. □

命題 1.3.47 (函數極限的保序性) (1) 若在點 x_0 附近, 有 $f(x) \leq g(x)$ 且兩函數當 $x \to x_0$ 時的極限存在, 則 $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(2) 若在無窮遠處, 有 $f(x) \leq g(x)$ 且兩函數當 $x \to \infty$ 時的極限存在, 則 $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

證明 由系理 1.3.45 可以推得, 此處略而不證. □

定理 1.3.48 (函數極限與數列極限的關係) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在 $\iff$ 對於 D_f 內任一收斂於 x_0 的數列 $\{x_n\}$, 其中對所有 $n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0$, $\{f(x_n)\}$ 都會收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

證明 必要性: 任予 $\varepsilon > 0$, 因 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 則

$$\exists\, \delta > 0 \text{ 使得只要 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{, 都有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

另一方面, 考慮收斂於 x_0 的數列 $\{x_n\} \subseteq D_f$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0)$, 對於上述的 δ,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ 使得只要 } n > N, \text{ 都有 } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

從而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

充分性: 假設 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq A$, 則

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \text{ 使得 } \forall\, \delta > 0, \text{ 總存在 } x \in D_f \text{ 使得 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 但 } |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

現依次取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, 則存在相應的點 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \in D_f$ 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \text{ 而 } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

顯然數列 $\{x_n\}$ 收斂於 x_0, 但當 $n \to \infty$ 時, $f(x_n)$ 不趨近於 A, 與假設矛盾, 故有 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. □

注意 1.3.49 (1) 定理必要性的應用: 可將數列「連續化」把數列的極限轉化為函數的極限來計算, 求出函數存在的極限值即可推出數列收斂及其極限值, 好處為可適用「羅比達法則」(將在單元2 (單變數函數的導數及其應用) 中討論);

(2) 單個數列極限存在不能保證函數極限存在, 例如 $\lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$, 但 $\lim_{x\to+\infty} \sin \pi x$ 不存在;

(3) 定理充分性的應用: 用來證明極限不存在, 即只要找到兩條收斂於 x_0 的數列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq D_f$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, 或者找到一條收斂於 x_0 的數列 $\{x_n\}$ 但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在, 則 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(4) 無窮遠極限的版本: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 存在 $\iff$ 對於 D_f 內任一發散至 ∞ 的數列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 都會收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

例 1.3.50 證明函數 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 當 $x \to 0$ 時的極限不存在.

證明 取 $x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$; 取 $x''_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = 0$. 因此, 函數 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 當 $x \to 0$ 時極限不存在. □

函數極限的計算

定理 1.3.51 (函數極限的運算法則) 設 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, k 是常數, 則

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} (k \cdot f(x)) = kA = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, 其中 $B \neq 0$.

將 $x \to x_0$ 替換成 $x \to \infty$, 定理仍成立.

證明 僅證明 (2), 餘者留作習題.

$\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ 及定理 1.3.41 可知, $\exists\, M > 0$ 及 $\exists\, \delta_1 > 0$, 使得當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 有 $|g(x)| \leq M$. 由 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$,

$$\exists\, \delta_2 > 0, \text{ 使得當 } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ 時, 有 } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

由 $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$,

$$\exists\, \delta_3 > 0, \text{ 使得當 } 0 < |x - x_0| < \delta_3 \text{ 時, 有 } |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|A| + 2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, 恆有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&=|f(x)g(x)-Ag(x)+Ag(x)+AB|\\&\le|g(x)||f(x)-A|+|A||g(x)-B|\\&\le\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+|A|\cdot\frac{\varepsilon}{2|A|+2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+(|A|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2|A|+2}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

系理 1.3.52 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)$, $\lim_{x\to x_0}g(x)$ 存在, 則

(1) $\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim_{x\to x_0}f(x)+\beta\lim_{x\to x_0}g(x)$, 其中 α,β 是常數;

(2) $\lim_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim_{x\to x_0}f(x))^n$, 其中 $n\in\mathbb{N}$;

(3) 若 $f(x)\ge 0$, 則 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0}f(x)}$.

上述性質對 $x\to\infty$ 仍成立.

定理 1.3.53 設 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, 則 $\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0)$.

定理 1.3.54 設 $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, 其中 $P_n(x),Q_m(x)$ 均為多項式, $Q_m(x_0)\ne 0$, 則 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定理 1.3.55 設 $x_0>0$, $n,m\in\mathbb{N}$, 則 $\lim_{x\to x_0}x^{\frac{n}{m}}=x_0^{\frac{n}{m}}$.

例 1.3.56 (直接代入型) (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x+1)=2\cdot 1+1=3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{8-1}{4-10+3}=-\frac{7}{3}$

例 1.3.57 (三角函數) 設 $x_0\ne\dfrac{\pi}{2}\pm 2k\pi$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$,

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\tan x=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to x_0}\sin x}{\lim_{x\to x_0}\cos x}=\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=\tan x_0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\sec x=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\cos x}=\frac{1}{\cos x_0}=\sec x_0$

例 1.3.58 ($\frac{0}{0}$ 型; 去零因子) (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}-\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)^2(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x})}=\frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{(x^2+4)-4}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)=2+2=4$

例 1.3.59 ($\frac{非0}{0}$) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x-1}$ 不存在.

註記 1.3.60 事實上, 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)\ne 0$ 但 $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$, 則 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在. 提示: 可用反證法證明.

例 1.3.61 ($0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$) (1) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{3x}\cdot\dfrac{1}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-1}{3x}=-\dfrac{1}{9}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}-\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{1}=-\dfrac{1}{2}$

定理 1.3.62 (合成函數的極限運算法則) 設函數 $y=(f\circ g)(x)$ 是右函數 $u=u(x)$ 與 $y=f(u)$ 合成, $(f\circ g)(x)$ 在 $B'(x_0)$ 有定義, 若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim_{x\to x_0}f(u)=A$, 且存在 $\delta_0>0$, 當 $x\in B'(x_0,\delta_0)$ 時, 有 $g(x)\neq u_0$, 則 $\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$.

證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 由於 $\lim_{u\to u_0}f(u)=A$,

$$\exists\,\eta>0,\ 當\ 0<|u-u_0|<\eta\ 時,\ 恆有\ |f(u)-A|<\varepsilon.$$

由 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$, 則對於 $\eta>0$,

$$\exists\,\delta_1>0,\ 當\ 0<|x-x_0|<\delta_1\ 時,\ 恆有\ |g(x)-u_0|<\eta.$$

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, $|u-u_0|=|g(x)-u_0|<\eta$ 及 $|g(x)-u_0|\neq0$ 同時成立, 從而

$$|(f\circ g)(x)-A|=|f(u)-A|<\varepsilon.$$

□

例 1.3.63 (合成函數的極限) (1) $\lim\limits_{x\to3}\sin(2x+1)=\sin\left(\lim\limits_{x\to3}(2x+1)\right)=\sin(2\cdot3+1)=\sin7$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(\sin4x)=\cos\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin4x\right)=\cos\left(\sin\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}4x\right)\right)=\cos(\sin2\pi)=\cos0=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}2^{x+1}=2^{\lim_{x\to0}(x+1)}=2^{0+1}=2$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}}=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+1}{2}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to3}\log_{10}(x^2+1)=\log_{10}\left(\lim\limits_{x\to3}(x^2+1)\right)=\log_{10}(3^2+1)=\log_{10}10=1$

例 1.3.64 ($\frac{\infty}{\infty}$) (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+2x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\dfrac{2-0+0}{3+0-0}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+2}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{0+0}{3-0+0}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-6x+5}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$ 不存在 ($\dfrac{非0}{0}$ 型)

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+1)(3x-2)}{(4x+5)(5x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\left(4+\frac{5}{x}\right)\left(5-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{(2+0)(3-0)}{(4+0)(5-0)}=\dfrac{3}{10}$

註記 1.3.65 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 不存在, & n>m\end{cases}$

例 1.3.66 (帶根式, $x \to \infty$) (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)(3x^2-1)}{(4x-3)\left(2x^{\frac{3}{2}}+5\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\frac{3}{\sqrt{x}})(3-\frac{1}{x^2})}{(4-\frac{3}{x})(2+\frac{5}{x\sqrt{x}})} = \dfrac{1\cdot 3}{4\cdot 2} = \dfrac{3}{8}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5x^6-x}}{2x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5-\frac{1}{x^5}}}{2+\frac{1}{x^3}} = \dfrac{\sqrt{5-0}}{2+0} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} = \dfrac{-\sqrt{9+0}}{2+0} = -3$

另解: 令 $y=-x$, 則當 $x\to-\infty$ 時, $y\to-\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+4} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9y^2+1}}{-y+4} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9+\frac{1}{y^2}}}{-1+\frac{4}{y}} = \dfrac{\sqrt{9+0}}{-1+0} = -3$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{15}}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{15}}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

例 1.3.67 ($\infty-\infty$) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例 1.3.68 ($\infty+\infty$) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+9}-x)$ 不存在.

定理 1.3.69 $\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} 0, & 0<q<1 \\ 1, & q=1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$, $\lim_{x\to-\infty} q^x = \begin{cases} +\infty, & 0<q<1 \\ 1, & q=1 \\ 0, & q>1 \end{cases}$

註記 1.3.70 此處極限為「$+\infty$」即為不存在, 其意義將在單元1.5 (無窮小與無窮大) 討論.

例 1.3.71 (指數函數, $x\to+\infty$) 技巧: 分子、分母同除以最大底數的冪.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 3^x+2\cdot 4^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3\cdot(\frac{2}{5})^x}{7\cdot(\frac{3}{5})^x+2\cdot(\frac{4}{5})^x}$ 不存在 $(\frac{\text{非}\,0}{0})$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3\cdot(\frac{2}{5})^x}{7+2\cdot(\frac{4}{5})^x} = \dfrac{2-3\cdot 0}{7+2\cdot 0} = \dfrac{2}{7}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 3^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 4^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot(\frac{3}{5})^x-3\cdot(\frac{2}{5})^x}{7+2\cdot(\frac{4}{5})^x} = \dfrac{2\cdot 0-3\cdot 0}{7+2\cdot 0} = 0$

例 1.3.72 (指數函數, $x\to-\infty$) 技巧: 分子、分母同除以最小底數的冪.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 3^x+2\cdot 4^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot(\frac{5}{2})^x-3}{7\cdot(\frac{3}{2})^x+2\cdot 2^x}$ 不存在 $(\frac{\text{非}\,0}{0})$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 2^x}{7\cdot 5^x+2\cdot 2^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot(\frac{5}{2})^x-3}{7\cdot 2^x+2} = \dfrac{2\cdot 0-3}{7\cdot 0+2} = -\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot 5^x-3\cdot 3^x}{7\cdot 4^x+2\cdot 2^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot(\frac{5}{2})^x-3\cdot(\frac{3}{2})^x}{7\cdot 2^x+2} = \dfrac{2\cdot 0-3\cdot 0}{7\cdot 0+2} = 0$

註記 1.3.73 當 $x\to-\infty$ 時, 也可以令 $t=-x$ 換成 $t\to+\infty$ 的情形來計算.

1.4 重要準則與重要極限

夾擠定理

準則 1.4.1 (數列極限的夾擠定理) 如果數列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 滿足:

(1) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, 當 $n > N_0$ 時, $y_n \leq x_n \leq z_n$;

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$,

那麼數列 $\{x_n\}$ 的極限存在, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

證明 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ 可知, $\exists N_1 > 0$, 當 $n > N_1$ 時, 恆有 $|y_n - a| < \varepsilon$, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

由 $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ 可知, $\exists N_2 > 0$, 當 $n > N_2$ 時, 恆有 $|z_n - a| < \varepsilon$, 即

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 當 $n > N$ 時, 有

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. □

例 1.4.2 求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n}$, 其中 $\forall\, i = 1, \ldots, k$, 有 $a_i > 0$.

解 令 $M = \max\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$, 則

$$M = \sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{M^n + \cdots + M^n} = \sqrt[n]{kM^n} = k^{\frac{1}{n}} M,$$

由於

$$\lim_{n\to\infty} M = M = \lim_{n\to\infty} k^{\frac{1}{n}} M,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = M = \max\{a_i : 1 \leq i \leq k\}.$$

例 1.4.3 求 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

解 設 $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$, 可知 x_n 為 $n+1$ 項之和. 觀察:

$$\frac{1}{(n+n)^2} + \frac{1}{(n+n)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

即

$$\frac{n+1}{4n^2} = \frac{n+1}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$

因為 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$, 所以依夾擠定理, 得

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right) = 0.$$

定理 1.4.4 任意實數都是某個有理數列的極限.

證明 任給 $a \in \mathbb{R}$, 定義 $x_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$ (顯然 $\{x_n\}$ 是有理數列), 由

$$na - 1 < \lfloor na \rfloor \le na$$

得

$$a - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \le a,$$

由夾擠定理, 可得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

即 a 是有理數列 $\{x_n\}$ 的極限. □

準則 1.4.5 (函數極限的夾擠定理) 如果函數 f, g, h 滿足:

(1) 存在 $\delta > 0$ (相應地, $X > 0$), 當 $x \in B'(x_0, \delta)$ (相應地, $|x| > X$) 時, 有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$;

(2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$ (相應地, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = A$),

那麼 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (相應地, $\lim_{x \to \infty} f(x)$) 存在, 且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ (相應地, $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$).

註記 1.4.6 條件 (1) 意即: 存在 x_0 或 ∞ 的某個鄰域, 使得只要 x 落在該鄰域內, 都有不等式 $g(x) \le f(x) \le h(x)$ 成立.

例 1.4.7 已知 $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, 證明 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

證明 由於

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

並且

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 = \lim_{x \to x_0} (-|f(x)|),$$

故得 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. □

例 1.4.8 求極限 $\lim_{x \to 0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

解 當 $x \ne 0$ 時,

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x}.$$

因此, 當 $x > 0$ 時, $1 - x \le x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le 1$, 由夾擠定理得 $\lim_{x \to 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$; 當 $x < 0$ 時, 有 $1 - x > x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \ge 1$, 由夾擠定理得 $\lim_{x \to 0^-} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$, 故

$$\lim_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

例 1.4.9 設 $k \in \mathbb{N}$, 求 $\lim_{t \to 0} t^k \sin \frac{1}{t}$.

解 由 $|\sin \frac{1}{t}| \le 1$ 得 $|t^k \sin \frac{1}{t}| \le |t^k|$, 即 $-|t^k| \le t^k \sin \frac{1}{t} \le |t^k|$, 因

$$\lim_{t \to 0} (-t^k) = 0 = \lim_{t \to 0} t^k,$$

所以 $\lim_{t \to 0} t^k \sin \frac{1}{t} = 0$.

定理 1.4.10 (重要極限)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

證明 考慮 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 由引理 1.3.28, 有

$$\sin x < x < \tan x.$$

因 $\sin x \neq 0$, 可將不等式遍除以 $\sin x$, 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \sec x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

注意到, 如果 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, 則 $-x$ 應滿足上式, 而將上式的 x 都換成 $-x$, 其形式不變, 亦即上式對 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 都成立. 由於

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1 = \lim_{x \to 0} 1,$$

依夾擠定理, 即得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

系理 1.4.11 (1) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$;

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$;

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$.

例 1.4.12 (1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t \sin\frac{1}{t} = \lim_{\frac{1}{t}\to 0} \frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 1$ (這裡有用到無窮大與無窮小的關係)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{\sin x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = 1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{2x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$ 或 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\cos x = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\cos\frac{x+a}{2} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right) = \cos\frac{a+a}{2}\cdot 1 = \cos a$

單調有界收斂準則

定義 1.4.13 設 $\{x_n\}$ 為一數列.

(1) 如果 $\{x_n\}$ 滿足條件 $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1}$, 則稱 $\{x_n\}$ 是**遞增數列**或**不減數列**;

(2) 如果 $\{x_n\}$ 滿足條件 $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1}$, 則稱 $\{x_n\}$ 是**遞減數列**或**不增數列**;

(3) 如果 $\{x_n\}$ 滿足條件 $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n < x_{n+1}$, 則稱 $\{x_n\}$ 是**嚴格遞增數列**;

(4) 如果 $\{x_n\}$ 滿足條件 $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n > x_{n+1}$, 則稱 $\{x_n\}$ 是**嚴格遞減數列**;

(5) 如果 $\{x_n\}$ 滿足以上四者其中之一, 我們稱 $\{x_n\}$ 為**單調數列**.

註記 1.4.14 函數也有單調性的概念, 我們將在《單變數函數的導數及其應用》中討論.

準則 1.4.15 (單調有界數列的收斂準則) 單調有界的數列必收斂. 更詳細地說,

(1) 遞增有上界的數列必收斂於其上確界.

(2) 遞減有下界的數列必收斂於其下确界.

證明 我們僅給出 (1) 的證明. 假設數列 $\{x_n\}$ 單調遞增, 且有上界. 由完備公設 (即確界原理; 公理 1.1.3), 知 $L := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 存在.

任予 $\varepsilon > 0$, 依定理 1.1.6, $\exists\, K \in \mathbb{N}$ 使得

$$L - \varepsilon < x_K.$$

由於數列 $\{x_n\}$ 單調遞增, 那麼對所有 $n \geq K$, 有 $x_K \leq x_n$, 從而

$$L - \varepsilon < x_n \leq L,$$

即

$$\forall\, n \geq K, |x_n - L| < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

$\square$

例 1.4.16 設 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n 重根式), 證明數列 $\{x_n\}$ 極限存在, 並求出極限.

證明 觀察可知 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, 且 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n} > \sqrt{3+x_{n-1}} = x_n$, 因此 $\{x_n\}$ 是遞增數列.

現宣稱 $\{x_n\}$ 有上界. 當 $n = 1$ 時, $x_1 = \sqrt{3} < 3$. 假定 $x_k < 3$, 則 $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$, 故 $\{x_n\}$ 有上界. 依單調有界數列的收斂準則 (準則 1.4.15), 可知 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 設 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

由遞迴關係式 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, 得 $x_{n+1}^2 = 3 + x_n$, 兩邊取極限, 得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (3 + x_n),$$

即 $A^2 = 3 + A$, 解得 $A = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$, 取正號, 因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

$\square$

注意 1.4.17 上例的證明過程中, 我們用到了一個事實: 若數列 $\{x_n\}$ 收斂於 A, 且 $k \in \mathbb{N}$ 為一固定的常數, 則 $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = A$. 證明留作習題.

準則 1.4.18 (單調有界函數的收斂準則) (1) 設函數 f 在點 x_0 的某個鄰域 (相應地, 左鄰域、右鄰域) 內單調有界, 則 f 在點 x_0 的極限 (相應地, 左極限、右極限) 存在.

(2) 設函數 f 在 ∞ (相應地, $+\infty$ 或 $-\infty$) 的某個鄰域內單調有界, 則 f 在無窮遠 (相應地, 正無窮遠、負無窮遠) 的極限存在.

證明 省略. $\square$

定理 1.4.19 (重要極限) 極限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

存在, 記為 e.

證明 先考慮 $x>0$ 且 $x=n\in\mathbb{N}$ 時的情形. 設 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, 依二項式定理, 有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

類似地,

$$\begin{aligned}x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\+\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比較 x_n 和 x_{n+1}, 有 $x_n\le x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 單調遞增.

又由

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

得

$$x_n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 有上界. 故由單調有界數列的收斂準則 (準則 1.4.15) 得知 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在, 記

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots.$$

設 $x\in\mathbb{R}$, 當 $x>0$ 時, 有 $n=\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1=n+1$, 因此

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因為

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=e\quad(\text{註: }\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e,$$

並注意到 $x\to+\infty\iff n\to\infty$, 故由夾擠定理 (準則 1.4.1) 得 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

當 $x<0$ 時, 令 $x=-(t+1)$, 則當 $x\to-\infty$ 時, $t\to+\infty$, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-1}\right]^{t+1}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=e.\end{aligned}$$

由於

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

我們有結論:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

□

注意 1.4.20 常數 e 有各種不同的定義方式, 本講義將此極限值作為 e 的定義.

系理 1.4.21 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

證明 應用變數變換, 令 $u=\frac{1}{x}$, 則 $x\to0 \iff u\to\infty$ (詳見單元 1.5), 即得結論. □

定理 1.4.22 設 $x,t,u\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, 則有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{t}=\lim_{u\to0}(1+xu)^{\frac{1}{u}}=e^{x},$$

有時, 記 $\exp x=e^{x}$, 稱為**自然指數函數**.

註記 1.4.23 如果當 $x\to0$ 時, $f(x)\to0$, 則有 $\lim_{x\to0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

例 1.4.24 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{3}{n}\right)\right]=\lim_{n+1\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$
$=e^{3}\cdot(1+0)=e^{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x-1}\right)^{x+1}$, 令 $t=3x-1$, 則

$$\text{原式}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{5}{t}\right)^{\frac{t+4}{3}}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{5}{t}\right)^{\frac{4}{3}}=(e^{5})^{\frac{1}{3}}(1+0)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{5}{3}}$$

注意 1.4.25 (1) 自然指數函數 e^{x} 在 $\mathbb{R}$ 上嚴格遞增, 因此具有反函數 $\log_e x$, 記作 $\ln x$, 其定義域為 $(0,+\infty)$, 滿足 $\forall\, x>0, e^{\ln x}=x, \forall\, x\in\mathbb{R}, \ln e^{x}=x$.

(2) 求函數極限時, 如果遇到形如 $[f(x)]^{g(x)}$ ($f(x)>0, f(x), g(x)$ 均不是常數函數) 的函數 (稱為**冪指函數**), 那麼可以改寫成 $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, 並採用合成函數的極限運算法則來求極限.

定理 1.4.26 若當 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 時, 有 $f(x)\to A>0$ 且 $g(x)\to B$, 則 $[f(x)]^{g(x)}\to A^{B}$.

例 1.4.27 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=e^{1}=e$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

準則 1.4.28 (補充: 柯西準則) 如果沒有需要求出極限值, 可以使用以下判斷極限的存在性的準則:

(1) 設 $\{x_n\}$ 為一數列, 那麼當且僅當 $\{x_n\}$ 收斂時, $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall\,n,m>N$, 都有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ (即 $\{x_n\}$ 是柯西數列).

(2) 設 f 在點 x_0 的某個鄰域由定義, 那麼當且僅當 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在時, $\forall\,\varepsilon, \exists\,\delta>0$ 使得 $\forall\,x_1,x_2\in B'(x_0,\delta)$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. (對於左、右極限仍有類似的準則)

(3) 設 f 在無窮遠有定義, 那麼當且僅當 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在時, $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,X>0$ 使得 $\forall\,x_1,x_2>X$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. (對於 $+\infty, -\infty$, 仍有類似的準則)

證明 定理的必要性的證明是容易的, 故留作習題, 但其充分性牽涉到實數的完備性更深入的討論, 包括聚點的概念和 Bolzano-Weierstrass 定理. □

1.5 無窮小與無窮大

無窮小與無窮大的基本觀念

定義 1.5.1 (1) 設函數 f 在某 $B'(x_0)$ 內有定義, 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, 即

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0\,\text{使得}\,\forall\,x\in D_f\cap B'(x_0,\delta), |f(x)|<\varepsilon,$$

則稱函數 f 為 $x\to x_0$ 時的**無窮小**.

(2) 設函數 f 在 ∞ 的某鄰域內有定義, 若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, 即

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,X>0\,\text{使得只要}\,|x|>X\,\text{, 便有}\,|f(x)|<\varepsilon,$$

則稱函數 f 為 $x\to\infty$ 時的無窮小.

注意 1.5.2 (1) 無窮小與一個「很小」的確定的常數 (如 10^{-999}) 不能混為一談, 因為當自變量在某一變化過程中, 無窮小的絕對值能小於任一給定的正數 ε, 但 10^{-999} 做不到這一點;

(2) 0 是無窮小之中唯一的常數;

(3) 上面僅給出函數的無窮小的概念, 對於數列也有類似的概念. 接下來我們僅討論函數的無窮小與無窮大, 關於數列也有類似的結論, 我們將不再贅述, 除非有數列不適用的部分將會加以說明;

(4) 由數列和函數的運算性質可知, 在自變量的同一變化過程中, 有限個無窮小的和、差、積都是無窮小;

(5) 無窮小可以分為正無窮小及負無窮小, 取決於當 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 時, 函數趨近於 0 的「位置」是否恆在 x 軸上方還是下方.

定理 1.5.3 (無窮小的運算性質) 在自變量的同一變化過程中, 有界函數與無窮小的乘積是無窮小. 即若 $\lim_{x\to r} f(x)=0$, 且存在 r 的某個 (去心) 鄰域及正數 M, 使得只要 x 在該鄰域中, 都有 $|g(x)|\le M$, 則 $\lim_{x\to r} f(x)g(x)=0$, 其中 $r\in\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$.

證明 以下僅提供 $x\to x_0$ (有限值) 時的證明, 而 $x\to\infty$ 時的證明留作習題. 設 $\exists\,M>0$ 且 $\exists\,a>0$ 使得 $\forall\,x\in D_g\cap B'(x_0,a)$, 都有 $|g(x)|\le M$.

任予 $\varepsilon>0$, 因為 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, 所以 $\exists\,\eta>0$, 當 $x\in D_f\cap B'(x_0,\eta)$ 時, 有

$$|f(x)|\le\frac{\varepsilon}{M},$$

取 $\delta = \min\{a, \eta\}$, 則當 $x \in D_f \cap D_g \cap B'(x_0, \delta)$ 時, $|g(x)| \le M$ 和 $f(x) \le \frac{\varepsilon}{M}$ 同時成立, 從而

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

即 $f(x)g(x)$ 是 $x \to x_0$ 時的無窮小. □

例 1.5.4 求極限 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 由於 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, 且 $|\sin x| \le 1$ 表 $\sin x$ 是有界函數, 因此

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = \text{無窮小} \cdot \text{有界函數} = 0.$$

定義 1.5.5 (1) 如果 $\forall\, Y > 0, \exists\, \delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, 恆有 $|f(x)| > Y$, 則稱函數 $f(x)$ 為 $x \to x_0$ 時的**無窮大**, 記作 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

(2) 如果 $\forall\, Y > 0, \exists\, X > 0$, 當 $|x| > X$ 時, 恆有 $|f(x)| > Y$, 則稱函數 $f(x)$ 為 $x \to \infty$ 時的無窮大, 記作 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(3) 若將以上定義中的 $|f(x)| > Y$ 改成 $f(x) > Y$, 則有 $\lim_{x\to x_0(\text{或}\,\infty)} f(x) = +\infty$, 稱 $f(x)$ 為當 $x \to x_0$ (或 ∞) 時的**正無窮大**.

(4) 若將以上定義中的 $|f(x)| > Y$ 改成 $f(x) < -Y$, 則有 $\lim_{x\to x_0(\text{或}\,\infty)} f(x) = -\infty$, 稱 $f(x)$ 為當 $x \to x_0$ (或 ∞) 時的**負無窮大**.

注意 1.5.6 (1) 這裡 $\lim_{x\to x_0(\text{或}\,\infty)} f(x) = \infty$ 只是借用了極限的符號, 並不表示函數 f 存在極限, 因為 ∞ 不是數, 不可以與絕對值很大的常數混淆, 無窮是絕對值無限增大的變量.

(2) 若 $x_n \to +\infty$ 或 $x_n \to -\infty$, 則 $x_n \to \infty$, 反之未必成立, 比如 $x_n = (-1)^n n$.

註記 1.5.7 (1) $f(x) \to \pm\infty$ 且 $g(x) \to \pm\infty \implies f(x) + g(x) \to \pm\infty$;

(2) $f(x) \to \pm\infty$ 且 $g(x) \to \mp\infty \implies f(x) - g(x) \to \pm\infty$;

(3) $f(x) \to \infty$ 且 $|g(x)| \ge M > 0 \implies f(x) \cdot g(x) \to \infty$;

(4) $f(x) \to \pm\infty$ 且 $g(x) \to \pm\infty \implies f(x) \cdot g(x) \to +\infty$;

(5) $f(x) \to \pm\infty$ 且 $g(x) \to \mp\infty \implies f(x) \cdot g(x) \to -\infty$;

(6) $f(x) \to \infty$ 且 $g(x)$ 有界 $\implies f(x) + g(x) \to \infty$;

(7) 無窮大函數必無界, 反過來未必成立, 如 $x \sin x$ 無界但不是 $x \to \infty$ 時的無窮大.

注意 1.5.8 (1) 不像定理 1.5.3, 無窮大量與有界函數的乘積未必會得到無窮大量, 例如 0 和 $\sin x$ 都是有界函數, 而 x 為無窮大量, 但 $0 \cdot x$ 和 $x \cdot \sin x$ 都不是無窮大量 (前者極限為 0, 後者極限不存在 [振盪]);

(2) 無窮大量與無界量的等價敘述:

$$f \text{ 為 } x_0 \text{ 的無窮大量} \iff \forall\, \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0, \text{ 都有 } |f(x_n)| \to +\infty;$$

$$f \text{ 為 } x_0 \text{ 的無界量} \iff \exists\, \{x_n\} \subset D_f \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0, \text{ 都有 } |f(x_n)| \to +\infty.$$

定理 1.5.9 設函數 f, g 在 ∞ 的某個鄰域中有定義,

(1) 若存在 $X > 0$, 當 $x > X$ 時, 恆有 $f(x) \ge g(x)$, 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, 則 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 若存在 $X < 0$, 當 $x < X$ 時, 恆有 $f(x) \ge g(x)$, 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, 則 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

證明 顯而易見. □

例 1.5.10 證明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

證明 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{1}{M}$, 則當 $0<|x-1|<\delta$ 時, 恆有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>\frac{1}{\delta}=M.$$

□

例 1.5.11 考慮函數 $f(x)=e^{1/x}$, 我們有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,$$

因此 $f(x)$ 不是當 $x\to 0$ 時的無窮大和無窮小, 但它是當 $x\to 0^+$ 時的無窮大及當 $x\to 0^-$ 時的無窮小.

定理 1.5.12 (無窮大與無窮小的關係) 在自變量的同一變化過程中,

(1) 如果 $f(x)$ 為無窮大, 則 $\frac{1}{f(x)}$ 為無窮小;

(2) 如果 $f(x)$ 為無窮小, 且 $f(x)\neq 0$, 則 $\frac{1}{f(x)}$ 為無窮大.

證明 此處僅證明 $x\to x_0$ 的情形, $x\to\infty$ 的情形則留作習題.

$\forall\,\varepsilon>0$, 由於 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\exists\ >0$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, $|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}$, 即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

故 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

反之, $\forall\,Y>0$, 因 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0$, 所以 $\exists\,\delta>0$, 當 $0<|x-x_0|<\delta$ 時, $|f(x)|<\frac{1}{Y}$, 即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>Y,$$

故 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$. □

例 1.5.13 求 $\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{3x^2-2x-1}$.

解 因為

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+1}{2x+5}=\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1-1}{2\cdot 1+5}=0,$$

由無窮大與無窮小的關係, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

註記 1.5.14 為了方便敘述, 如果自變量的趨勢為定值或趨向無窮遠處與我們的討論無關, 我們就將 $\lim_{x\to x_0}$ 和 $\lim_{x\to\infty}$ 統一以 $\lim$ 表示.

例 1.5.15 若 f,g 為等價正無窮小, 則 $\ln f$ 與 $\ln g$ 為等價負無窮大.

證明

$$\lim\left(\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}-1\right)=\lim\frac{\ln f(x)-\ln g(x)}{\ln g(x)}=\lim\frac{\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}=\frac{0}{-\infty}=0\implies\lim\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}=1$$

□

例 1.5.16 設

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Z};\\ x, & x\notin\mathbb{Z},\end{cases}$$

$g(x)=x$, 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

解 顯然 f,g 都是 $x\to+\infty$ 時的無窮大, 但當 $x\neq 0$ 時,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Z};\\ 1, & x\notin\mathbb{Z},\end{cases}$$

即當 $x\to+\infty$ 時, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在很大的正整數點及 1 之間振盪, 因此極限不存在 (可用 $\varepsilon-X$ 定義嚴格證明).

注意 1.5.17 (1) 當 $x\to 0$ 時, $x,2x,\sin x,x^2,x\sin\frac{1}{x}$ 均為無窮小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{ 不存在}.$$

也就是說, 兩個無窮小的商的極限「未定」, 故稱此類極限為 $\frac{0}{0}$ **型未定式極限**, 或 $\frac{0}{0}$ **不定型**.

(2) 當 $x\to+\infty$ 時, $2x^2,x^3+x,e^x,3x^3,x$ 及上例的 $f(x)$ 均為無窮大, 但

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3+x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{3x^3}=\frac{1}{3},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\text{ 不存在}.$$

也就是說, 兩個無窮大的商的極限「未定」, 故稱此類極限為 $\frac{\infty}{\infty}$ **型未定式極限**, 或 $\frac{\infty}{\infty}$ **不定型**.

(3) 當 $x\to 0^+$ 時, $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\ln\frac{1}{x},\ln\frac{2}{x},\frac{1-x}{\sqrt{x}},\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$ 均為同號的 (正) 無窮大, 但

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}-\ln\frac{2}{x}\right)=-\ln 2,\qquad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}(x-2)}{1-x}=0.$$

也就是說, 兩個同號無窮大的差的極限「未定」(兩負無窮大的差亦是如此), 故稱此類極限為 $\infty-\infty$ **型未定式極限**, 或 $\infty-\infty$ **不定型**.

(4) 其餘的不定型有: $0\cdot\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$, 它們都可以化為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 即

$$0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}\quad\text{或}\quad 0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\qquad 1^\infty=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0},$$
$$0^0=e^{0\ln 0}=e^{0\cdot\infty},\qquad \infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}.$$

例 1.5.18 求 $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$.

解 當 $x\to+\infty$ 時, x^2,x 均為正無窮大量, 但 $(+\infty)-(+\infty)$ 為不定型, 無法直接得到結論. 而

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)=+\infty\cdot+\infty=+\infty.$$

定義 1.5.19 設 f,g 為自變量的同一變化過程中的無窮小 (相應地, 無窮大), 且 $f\neq 0$,

(1) 若 $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, 則稱 g 是比 f **更高階的無窮小** (相應地, **更低階的無窮大**), 記作 $g = o(f)$;

(2) 若 $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$, 則稱 g 是比 f **更低階的無窮小** (相應地, **更高階的無窮大**);

(3) 若 $\lim \frac{g(x)}{f(x)} = C \neq 0$, 則稱 g 是 f 的**同階無窮小** (相應地, **同階無窮大**), 當 $C = 1$ 時, 稱 g 和 f 是**等價無窮小** (相應地, **等價無窮大**), 記作 $f \sim g$;

(4) 若 $\lim \frac{g(x)}{(f(x))^k} = C \neq 0$, 其中 $k > 0$, 則稱 g 是 f 的 k **階無窮小** (相應地, k **階無窮大**).

例 1.5.20 (1) 由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{4x} = 0$ 知, 當 $x \to 0$ 時, x^3 是比 $4x$ 高階的無窮小, 記作 $x^2 = o(3x)$ $(x \to 0)$;

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 知, 當 $x \to 0$ 時, $\sin x$ 和 x 是等價無窮小, 記作 $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$;

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ 知, 當 $x \to 2$ 時, $x^2 - 4$ 是 $x - 2$ 的同階無窮小;

(4) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty$ 知, 當 $n \to \infty$ 時, $\dfrac{1}{n}$ 是比 $\dfrac{1}{n^2}$ 低階的無窮小;

(5) 由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ 知, 當 $x \to 0$ 時, $1 - \cos x$ 是關於 x 的二階無窮小, 也說 $1 - \cos x$ 和 x^2 是同階無窮小.

例 1.5.21 (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{x^3+1} = +\infty$ 知, 當 $x \to +\infty$ 時, x^4 是比 $x^3 + 1$ 更高階的無窮大;

(2) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1} = 0$ 知, 當 $x \to +\infty$ 時, $\ln x$ 是比 $x^2 + 1$ 更低階的無窮大, 記作 $\ln x = o(x^2 + 1)$ $(x \to -\infty)$;

(3) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ 知, 當 $x \to +\infty$ 時, x 和 $\sqrt{x^2+1}$ 是等價無窮大, 記作 $x \sim \sqrt{x^2+1}$ $(x \to 0)$;

(4) 由 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{3x+1} = \dfrac{2}{3}$ 知, 當 $x \to -\infty$ 時, $2x - 1$ 是 $3x + 1$ 的同階無窮大.

例 1.5.22 證明當 $x \to 0$ 時, $\sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{1}{2}x$.

證明 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1} = 1.$ □

定理 1.5.23 設 f, g 為自變量的同一變化過程中的無窮小 (或無窮大), 那麼 $f \sim g \iff g = f + o(f)$.

證明 必要性的證明: 設 $f \sim g$, 則

$$\lim \frac{g-f}{f} = \lim \left(\frac{g}{f} - 1\right) = \lim \frac{g}{f} - \lim 1 = 1 - 1 = 0,$$

所以 $g - f = o(f)$, 即 $g = f + o(f)$.

充分性的證明: 設 $g = f + o(f)$, 則

$$\lim \frac{g}{f} = \lim \frac{f + o(f)}{f} = \lim \left(1 + \frac{o(f)}{f}\right) = \lim 1 + \lim \frac{o(f)}{f} = 1 + 0 = 1,$$

所以 $f \sim g$. □

定理 1.5.24 (等價無窮小替換) 若無窮小量 $h(x) \sim l(x)$, 且 $\lim l(x)f(x)$ 存在, 則有

(1) $\lim h(x) \cdot f(x) = \lim l(x) \cdot f(x)$;

(2) $\lim \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim \dfrac{f(x)}{l(x)}$.

註記 1.5.25 $\lim h(x) \cdot f(x)$ 和 $\lim l(x) \cdot f(x)$ 同時存在或同時不存在; $\lim \frac{f(x)}{h(x)}$ 和 $\lim \frac{f(x)}{l(x)}$ 同時存在或同時不存在.

證明 (1) $\lim h(x)f(x) = \lim \dfrac{h(x)}{l(x)} l(x)f(x) = \lim l(x)f(x)$;

(2) $\lim \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim \dfrac{f(x)}{l(x)} \dfrac{l(x)}{h(x)} = \lim \dfrac{f(x)}{l(x)}$.

□

註記 1.5.26 (等價無窮大替換) 由以上定理的 (2) 以及定理 1.5.12 可看出, 等價無窮大也有類似 (1) 的替換技巧; 而由 (1) 可看出, 等價無窮大也有類似 (2) 的替換技巧. 因此我們將定理 1.5.24 的條件中的 $h(x)$ 和 $l(x)$ 改成等價無窮大, 定理仍成立.

注意 1.5.27 定理 1.5.23 及註記 1.5.26 說明, 如果 φ 及 ψ 是自變量同一變化過程中的無窮大, 且 φ 比 ψ 高階, 則在極限中可直接略去所有較低階的項及有界項, 只留下最高階的項. 例如,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n},$$

或者例如當 $x \to +\infty$ 時, $\ln(1+x) \sim \ln x$.

等價無窮小的應用

定理 1.5.28 (常用無窮小替換公式) 當 $x \to 0$ 時,

(1) $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$;

(2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$; $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ $(\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0)$;

(3) $x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$; $a^x - 1 \sim x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$.

證明 (1) 依定理 1.4.10, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$;

(3) 令 $t = \sin^{-1} x$, 則當 $x \to 0$ 時, $t \to 0$, 於是 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$;

(4) 令 $t = \tan^{-1} x$, 則當 $x \to 0$ 時, $t \to 0$, 於是 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = 1$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1^2 = 1$;

(6) 令 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 則當 $x \to 0$ 時, $y \to e$, 於是 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1$ (宣稱 $\lim_{y\to e} \ln y = \ln e$ 並使用 $\varepsilon - \delta$ 語言嚴格證明);

(7) 令 $e^x - 1 = t$, 則 $x = \ln(1+t)$, 當 $x \to 0$ 時, $t \to 0$, 於是 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$ (見定理 1.7.27);

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\right)\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=1.$

□

註記 1.5.29 在上述等價無窮小中, 如果 $f(x)$ 也是無窮小, 則以 $f(x)$ 代替以上公式中的 x 仍成立. 例如, 當 $x\to 0$ 時, x^2 是無窮小, 且有 $\sin x^2\sim x^2$.

例 1.5.30 (用等價無窮小代換公式求極限) (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a}=e^a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{x-a}-1}{x-a}=e^a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-a}{x-a}=e^a\cdot 1=e^a$

例 1.5.31 當 $x\to 0$ 時, $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 與 $\cos x-1$ 為等價無窮小, 求常數 α 的值.

解 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}\alpha=1,$$

得 $\alpha=-\frac{3}{2}$.

注意 1.5.32 (1) 被代換的量必須是等價無窮小.

(2) 被代換的量, 作為被乘除的元素時可以直接代換, 但作為加減元素則不能直接代換 (以下提供一個例子).

例 1.5.33 求極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 錯解: 因為當 $x\to 0$ 時, $\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.\quad(\text{錯誤!})$$

正解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}$$

註記 1.5.34 雖然當 $x\to 0$ 時, $\tan x-\sin x$ 確實是無窮小, 但 $\lim_{x\to 0}\frac{0}{\tan x-\sin x}=0\neq 1$, 即 0 是比 $\tan x-\sin x$ 高階的無窮小, 因此以上錯解中把無窮小 $\tan x-\sin x$ 直接替換成 0 並不是等價無窮小替換.

注意 1.5.35 定理 1.5.24 告訴我們: 在計算極限的過程中, 極限式中的無窮小及無窮大**乘積因子**可以直接等價替換, 但例 1.5.33 表明無窮小或無窮大不一定能在加減項之間進行等價替換, 因為替換後可能會因為兩個無窮小或無窮大直接互相消去導致丟失更高階的無窮小 (實際上, 等價無窮小的本質就是低階泰勒展開, 將來會接觸到函數的泰勒展開; 而上例中 $\tan x$ 及 $\sin x$ 可以分別替換成 $x+\frac{1}{3}x^3$ 及 $x-\frac{1}{6}x^3$, 這裡的 x^3 項會發揮作用). 需要補上額外的條件, 才可以將加減項中的無窮小或無窮大等價替換.

命題 1.5.36 設有等價無窮小 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c \notin \{0, 1\}$, 那麼 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$. 也就是說, 兩個同階但非等價的無窮小之差的每一項都可以用與之等價的無窮小代換.

證明 因為 $\lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = 1$, $\lim \frac{\beta}{\beta_1} = 1$, 所以

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha_1 - \beta_1} = \lim \frac{\frac{\alpha}{\beta} - 1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1} \cdot \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{c-1}{c-1} \cdot 1 = 1,$$

故 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$. □

例 1.5.37 當 $x \to 0$ 時, $\tan 3x - \sin x \sim 3x - x = 2x$.

例 1.5.38 當 $x \to 0$ 時, $\ln(1 + x - x^2) - x$ 不能替換成 $x - x^2 - x$, 因為

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (1 - x) = 1,$$

不滿足命題條件.

命題 1.5.39 設有等價無窮小 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = c \notin \{0, -1\}$, 那麼 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$. 也就是說, 兩個同階但非等價的無窮小之和的每一項都可以用與之等價的無窮小代換.

證明 因為 $\lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = 1$, $\lim \frac{\beta}{\beta_1} = 1$, 所以

$$\lim \frac{\alpha + \beta}{\alpha_1 + \beta_1} = \lim \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1} + 1} \cdot \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{c+1}{c+1} \cdot 1 = 1,$$

故 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$. □

註記 1.5.40 此命題相當於將條件中的 β 及 β_1 看作命題 1.5.36 中的 $-\beta$ 及 $-\beta_1$, 故此處不再多舉例子.

命題 1.5.41 設有等價無窮小 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, 且 $\alpha\beta \geq 0$(即 α, β 是同號的無窮小), 那麼 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$. 也就是說, 兩個**同號**無窮小之和的每一項都可以用與之等價的無窮小代換.

例 1.5.42 當 $x \to 0$ 時, $\tan 3x + \sin x \sim 3x + x = 4x$.

等價無窮大的應用

定理 1.5.43 (常用無窮大替換公式) 設 $m > n > 0$, $ab \neq 0$, 那麼

(1) 當 $x \to \infty$ 時, $ax^m + bx^n \sim ax^m$ (即多項式只留下最高次項);

(2) 當 $x \to +\infty$ 時, $am^x + bn^x \sim am^x$ (即指數函數的線性組合式只留下最大底數的項);

(3) 當 $x \to -\infty$ 時, $am^x + bn^x \sim bn^x$ (即指數函數的線性組合式只留下最小底數的項);

(4) 當 $x \to +\infty$ 時, $\ln(1 + x^\alpha) \sim \alpha \ln x$ $(\alpha > 0)$;

(5) 若 f, g 是同一極限過程的等價正無窮大, 則 $\ln f(x) \sim \ln g(x)$ (即對數函數的真數部分可直接做等價正無窮大替換);

(6) 若 f, g 是同一極限過程的等價正無窮大, $\mu > 0$, 則 $[f(x)]^\mu \sim [g(x)]^\mu$ (即冪函數的底數部分可直接做等價正無窮大替換);

(7) (司特林公式) 當 $n \to \infty$ 時, $\ln(n!) \sim n \ln n$, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

注意 1.5.44 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同一極限過程的等價無窮大推不出 $e^{f(x)}$ 和 $e^{g(x)}$ 也是該極限過程的等價無窮大. 例如: $x \sim x+1$ $(x \to +\infty)$, 但

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e}.$$

定理 1.5.45 如果 f, g 為自變量同一變化過程中同號的無窮大 (即同為正無窮大或同為負無窮大), 且 $\lim(f-g)$ 存在, 那麼 $f \sim g$.

證明 設 $\lim(f-g) = A$, 那麼

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \left(\frac{f-g}{g} + 1\right) = \lim(f-g) \cdot \lim \frac{1}{g} + 1 = A \cdot 0 + 1 = 1.$$

□

例 1.5.46 (用等價無窮大代換公式求極限) (1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3e^x}{3x^2+2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x}{2e^x} = \frac{3}{2}$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2\sin n}{3n^2+6n+\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{3n^2} = \frac{4}{3}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2\cdot 2^x+3\cdot 3^x}{4\cdot 4^x+2\cdot 2^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cdot 2^x}{2\cdot 2^x} = 1.$

註記 1.5.47 對於分子、分母中各具有若干項和差形式的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型極限, 總可以保留最高階的無窮大, 而略去其他較低階的無窮大或有界量.

例 1.5.48 求

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)\cdots\left(x^n+1\right)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 略去所有有界量, 即 $k=1,2,\ldots,n$, 都有 $x^k+1 \sim x^k$, $\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}} \sim \left[(nx)^n\right]^{\frac{n+1}{2}} = (nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x^2\cdot\cdots\cdot x^n}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

例 1.5.49 求極限 $\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{1-x}-1\right)\cdot\ln\left(1+e^{1/x}\right)$.

解 無窮小替換:

$$\sqrt{1-x}-1 \sim -\frac{1}{2}x;$$

無窮大替換:

$$\ln\left(1+e^{1/x}\right) \sim \ln e^{1/x} = \frac{1}{x};$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

定理 1.5.50 當 $x \to +\infty$ 時, 冪指函數、階乘 (Γ 函數)、指數函數、冪函數和對數函數有如下關係:

$$x^x \gg x! \gg a^x \gg x^\mu \gg \log_b x,$$

其中, $a,b>1$, $\mu>0$, 而 $x!$ 看作 $n!$, 用來處理數列的極限, 這裡只是借用符號.

證明 $a^x \gg x^\mu$ 的證明: 先考慮 $\mu = k \in \mathbb{N}$ 的情形, 令 $a = 1 + c$ $(c > 0)$, 則對任何 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$a^n = (1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \cdots + c^n > \frac{n(n-1)}{2}c^2,$$

從而

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{(n-1)c^2},$$

依夾擠定理，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

那麼

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k = 0.$$

由於

$$0 < \frac{x^k}{a^x} \leq \frac{(1+\lfloor x \rfloor)^k}{a^{\lfloor x \rfloor}},$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

對於一般的 $\mu > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}$, $k > \mu$, 則

$$0 < \frac{x^\mu}{a^x} \leq \frac{x^k}{a^x} \quad (x > 1),$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

$\log_b x \ll x^\mu$ 的證明: 令 $y = \log_b x$, 則 $x = b^y$, 當 $x \to +\infty$ 時, $y \to +\infty$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\mu} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(a^\mu)^y} = 0.$$

餘者留作習題. □

註記 1.5.51 命題 1.5.36, 1.5.39, 1.5.41 中的所有「無窮小」改成「無窮大」, 結論仍成立.

例 1.5.52 (1) 因為

$$\sqrt{3x \pm 1} \sim \sqrt{3x} \quad (x \to +\infty) \quad 且 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x-1}} = 1 \notin \{0, -1\},$$

所以依命題 1.5.39 可知,

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1} \sim \sqrt{3x} + \sqrt{3x} = 2\sqrt{3x} \quad (x \to +\infty).$$

類似地, 有

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \sim 2\sqrt{x} \quad (x \to +\infty),$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{3x}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{3}.$$

(2) 當 $x \to +\infty$ 時, 因為

$$\sqrt{4x^2-x+1} \sim 2x \quad (x \to +\infty),$$

但

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1,$$

所以極限

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-x+1} - 2x\right)$$

無法直接依命題 1.5.36 寫成 $\lim_{x\to+\infty}(2x-2x)=0$. 實際上, 正解為

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2-x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{4x^2-x+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x+2x} = -\frac{1}{4}.$$

例 1.5.53 求 $\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{4n^2+n}\pi$.

解 錯解: 代換 $4n^2+n \sim 4n^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{4n^2+n}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{4n^2}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin 4n\pi = 0 \quad (\times)$$

正解:

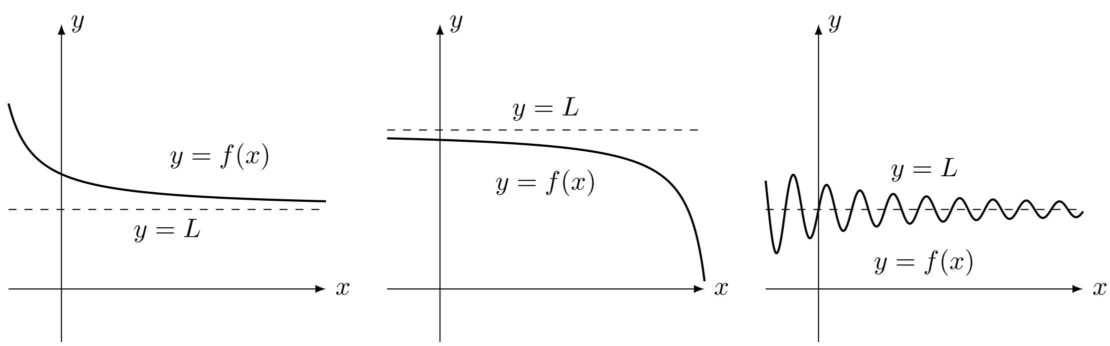
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{4n^2+n}\pi &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi \\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{\sqrt{4n^2}+2n}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

1.6 漸近線

定義 1.6.1 如果

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A,$$

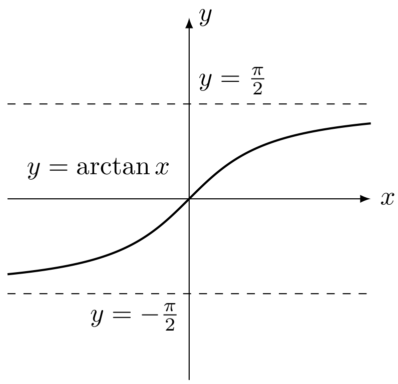
那麼稱直線 $y=A$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形的**水平漸近線**.

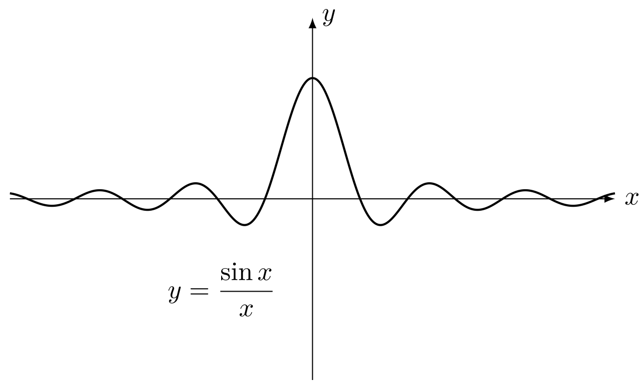


例 1.6.2 因為

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

所以直線 $y=\frac{\pi}{2}$ 和 $y=-\frac{\pi}{2}$ 為函數 $y=\arctan x$ 圖形的水平漸近線, x 軸是函數 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的水平漸近線.





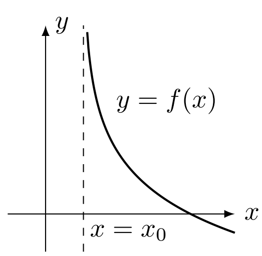
註記 1.6.3 (1) 漸近線跟曲線允許相交.

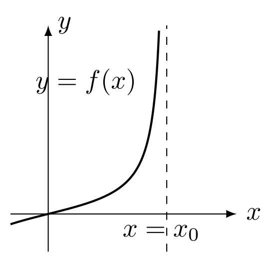
(2) 設 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ 為非零多項式函數, 其中 $a_n, b_m \neq 0$, 若 $\deg f = \deg g$, 則函數 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 圖形必有水平漸近線 $y = \frac{a_n}{b_m}$; 若 $\deg f < \deg g$, 則函數 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 圖形必有水平漸近線 $y = 0$.

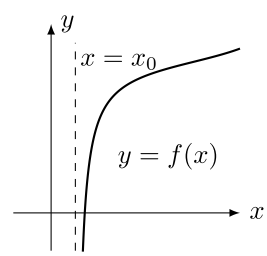
定義 1.6.4 若

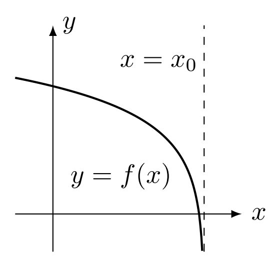
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty,$$

則稱直線 $x = x_0$ 為函數 $y = f(x)$ 圖形的**鉛直漸近線**.







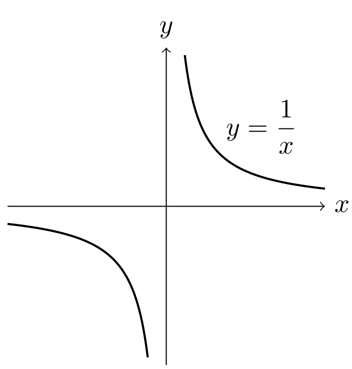


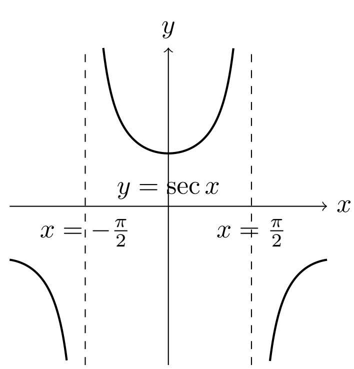
例 1.6.5 因為

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \sec x = -\infty, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \sec x = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec x = -\infty,$$

所以 y 軸是函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的鉛直漸近線, 直線 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 是函數 $f(x) = \sec x$ 曲線的兩條鉛直漸近線.





註記 1.6.6 若 $f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)q(x)}$ 且 $p(a) \neq 0$, 則 $y = f(x)$ 有鉛直漸近線.

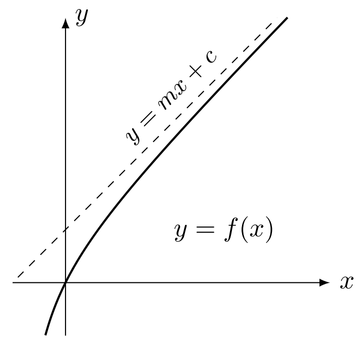
定義 1.6.7 若

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+c)]=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+c)]=0,$$

則稱直線 $y=mx+c$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形的**斜漸近線**.

註記 1.6.8 m 和 c 的求法:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad c=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$$

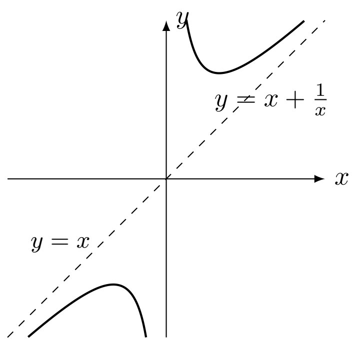


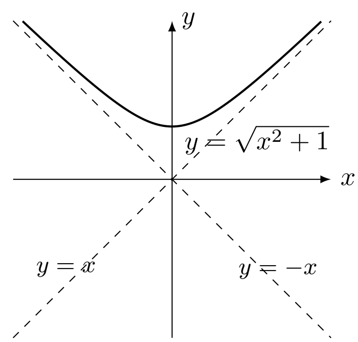
例 1.6.9 因為

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0,$$

所以直線 $y=x$ 是函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 曲線的斜漸近線, 直線 $y=\pm x$ 是函數 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 曲線的斜漸近線.





註記 1.6.10 若有理函數可寫成帶分式 $f(x)=mx+c+\frac{r(x)}{q(x)}$ (即當 $f(x)$ 為假分式時, 分子比分母的次數恰多 1), 則有斜漸近線 $mx+c$.

定義 1.6.11 若

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

則稱直線 $y=g(x)$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形的**漸近曲線**.

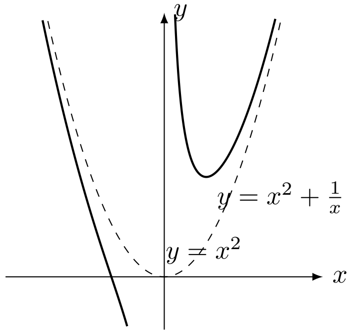
例 1.6.12 因為

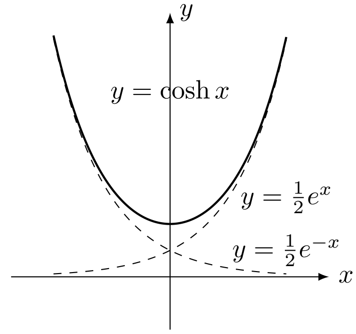
$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-x^2\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cosh x-\frac{e^x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\cosh x-\frac{e^{-x}}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{2}=0,$$

所以曲線 $y=x^2$ 是函數 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 圖像的漸近曲線; 曲線 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ 和 $y=\frac{1}{2}e^x$ 是函數 $f(x)=\cosh x$ 的兩條漸近曲線.





註記 1.6.13 若有理函數可寫成帶分式 $f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ (即當 $f(x)$ 為假分式時, 分子比分母的次數多至少 2), 則有漸近曲線 $y = g(x)$.

補充 1.6.14 設有參數曲線

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

(1) 當

$$\lim_{t\to t_1} \varphi(t) = a \quad 且 \quad \lim_{t\to t_1} \psi(t) = \infty$$

時, 曲線有鉛直漸近線 $x = a$.

(2) 當

$$\lim_{t\to t_2} \varphi(t) = \infty \quad 且 \quad \lim_{t\to t_2} \psi(t) = b$$

時, 曲線有水平漸近線 $y = b$.

(3) 當

$$\lim_{t\to t_3} \varphi(t) = \infty \quad 且 \quad \lim_{t\to t_3} \psi(t) = \infty \quad 且 \quad k = \lim_{t\to t_3} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \quad 且 \quad c = \lim_{t\to t_3} [\psi(t) - k\varphi(t)]$$

時, 曲線有斜漸近線 $y = kx + c$.

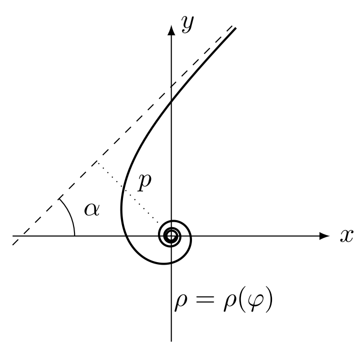
補充 1.6.15 設有極曲線

$$\rho = \rho(\varphi) \quad 或 \quad F(\rho, \varphi) = 0,$$

如果極限

$$\alpha = \lim_{\rho\to+\infty} \varphi \quad 及 \quad p = \lim_{\rho\to+\infty} [\rho \sin(\alpha - \varphi)]$$

存在 (註: $\rho \to +\infty$ 可替換成 $\varphi \to \alpha$), 那麼該極曲線必有漸近線, 其傾斜角為 α, 而極點到其的距離為 p.



補充 1.6.16 曲線 $F(x, y) = 0$ 的漸近線的求法:

(1) 斜漸近線或水平漸近線 $y = kx + b$: 先把 $y = kx + b$ 代入原方程得

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0,$$

再用

$$\begin{cases} A_0(k) = 0 \\ A_1(k, b) = 0 \end{cases}$$

判斷 k 和 b 的值.

(2) 鉛直漸近線 $x = a$: 先把 $x = a$ 代入原方程得

$$B_m y^m + B_{m-1} y^{m-1} + \cdots + B_1 y + B_0 = 0,$$

再用

$$B_1(a) = 0$$

判斷 a 的值.

註記 1.6.17 若 $F(x, y)$ 為雙變數多項式, 且 y 和 x 的最高次數相等, 則 $F(x, y) = 0$ 可能有斜漸近線.

1.7 函數的連續性與間斷點

連續函數的定義與性質

定義 1.7.1 設函數 f 在點 x_0 的某個鄰域有定義, 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

則稱函數 f 在點 x_0 處**連續**, 即

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ 當 } |x - x_0| < \delta \text{ 時, 恆有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

注意 1.7.2 和極限概念中有分左、右極限一樣, 函數也有分左、右連續.

(1) 若 $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 則稱函數 f 在點 x_0 處**右連續**;

(2) 若 $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 則稱函數 f 在點 x_0 處**左連續**.

顯然有:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

註記 1.7.3 函數在點 x_0 處連續的三要素:

(1) 函數在點 x_0 處有定義, 即 $f(x_0)$ 存在;

(2) 極限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 即 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$;

(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定義 1.7.4 (1) 若函數 f 在開區間 (a, b) (或 $(-\infty, +\infty)$) 內處處連續 (每一點逐點連續), 則稱函數 f 在開區間 (a, b) (或 $(-\infty, +\infty)$) 內連續.

(2) 若函數 f 在開區間 (a, b) 內連續, 且在 $x = a$ 處右連續, 在 $x = b$ 處左連續, 則稱函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續.

對於半開半閉的區間或半無窮區間仍有類似的定義.

例 1.7.5 設 $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 為多項式函數, 由極限的運算法則可知, P 在 $(-\infty, +\infty)$ 內連續, 即

$$\forall\, x_0 \in (-\infty, +\infty), \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

例 1.7.6 設 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 P, Q 為多項式, 若 $Q(x_0) \neq 0$, 則有

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0),$$

即 F 在定義域內的每一點處都連續.

例 1.7.7 設 $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 \geq 0$, 由 $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ 可知 f 在 $[0, +\infty)$ 內連續.

註記 1.7.8 當 $x_0 = 0$ 時, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, 因為 f 在 0 的左側沒有定義.

定理 1.7.9 設 f 在點 x_0 處有定義, 那麼若且唯若 f 在點 x_0 處連續, 則對所有滿足 $x_n \neq x_0$ 且 $x_n \to x_0$ 的數列 $\{x_n\} \subset D_f$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ 都成立.

證明 充分性: 任給 $\varepsilon > 0$, 因為 f 在點 x_0 處連續, 所以

$$\exists\, \delta > 0\,,\text{當}\, |x - x_0| < \delta\, \text{時, 恆有}\, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

設有數列 $\{x_n\}$ 滿足 $x_n \neq x_0$ 且 $x_n \to x_0$, 那麼對於以上的 δ,

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\,,\text{當}\, n \neq N\, \text{時, 恆有}\, |x_n - x_0| < \delta,$$

故對於任給的該 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n \geq N$ 時, $|x_n - x_0| < \delta$, 從而

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

必要性: 假設 f 在點 x_0 處不連續, 那麼

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\, \text{使得}\, \forall\, \delta > 0, \exists\, x \in D_f\, \text{滿足}\, |x - x_0| < \delta\, \text{且}\, |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

對於該 $\varepsilon_0 > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, 則

$$\exists\, \{x_n\} \subset D_f\, \text{使}\, |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\, \text{且}\, |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0,$$

所以數列 $\{x_n\}$ 收斂於 x_0, 但數列 $\{f(x_n)\}$ 不收斂於 $f(x_0)$, 矛盾, 故必須要有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

□

定義 1.7.10 設函數 f 在 x_0 的去心鄰域內有定義. 若 f 滿足以下三種情況的其中一種:

(1) 在 $x = x_0$ 處沒有定義;

(2) 雖然在 $x = x_0$ 處有定義, 但 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 ($f(x_0^+), f(x_0^-)$ 有至少一者不存在, 或兩者均存在但不相等) ;

(3) 雖然在 $x = x_0$ 處有定義, 且 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x)$,

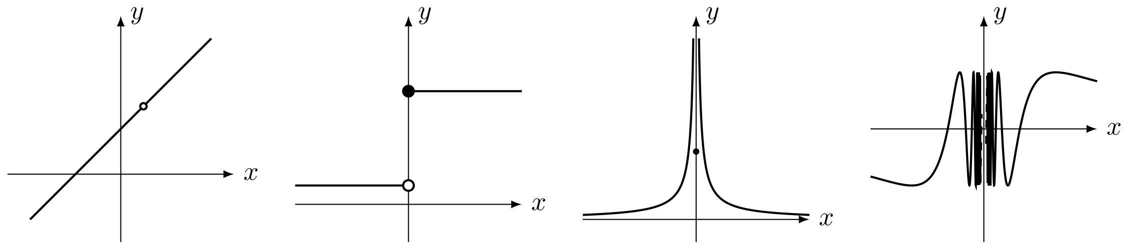
則稱 f 在 $x = x_0$ 處**間斷** (或**不連續**), x_0 稱為 f 的**間斷點**或**不連續點**.

定義 1.7.11 設 x_0 為 f 的間斷點,

$$\begin{cases} \textbf{第一類間斷點}\text{: } f(x_0^+), f(x_0^-)\,\text{均存在} \begin{cases} \textbf{可去間斷點}\text{: } f(x_0^+) = f(x_0^-)\,\text{但}\, f(x_0)\,\text{沒有定義} \\ \textbf{跳躍間斷點}\text{: } f(x_0^+) \neq f(x_0^-) \end{cases} \\ \textbf{第二類間斷點}\text{: } f(x_0^+), f(x_0^-)\,\text{至少有一者不存在} \begin{cases} \textbf{無窮間斷點}\text{: } f(x_0^+) = \infty\,\text{或}\, f(x_0^-) = \infty \\ \textbf{震盪間斷點}\text{: } f(x_0^+)\,\text{或}\, f(x_0^-)\,\text{在某區間上變動無限多次} \end{cases} \end{cases}$$

註記 1.7.12 震盪間斷點牽涉到「上極限」和「下極限」的概念, 暫不仔細說明和討論, 這裡直接寫出其數學描述:

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x) := \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{x\in B'(x_0,\delta)} f(x) - \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{x\in B'(x_0,\delta)} f(x) > 0$$



例 1.7.13 函數 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在點 $x = 0$ 處無定義, 但

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

故 $x = 0$ 為 f 的可去間斷點. 若額外定義 $f(0) = 1$, 則 f 在點 $x = 0$ 處連續.

例 1.7.14 設

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x > 3 \\ x-1, & x \le 3 \end{cases}$$

那麼 $f(3) = 2$, 但

$$f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x+3} = 6 \neq 2 = \lim_{x\to 3^-} (x-1) = f(3^-),$$

故 $x = 3$ 是 f 的跳躍間斷點.

例 1.7.15 設 $f(x) = \tan x$, 則

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty,$$

故 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 f 的無窮間斷點.

例 1.7.16 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在點 $x = 0$ 處無定義, 又當 $x \to 0$ 時, $\sin\frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 中變動無限多次, 故 $x = 0$ 為 f 的震盪間斷點.

例 1.7.17 討論 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ $(x \ge 0)$ 的連續性.

解 當 $0 \le x < 1$ 時, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, $f(x) = 0$; 當 $x = 1$ 時, $f(x) = \frac{1}{2}$; 當 $x > 1$ 時,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}} = 1\,;$$

故有

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

因此, f 在區間 $[0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 內連續, $x = 1$ 是 f 的跳躍間斷點.

例 1.7.18 (爆米花函數／黎曼函數) 將函數 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 定義成

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{或} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}\text{, 其中} p, q \in \mathbb{N} \text{且} \gcd(p, q) = 1, \end{cases}$$

證明 f 在點 0 及所有無理數點處都連續、在除了 0 以外的所有有理數點都不連續.

證明 令 $\varepsilon > 0$, 考慮點 $x_0 \in [0, +\infty)$ 處的連續性.

若 x_0 是無理數, 則

$$|f(x) - f(x_0)| \begin{cases} > 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ = 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

由實數的阿基米德性 (見定理 1.2.8 的註記), 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使 $\frac{1}{N} < \varepsilon$, 考慮集合

$$S = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ : \gcd(m, n) = 1, 1 \le n \le N, x_0 - 1 \le \frac{m}{n} \le x_0 + 1 \right\},$$

即此集合包含分母不超過 N 且與點 x_0 之距離不超過 1 的所有正有理數點, 那麼 S 是不含 x_0 且離散的點集, 所以 $\exists\, \delta = \min_{x \in S} |x - x_0| > 0$ 使 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S = \varnothing$. 當 $x \notin \mathbb{Q}$ 時, 結果是顯然的, 故考慮 $x \in \mathbb{Q}$ 的情形, 當 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$ 時, 稱 $x = \frac{m}{n}$, 其中 $\gcd(m, n) = 1$ 且 $n > N$, 故

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon\ .$$

若 x_0 是有理數, 且 $x_0 \neq 0$, 由無理數的稠密性, 可取無理數列 $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 滿足 $x_0 \neq x_0$ 且收斂於 x_0, 則有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0),$$

即 f 在有理數點 $x_0 \neq 0$ 處不連續. $x_0 = 0$ 的情形給讀者留作習題. □

定理 1.7.19 (連續函數的四則運算) 設函數 f 和 g 在點 $x = x_0$ 處連續, 則

(1) 和 $f + g$;

(2) 差 $f - g$;

(3) 積 $f \cdot g, \lambda f$ (λ 是常數);

(4) 商 $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$)

都在點 $x = x_0$ 處連續.

例 1.7.20 在其定義域上連續 (即在每個有定義的點處連續) 的基本函數: 常數函數、絕對值函數、冪函數、多項式函數、有理函數、指數函數、對數函數、三角函數、反三角函數、雙曲函數、反雙曲函數.

注意 1.7.21 分段函數不能作為基本函數處理, 在分界點的連續性一般需按定義加以討論.

定理 1.7.22 (反函數的連續性) 如果函數 f 在區間 (a, b) 上單射且連續, 那麼它的反函數 f^{-1} 也連續.

證明 由 f 是連續的單射函數, 可知 f 在區間 (a, b) 上是單調函數 (為什麼?). 考慮 f 在 (a, b) 上是增函數的情形, 取任意 $c \in f((a, b))$, 目標是證明 f^{-1} 在點 c 處連續.

由於 $f^{-1}(c) \in (a, b)$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使 $f^{-1}(c) - \varepsilon$ 和 $f^{-1}(c) + \varepsilon$ 都在開區間 (a, b) 中, 取 $\delta > 0$ 使

$$f(f^{-1}(c) - \varepsilon) < c - \delta \quad \text{且} \quad c + \delta < f(f^{-1}(c) + \varepsilon),$$

當 $c - \delta < x < c + \delta$ 時,

$$f(f^{-1}(c) - \varepsilon) < x < f(f^{-1}(c) + \varepsilon),$$

又因 f^{-1} 是遞增函數,

$$f^{-1})c - \varepsilon < f^{-1}(x) < f^{-1}(c) + \varepsilon,$$

即 f^{-1} 在點 c 處連續. 由 c 的任意性, 可知 f^{-1} 在 $f((a, b))$ 上是連續函數. □

註記 1.7.23 以上定理對於其它類型的區間 (如閉區間、半開半閉區間等) 仍成立.

定理 1.7.24 (合成函數的連續性) 設有合成函數 $f\circ g$, $B(x_0)\subset D_{f\circ g}$, 若函數 g 在點 x_0 處連續, 而函數 f 在點 $g(x_0)$ 處連續, 則合成函數 $f\circ g$ 在點 x_0 處連續, 即

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)=f(g(x_0)).$$

證明 任給 $\varepsilon>0$, 因 f 在點 $g(x_0)$ 處連續, 則

$$\exists\,\delta_1>0,\ 當\ |u-g(x_0)|<\delta\ 時\ , |f(u)-f(g(x_0))|<\varepsilon,$$

對於該 $\delta_1>0$, 由 g 在點 x_0 處的連續性,

$$\exists\,\delta>0,\ 當\ |x-x_0|<\delta\ 時\ , |g(x)-g(x_0)|<\delta_1,$$

綜合以上兩個條件, 可知

$$只要\ |x-x_0|<\delta,\ 便有\ |f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon,$$

即函數 $f\circ g$ 在點 x_0 處連續. □

註記 1.7.25 當函數 g 在 $|x|$ 很大時有極限 L, 且 f 在點 L 處連續, 則有

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x))=f(L)=f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

例 1.7.26 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin\left(\cos\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right)=\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin 0=0$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=\exp\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)\right)=\exp(g(x_0)\ln f(x_0))=f(x_0)^{g(x_0)}$, 其中, f,g 在點 x_0 處連續.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)}=\sqrt{1-0^2}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\sin 0=0$

定理 1.7.27 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=1\iff a=e$

證明 檢查確定 $a\neq 1$, 故可令 $a^x-1=t$, 則 $x=\log_a(1+t)$, 且當 $x\to 0$ 時, $t\to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}\\&=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)}=\frac{1}{\log_a e}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=1\iff\log_a e=1\iff a=e.$$

□

注意 1.7.28 證明過程中有個副產物: 當 $a > 0$ 時,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

定理 1.7.29 $\ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$

證明

$$\lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{1/n}-1}{1/n}=\lim_{t\to 0^+}\frac{x^t-1}{t}=\ln x$$

□

定理 1.7.30 若數列 $\{x_n\}$ 收斂於 a, 且函數 f 在點 a 處連續, 則

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)=f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

證明 任給 $\varepsilon > 0$, 因為 f 在點 a 處連續, 所以

$$\exists\,\delta>0\,,\ \text{當}\,|x-a|<\delta\,\text{時, 有}\,|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

因 $\{x_n\}$ 收斂於 a,

$$\exists\,N\in\mathbb{N}\,,\ \text{當}\,n\geq N\,\text{時, 有}\,|x_n-a|<\delta,$$

所以當 $n \geq N$ 時, 有 $|f(x_n)-f(a)| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a).$$

□

引理 1.7.31 設 $a < b$, 且 f 在區間 $[a, b)$ 上有定義, 若 f 在點 $x_0 \in [a, b)$ 處連續, 且 $f(x_0) > 0$, 則存在 $\varepsilon > 0$ 及 $x_1 \in [a, b)$ 使得 $x_1 > x_0$, 且對所有 $x \in [x_0, x_1]$, 都有 $f(x) > \varepsilon$.

證明 想法: 若 $f(x_0) > 0$, 則在 x_0 附近, 有 $f(x) > f(x_0)/2$.

取 $\varepsilon = f(x_0)/2$, 因 $x_0 < b$, 顯然有 $\delta_0 := (b - x_0)/2 > 0$, 且 $a \leq x < x_0 + \delta_0$ 蘊含 $x \in [a, b)$, 由函數連續性的定義, 取 $0 < \delta < \delta_0$, 使得 $x \in [a, b)$ 及 $|x - x_0| < \delta$ 蘊含 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 固定 $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$, 設 $x \in [x_0, x_1]$, 根據 ε 及 δ 的選取方式, 有

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2},$$

因此 $f(x) > f(x_0)/2 = \varepsilon$. □

引理 1.7.32 設 $E \subseteq \mathbb{R}$ 為非空子集. 若 E 的上確界 (或下确界) 存在, 則存在數列 $\{x_n\} \subset E$ 收斂於 $\sup E$ (或 $\inf E$).

證明 設 $\sup E$ 存在, 則根據定理 1.1.6, 對於每個 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $x_n \in E$ 使

$$\sup E-\frac{1}{n}<x_n\leq\sup E,$$

依夾擠定理 (準則 1.4.1), $x_n \to \sup E$.

另一情形的證明也類似. □

連續定理

定理 1.7.33 (中間值定理／介值定理) 若 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, 且 N 是介於 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間 (不含端點) 的數, 則存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=N$.

證明 考慮 $f(a)<N<f(b)$ 的情形 (另一情況與此類似), 考慮集合

$$E=\{x\in[a,b]:f(x)<N\},$$

由於 $a\in E$ 且 $E\subseteq[a,b]$, E 是 $\mathbb{R}$ 的非空、有界子集, 依確界原理 (公理 1.1.3), $c:=\sup E$ 存在. 我們斷言: $c\in(a,b)$ 且 $f(c)=N$.

依引理 1.7.32, 取一串收斂於 c 的數列 $\{x_n\}\subset E$. 因為 $E\subseteq[a,b]$, 由極限的保序性 (系理 1.2.25), $c\in[a,b]$, 而且由 f 的連續性及 E 的定義, 可知

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\le N.$$

假設 $f(c)<N$, 則 $N-f(x)$ 是區間 $[a,b)$ 上的連續函數, 且 $N-f(c)>0$, 那麼由引理 1.7.31, 存在 $\varepsilon>0$ 及 $x_1>c$ 使得 $N-f(x_1)>\varepsilon>0$. 特別來說, $x_1\in E$ 且 $x_1>\sup E$, 矛盾.

因此, 我們證明了存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=N$. 又根據假設, $f(a)<N<f(b)$, 所以 $c\notin\{a,b\}$, 即 $c\in(a,b)$. □

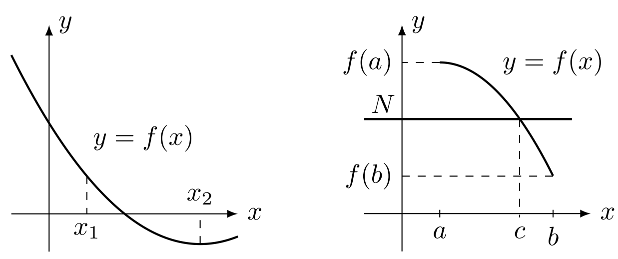
註記 1.7.34 如果 N 在 $f(a)$ 到 $f(b)$ 之內 (含兩端點), 那麼存在 $c\in[a,b]$ 滿足 $f(c)=N$.

定理 1.7.35 (勘根定理／零點定理) 設 f 在閉區間 $[x_1,x_2]$ 上連續, 若 $f(x_1)f(x_2)<0$, 則存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(c)=0$.

證明 假設 $f(x_1)<0<f(x_2)$ ($f(x_2)<0<f(x_1)$ 的情形類似), 由 f 的連續性, 存在 ξ 使得 $\forall\, x\in[x_1,\xi)$, $f(x)<0$. 令

$$c=\sup\{\xi:\forall\, x\in[x_1,\xi),f(x)<0\},$$

顯然 $c\le x_2$. 若 $f(c)>0$, 則 f 必在某個從 c 的左側延伸出去的區間中是正的, 而在 c 的左側, f 應是負的, 所以不可能有 $f(c)>0$, 據此可得 $c\ne x_2$, 即 $c<x_2$. 若 $f(c)<0$, 則存在 $t>c$ 使 f 在區間 $[x_1,t)$ 上是負的, 違背了 c 的定義. 因此, $f(c)=0$. □



勘根定理　　中間值定理

註記 1.7.36 (1) 中間值定理 (定理 1.7.33) 與勘根定理 (定理 1.7.35) 是等價的.

證明 顯然當 $N=0$ 時, 中間值定理即為勘根定理.

考慮 $f(a)<N<f(b)$ 的情形 (另一情況類似), 如果令

$$g(x)=f(x)-N,$$

顯然 g 在 $[a,b]$ 上連續, 且 $g(a)<0$, $g(b)>0$, 由勘根定理 (定理 1.7.35), 存在 $c\in(a,b)$ 使 $g(c)=0$, 即 $f(c)=N$. □

(2) 實際上, 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, 則 f 在 (x_1,x_2) 內有奇數 $(1,3,5,\ldots)$ 個零點; 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)>0$, 則 f 在 (x_1,x_2) 內有偶數 $(0,2,4,\ldots)$ 個零點.

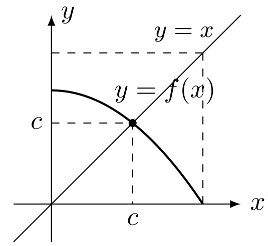
例 1.7.37 證明方程式 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一個小於 1 的正根.

證明 設 $f(x)=x\cdot 2^x-1$, f 在 $[0,1]$ 上連續, 且 $f(0)=-1<0$, $f(1)=2-1=1>0$, 即 $f(0)\cdot f(1)<0$, 由勘根定理 1.7.35, 知至少存在一點 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=0$, 即方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一個小於 1 的正根. □

例 1.7.38 估計方程 $x^3-6x+2=0$ 的根的位置.

解 令 $f(x)=x^3-6x+2$,
$f(-3)=-7<0$, $f(-2)=6>0$, $f(-1)=7>0$, $f(0)=2>0$, $f(1)=-3<0$, $f(2)=-2<0$, $f(3)=11>0$,
由於三次方程至多有 3 個實根, 因此方程 $x^3-6x+2=0$ 在區間 $(-3,-2),(0,1),(2,3)$ 內各有一個實根.

例 1.7.39 (定點定理/不動點定理) 設 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 且 $\forall\, x\in[a,b]$, 均有 $a\le f(x)\le b$, 則 $\exists\, c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=c$.



證明 設 $g(x)=f(x)-x$, g 在區間 $[a,b]$ 上連續. 因 $g(a)=f(a)-a\ge 0$, $g(b)=f(b)-b\le 0$, 依勘根定理 1.7.35, 存在 $c\in(a,b)$ 使 $g(c)=0$, 即 $f(c)=c$. □

引理 1.7.40 若 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 則 f 在閉區間 $[a,b]$ 有界.

證明 考慮集合

$$\{x\in[a,b]: f\text{ 在 }[a,x]\text{ 有界}\},$$

顯然該集合非空且有上界 b, 故可令

$$c=\sup\{x\in[a,b]: f\text{ 在 }[a,x]\text{ 有界}\},$$

斷言: $c=b$.

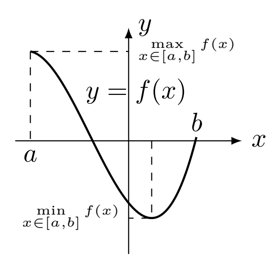
假設 $c<b$, 由 f 的連續性, 存在 $\varepsilon>0$ 使得 f 在 $[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$ 有界, 據此可得 f 在 $[a,c+\varepsilon]$ 有界, 但 c 應為最大的數使 f 在 $[a,c]$ 有界, 而 $c+\varepsilon>c$, 矛盾, 因此 $c=b$, 也就是說, 對所有 $x<b$, f 在 $[a,b]$ 都有界. 又再依 f 的連續性, f 在形如 $[b-\varepsilon,b]$ 有界, 由於 $b-\varepsilon<b$, 根據剛剛的論證, 可知 f 在 $[a,b-\varepsilon]$ 有界.

綜上, 我們得到 f 在 $[a,b-\varepsilon]$ 及 $[b-\varepsilon,b]$ 有界, 因此 f 在 $[a,b]$ 有界. □

定理 1.7.41 (最值定理) 若函數 $f(x)$ 在有界閉區間上連續, 則該函數在該閉區間上必有最大值和最小值.

證明 依引理 1.7.40, f 在 $[a,b]$ 有界, 令

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x),$$



希望證明 $\exists\, c\in[a,b]$ 使 $f(c)=M$. 我們令

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)},$$

若 f 取不到 M, 則 g 在 $[a,b]$ 上連續, 依引理 1.7.40, g 在 $[a,b]$ 有界. 但當 $f(x)\to M^-$ 時, $g(x)\to+\infty$, 即 g 在 $[a,b]$ 是無界函數, 矛盾, 因此 f 在 $[a,b]$ 上取得最大值. 最小值之情形的證明雷同. □

1.8 向量函數的極限與連續

定義 1.8.1 設 $\mathbf{f}$ 為映至 $\mathbb{R}^m$ 的單變數向量函數, 且在 x_0 的去心鄰域中有定義. 如果有一 m 維向量 $\mathbf{A}$, 對於任意正數 $\varepsilon > 0$, 皆存在 $\delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時, $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\| < \varepsilon$, 則稱 $\mathbf{A}$ 為 $\mathbf{f}$ 在 $x \to x_0$ 時的極限, 或 $\mathbf{f}$ 在 $x \to x_0$ 時收斂於 $\mathbf{A}$, 記作

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} \quad \text{或} \quad \mathbf{f}(x) \to \mathbf{A}(x \to x_0).$$

用數學語言描述, 就是:

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,\text{使得只要}\, 0 < |x - x_0| < \delta\,,\, \text{便有}\, \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\| < \varepsilon.$$

註記 1.8.2 (1) 有的教材以如下方式 (實值函數的極限) 定義向量函數的極限:

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} \iff \lim_{x \to x_0} \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\| = 0$$

可以證明它們確實等價.

(2) 我們也可以定義當 $x \to \infty$ 時 $\mathbf{f}$ 的極限.

定理 1.8.3 若 $\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A}$, 則 $\lim_{x \to x_0} \|\mathbf{f}(x)\| = \|\mathbf{A}\|$.

證明 根據三角不等式, 有

$$0 \le \big|\|\mathbf{f}(x)\| - \|\mathbf{A}\|\big| \le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\|,$$

依夾擠定理 (定理 1.4.5),

$$\text{只要}\ \lim_{x \to x_0} \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\| = 0\,,\ \text{便有}\ \lim_{x \to x_0} \big|\|\mathbf{f}(x)\| - \|\mathbf{A}\|\big| = 0.$$

□

注意 1.8.4 此定理的逆命題不恆成立, 比如說 $\mathbf{f}(x) = \mathbf{k}$, $\mathbf{A} = -\mathbf{k}$.

定理 1.8.5 設 $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m)$, 那麼

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} \iff \text{對所有}\, i = 1, \ldots, m\,,\, \text{均有}\, \lim_{x \to x_0} f_i(x) = A_i.$$

證明

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{A} &\iff \lim_{x \to x_0} \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}\| = 0 \\
&\iff \lim_{x \to x_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - A_i)^2} = 0 \\
&\iff \forall\, i = 1, \ldots, m,\ \lim_{x \to x_0} f_i(x) = A_i
\end{aligned}$$

□

定理 1.8.6 令 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{g}$ 為單變數 m 維向量函數, u 為單變數實函數, α, β 是常數, 且設當 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 時, 有

$$\mathbf{f}(x) \to \mathbf{A}, \quad \mathbf{g}(x) \to \mathbf{B}, \quad u(x) \to c,$$

那麼

(1) $\alpha\mathbf{f}(x) + \beta\mathbf{g}(x) \to \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$

(2) $u(x)\mathbf{f}(x) \to c\mathbf{A}$

(3) $\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

當 $m=3$ 時, 有 $\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}(x)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

證明 僅證明外積的情形. 觀察:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}(x)-\mathbf{A}\times\mathbf{B}\| &= \|[\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}(x)]-[A\times\mathbf{g}(x)]+[\mathbf{A}\times\mathbf{g}(x)]-[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\| \\ &= \|[(\mathbf{f}(x)-\mathbf{A})\times\mathbf{g}(x)]+[\mathbf{A}\times(\mathbf{g}(x)-\mathbf{B})]\| \\ &\le \|(\mathbf{f}(x)-\mathbf{A})\times\mathbf{g}(x)\|+\|\mathbf{A}\times(\mathbf{g}(x)-\mathbf{B})\| \\ &\le \|\mathbf{f}(x)-\mathbf{A}\|\|\mathbf{g}(x)\|+\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{g}(x)-\mathbf{B}\|, \qquad (1.3)\end{aligned}$$

其中, (1.3) 用到了外積公式 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\theta$ 及不等式 $|\sin x|\le 1$, θ 是 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 之間的夾角. 依定理 1.8.3, 可知當 $x\to x_0$ 時, $\|\mathbf{g}(x)\|\to\|\mathbf{B}\|$. 因此, 當 $x\to x_0$ 時,

$$\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{A}\|\|\mathbf{g}(x)\|+\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{g}(x)-\mathbf{B}\|\to 0\cdot\|\mathbf{B}\|+\|\mathbf{A}\|\cdot 0=0.$$

由於 $0\le\|\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}(x)-\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|$, 依夾擠定理 (定理 1.4.5), 即得

$$\|\mathbf{f}(x)\times\mathbf{g}(x)-\mathbf{A}\times\mathbf{B}\|\to 0.$$

□

例 1.8.7 求 $\mathbf{f}(x)=\left(x,x^2,x^3\right)$ 當 $x\to 2$ 時的極限.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\mathbf{f}(x) &= \lim_{x\to 2}\left(x,x^2,x^3\right) \\ &= \left(\lim_{x\to 2}x,\lim_{x\to 2}x^2,\lim_{x\to 2}x^3\right) \\ &= (2,4,8)\end{aligned}$$

定義 1.8.8 設 $\mathbf{f}$ 為單變數 m 維向量函數, $\mathbf{f}$ 在點 x_0 的某個鄰域中有定義. 如果對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 當 $|x-x_0|<\delta$ 時, 恆有 $\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)\|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(x_0),$$

那麼我們說 $\mathbf{f}$ 在點 x_0 處**連續**.

定理 1.8.9 依定理 1.8.6 可知, 若且唯若 $\mathbf{f}$ 在點 x_0 處連續, 則 $\mathbf{f}$ 的各分量函數在點 x_0 處連續.

單元 2

單變數函數的導數及其應用

2.1 導數的基本觀念與簡單函數的求導

定義 2.1.1 設函數 f 在 x_0 的某個鄰域內有定義, 如果極限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在, 則該極限稱為函數 f 在點 x_0 處的**導數**, 記作

$$f'(x_0)\quad 或\quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad 或\quad D_xf(x_0),$$

此時稱函數 f 在點 x_0 處**可導**. 如果該極限不存在, 則稱函數 f 在點 x_0 處**不可導**. 如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty,$$

則稱函數 f 在點 x_0 處的導數為無窮大, 或在點 x_0 處有**無窮導數**.

註記 2.1.2 導數的幾何意義為函數 f 的圖像曲線在某點處的切線斜率, 無窮導數表示該點處的切線與 x 軸垂直.

定義 2.1.3 如果函數 f 在開區間 (a,b) 內的每一點處均可導, 則稱 f 在 (a,b) 內可導, 此時 (a,b) 內的每一個點都對應一個導數值, 由函數的定義得一新函數, 稱為 f 的**導函數** (簡稱導數), 記作

$$f'(x)\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad D_xf(x),$$

即

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

註記 2.1.4 顯然有 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

例 2.1.5 設 $y=x^3$, 求 $y'(1)$.

解 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$

例 2.1.6 設 $f'(0)$ 存在, 求

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, 其中 $f(0)=0$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{f(0+3x)-f(0)}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{f(0+3x)-f(0)}{3x}=3f'(0)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

例 2.1.7 設 $f(x)=C$ 為常數函數, 則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0,$$

即

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C=0}.$$

例 2.1.8 設 $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$, 則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)=nx^{n-1},$$

即

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n=nx^{n-1}\quad(n\in\mathbb{N})}.$$

例 2.1.9 設 $f(x)=x^\mu$ $(\mu\in\mathbb{R})$ 且 $x\in D_f\setminus\{0\}$, 則

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\mu-x^\mu}{h}=\lim_{h\to 0}x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{\frac{h}{x}}\\
&=\lim_{h\to 0}x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu-1}{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu}\cdot\frac{\mu\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\\
&=\mu x^{\mu-1}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \qquad (2.1)\\
&=\mu x^{\mu-1}\cdot 1\cdot 1=\mu x^{\mu-1},
\end{aligned}$$

其中, (2.1) 式使用到等價無窮小的替換 $(1+\frac{h}{x})^\mu-1\sim\mu\cdot\frac{h}{x}$. 因此,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x}=\mu x^{\mu-1}\quad(\mu\in\mathbb{R})}.$$

註記 2.1.10 由以上例子, 可得一些常用公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

例 2.1.11 設 $f(x)=\sin x$, 則

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}\\
&=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,
\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x}.$$

類似地, 我們有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\sin x}.$$

例 2.1.12 設 $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, 則

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a,$$

其中, 我們有用到定理 1.7.27 的副產物. 因此

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a}, \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x}.$$

例 2.1.13 設 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, 則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \end{aligned}$$

故

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}, \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}}.$$

定義 2.1.14 (1) 若

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 則稱該極限為 f 在點 x_0 處的**右導數**, 記作 $f'_+(x_0)$.

(2) 若

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 則稱該極限為 f 在點 x_0 處的**左導數**, 記作 $f'_-(x_0)$.

(3) 左導數和右導數統稱為**單側導數**;

(4) 若函數 f 在開區間 (a, b) 上可導, 且在端點處的單側導數存在 (即 $f'_+(a), f'_-(b)$ 存在), 則稱函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上可導, 同理可定義函數 f 在 $[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, b]$ 上可導的概念.

註記 2.1.15 與極限類似, f 在點 x_0 處可導的充要條件為 f 在點 x_0 處的左、右導數都存在且相等.

例 2.1.16 考慮 $f(x) = |x|$ 在 0 處的兩個單側導數,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

左、右導數不相等, 故 f 在 0 處的導數不存在.

例 2.1.17 設 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f'_+(0), f'_-(0)$ 及 $f'(0)$.

解

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

故 $f'(0) = 1$.

定理 2.1.18 實函數 f 在點 x_0 處可導的充要條件為: 存在線性函數 $T(x) = mx$, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{h} = 0. \tag{2.2}$$

證明 必要性: 設 f 在點 x_0 處可導, 令 $m = f'(x_0)$, 則

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0 \quad (h\to 0).$$

充分性: 如果 (2.2) 式對於 $T(x) = mx$ 成立, 且 $h \neq 0$, 則

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= m + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-mh}{h}\\ &= m + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{h}.\end{aligned}$$

由 (2.2) 式可知, 上式的極限為 m, 故

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m,$$

即 $f'(x_0)$ 存在, 且等於 m. □

定理 2.1.19 (函數可導性與連續性的關係) 若函數 f 在點 x_0 可導, 則函數 f 在 x_0 處必連續.

證明 因為函數 f 在點 x_0 可導, 即 $f'(x_0)$ 存在, 所以

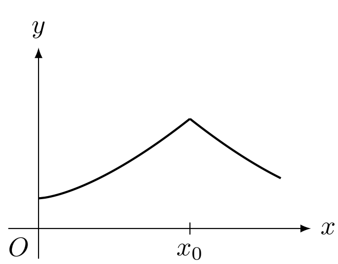
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right] = f'(x_0)\cdot(x_0-x_0)+f(x_0) = f(x_0),$$

即 f 在點 x_0 處連續. □

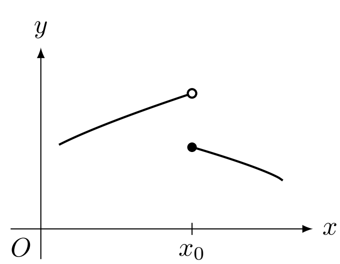
注意 2.1.20 其逆命題未必成立, 例如 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上連續, 但在點 $x = 0$ 處不可導, 因為

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

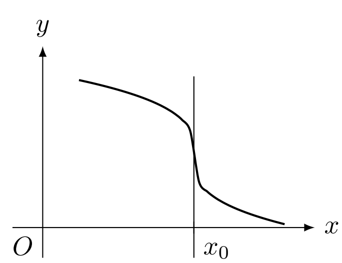
註記 2.1.21 從函數圖形來看, 函數不可導點常發生在尖點、間斷點 (第一類或第二類) 、切線與 x 軸垂直的點處等.



尖點



間斷點



鉛直切線 (無窮導數)

2.2 導數的運算法則

定理 2.2.1 (函數的和、差、積、商的求導法則) 若函數 f, g 在點 x 處的導數均存在, 則它們的和、差、積、商的導數也都存在, 且有

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\pm g) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ 或 $(f\pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c\cdot f)=c\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $(cf)'(x)=c\cdot f'(x)$, 其中 c 為常數;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot g)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g+f\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ 或 $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g-f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$ 或 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, 其中 $g(x)\neq 0$.

證明 僅證明 (3) 和 (4) :

(3) 的證明:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\&=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\end{aligned}$$

(4) 的證明:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)-f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}\\&=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

□

系理 2.2.2 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg)=a\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+b\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ 或 $(af+bg)'(x)=a\cdot f'(x)+b\cdot g'(x)$, 其中 a,b 為常數;

(2) 若 f,g,h 均可導, 則 $f\cdot g\cdot h$ 也可導, 且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot g\cdot h)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g\cdot h+f\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\cdot h+f\cdot g\cdot\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ 或 $(f\cdot g\cdot h)'(x)=f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$, 據此可推廣到 n 個函數之積.

(3) $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=-\dfrac{f'(x)}{[f'(x)]^2}$, 其中 $f(x)\neq 0$.

例 2.2.3 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\dfrac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\dfrac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{-1}{\sin x}=-\csc^2 x$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc x=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)=\dfrac{0-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$

例 2.2.4 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x-\ln x+\cos x+2e)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2e=2^x\ln 2-\dfrac{1}{x}-\sin x$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4+3\tan x-\sin\pi)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^4+3\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\pi=4x^3+3\sec^2 x$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3a^x)(\sin x-1)=(\sin x-1)\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3a^x)+(x^2+3a^x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x-1)=(2x+3a^x\ln a)(\sin x-1)+(x^2+3a^x)\cos x$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+3)(1-x)(x+2)=(2x+3)'(1-x)(x+2)+(2x+3)(1-x)'(x+2)+(2x+3)(1-x)(x+2)'=2(1-x)(x+2)+(2x+3)(-1)(x+2)+(2x+3)(1-x)=-6x^2-10x+1$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)=\dfrac{(x+1)'\ln x-(x+1)(\ln x)'}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-(x+1)\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{x\cdot\ln x-x-1}{x\cdot\ln^2 x}$

定理 2.2.5 (反函數的求導法則) 如果單調函數 f 在某一區間 I 內可導, 且 $f'\neq 0$, 則它的反函數 f^{-1} 在對應的區間 $f(I)$ 內也可導, 且滿足

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=f^{-1}(x)}}.$$

即: 反函數的導數等於直接函數導數的倒數.

證明 因為 f 在區間 I 上單調且連續, 所以 f^{-1} 存在、單調且連續. 令 $y=f^{-1}(x)$, 則 $x=f(y)$, $f^{-1}(x+h)=y+k$, $f(y+k)=x+h$, 因此 $h=f(y+k)-f(y)$, 且當 $h\to 0$ 時, $k\to 0$.

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{y+k-y}{f(y+k)-f(y)}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{f(y+k)-f(y)}{k}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

註記 2.2.6 如果記 $y=y(x)$, 那麼 $x=x(y)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}.$$

例 2.2.7 設 $y=\sin^{-1}x$, 則 $x=\sin y$, 且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos y},$$

而當 $x\in(-1,1)$ 時, $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\cos y>0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

也就是說,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

例 2.2.8 由恆等式

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

可以直接推出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

例 2.2.9 設 $y = \tan^{-1} x$, 則 $x = \tan y$, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

即

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}}.$$

例 2.2.10 由恆等式

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

可以直接推出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}}.$$

例 2.2.11 $\sec^{-1} x$ 的定義域為 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, 而值域有兩種取法:

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \text{或} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

當採用第一種取法時, 用類似的方式, 可推得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}};$$

當採用第二種取法時, 可推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

例 2.2.12 $\csc^{-1} x$ 的定義域為 $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, 而值域有兩種取法:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{或} \quad \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

當採用第一種取法時, 用恆等式

$$\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \frac{\pi}{2},$$

可推得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}};$$

當採用第二種取法時, 可推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

註記 2.2.13 第二種取法是因為當 tan 的定義域落在該區間時, tan 的值域為非負數. 如果 $\sec^{-1}$ 的值域規定為第一種, 將會造成 $\tan(\sec^{-1} x) = \pm\sqrt{x^2-1}$, 如果希望 $\tan(\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$, 那就必須採用第二種取法, 這樣將在積分計算中的處理比較方便. 基於類似的理由, $\csc^{-1}$ 的值域也可以定為 $(-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup (0, \frac{\pi}{2}]$. 但本講義仍以第一種取法為標準.

例 2.2.14 求函數 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le 1, \\ x^2+1, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 的導數.

解 當 $0<x<1$ 時, $f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x=2$; 當 $1<x<2$ 時, $f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1)=2x$; 當 $x=1$ 時,

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2x-2}{x-1}=2,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1-2}{x-1}=2\,;$$

由 $f'_-(1)=f'_+(1)=2$ 知 $f'(1)=2$, 所以 $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x\le1,\\ 2x, & 1<x<2\end{cases}$.

定理 2.2.15 (連鎖律——合成函數的求導法則) 若 $u=g(x)$ 在點 $x=x$ 可導, 且 $y=f(u)$ 在點 $u=g(x)$ 可導, 則合成函數 $f\circ g$ 在點 $x=x$ 可導, 且其導數為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad\text{或}\quad (f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

證明 由於 $y=f(u)$ 在點 u 可導, 因此

$$\lim_{\Delta u\to0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=f'(u)$$

存在, 於是根據極限及無窮小的關係, 有

$$\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=f'(u)+o(\Delta u),$$

其中 $o(\Delta u)$ 是 $\Delta u\to0$ 時的無窮小. 當 $\Delta u\ne0$ 時, 得

$$f(u+\Delta u)-f(u)=f'(u)\cdot\Delta u+o(\Delta u)\cdot\Delta u\,; \tag{2.3}$$

當 $\Delta u\to0$ 時, 規定 $o(\Delta u)=0$, 此時, 函數

$$o(\Delta u)=\begin{cases}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}-f'(u), & \Delta u\ne0,\\ 0, & \Delta u=0,\end{cases}$$

在 $\Delta u=0$ 處連續, 即 $\lim_{\Delta u\to0}o(\Delta u)=0=o(\Delta u)$, 並且 (2.3) 式對於 $\Delta u=0$ 也成立. 若 $\Delta x\ne0$, 將 (2.3) 式兩邊同除以 Δx, 得

$$\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}=f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+o(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

又 $u=g(x)$, $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$, 故

$$\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}=f'(g(x))\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+o(\Delta u)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}, \tag{2.4}$$

根據定理 2.1.19, 當 $\Delta x\to0$ 時, 有 $\Delta u\to0$. 又由函數 $u=g(x)$ 在點 $x=x$ 可導可知 $g'(x)$ 存在, 所以對 (2.4) 式兩邊取當 $\Delta x\to0$ 時的極限, 可得

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

□

系理 2.2.16 若 $y=f(u), u=g(v), v=h(x)$ 均可導, 則 $f\circ g\circ h$ 也可導, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\quad\text{或}\quad (f\circ g\circ h)'(x)=f'(g(h(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x),$$

類似地, 可推廣到更多層的合成函數.

例 2.2.17 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{2x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(2x)}e^{2x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x^2 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\cos x^2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = -\sin x^2 \cdot 2x = -2x\sin x^2$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^2 x = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos x)}\cos^2 x \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1)^{10} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2+1)}(x^2+1)^{10} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+1) = 10(x^2+1)^9 \cdot 2x = 20x(x^2+1)^9$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(1-x^2)}\sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\sin x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin x)}\ln(\sin x) \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$;

(7) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sin\frac{1}{x}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin\frac{1}{x})}e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\frac{1}{x})}\sin\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{x} = e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x}}{x^2}$;

(8) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x\ln x)}e^{x\ln x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x) = e^{x\ln x} \cdot (1+\ln x)$.

例 2.2.18 已知 f 可導, 求 $f \circ \tan$ 的導數.

解 $(f \circ \tan)'(x) = f'(\tan x) \cdot \sec^2 x$.

定理 2.2.19 (冪指函數的求導法則)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot [f(x)]^{g(x)-1} \cdot f'(x)$$

證明

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]^{g(x)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \\
&= e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x)\cdot\ln f(x)) \\
&= [f(x)]^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)\right) \\
&= [f(x)]^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\
&= [f(x)]^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot [f(x)]^{g(x)-1} \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

□

註記 2.2.20 冪指函數的導數公式看起來就像是兩個部分的和: 第一個部分是將函數看作以 $f(x)$ 為底的指數函數的求導結果, 第二個部分是將 $g(x)$ 看作常指數的冪函數的求導結果.

例 2.2.21 設 $y = f(x) = |x|$, 且 $x \neq 0$, 求 $f'(x)$.

解 設 $u = x^2$, 則 $y = |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{u}$, 使用連鎖律,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}.$$

例 2.2.22 設 $y = f(x) = \log_a |x|$, 其中 $x \neq 0$, 求 $f'(x)$.

解

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\log_a|x|}{\mathrm{d}|x|}\cdot\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{|x|\ln a}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

故

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a|x|=\frac{1}{x\ln a}},\qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|=\frac{1}{x}}.$$

例 2.2.23 (雙曲函數的導數公式) (1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{\cosh x\cdot\cosh x-\sinh x\cdot\sinh x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech}^2 x$;

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{\sinh x\cdot\sinh x-\cosh x\cdot\cosh x}{\sinh^2 x}=\frac{-1}{\sinh^2 x}=-\operatorname{csch}^2 x$;

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech} x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\cosh x}=\frac{-1}{\cosh^2 x}\cdot\sinh x=-\operatorname{sech} x\cdot\tanh x$;

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch} x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sinh x}=\frac{-1}{\sinh^2 x}\cdot\cosh x=-\operatorname{csch} x\cdot\coth x$.

例 2.2.24 (反雙曲函數的導數公式) 以下公式較少使用:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}$;

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1-(1/x)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{1-x^2}$ (或使用定義 $\coth^{-1}x=\frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}$) ;

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech}^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{(1/x)^2-1}}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (或 $\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$) ;

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch}^{-1}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+(1/x)^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$ (或 $\operatorname{csch}^{-1}x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$).

定理 2.2.25 (求導法則與常見函數的求導公式統整) 以下羅列基本的求導公式:

(1) 導數的運算法則

(a) $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

(b) $(cf)'(x)=cf'(x)$

(c) $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{[f(x)]^2}$, $g(x)\neq 0$

(e) $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

(f) $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $f'(f^{-1}(x))\neq 0$

(2) 冪函數、指數與對數函數的導數

(a) $(c)' = 0$
(b) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$
(c) $(|x|)' = \frac{x}{|x|}$, $x \neq 0$
(d) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$
(e) $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
(f) $[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot [f(x)]^{g(x)-1} \cdot f'(x)$

(3) 三角函數的導數

(a) $(\sin x)' = \cos x$
(b) $(\cos x)' = -\sin x$
(c) $(\tan x)' = \sec^2 x$, $x \notin \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$
(d) $(\cot x)' = -\csc^2 x$, $x \notin \pi\mathbb{Z}$
(e) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$, $x \notin \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$
(f) $(\csc x)' = \csc x \cdot \cot x$, $x \notin \pi\mathbb{Z}$

(4) 反三角函數的導數

(a) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
(b) $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
(c) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(d) $(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
(e) $(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
(f) $(\csc^{-1} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(5) 雙曲函數的導數

(a) $(\sinh x)' = \cosh x$
(b) $(\cosh x)' = \sinh x$
(c) $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$
(d) $(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$, $x \neq 0$
(e) $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$
(f) $(\operatorname{csch} x)' = \operatorname{csch} x \cdot \coth x$, $x \neq 0$

(6) 反雙曲函數的導數

(a) $(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(b) $(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$
(c) $(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$
(d) $(\coth^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$
(e) $(\operatorname{sech}^{-1} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$
(f) $(\operatorname{csch}^{-1} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$, $x \neq 0$

2.3 高階導數

定義 2.3.1 設函數 f 可導, 視 f' 為新的函數, 如果 f' 仍可導, 即極限

$$(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

存在, 則稱 f' 的導數 $(f')'$ 為 f 的**二階導數**, 記作

$$f''(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \text{ 或 } D_x^2 f(x) \text{ 或 } f^{(2)}(x).$$

一般地, 可以定義 f 的 n **階導數**, 記作

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = D_x^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}\, , n = 2, 3, 4, \ldots,$$

其中, $f^{(1)} = f'$, 而類似二階導數的記號, 三階導數可記作 f''', 但 $n \geq 4$ 階以上一般上都直接寫作 $f^{(n)}$.

如果 f 在區間 I 內的 n 階導數存在, 則稱函數 f 在區間 I 內 n 階可導. f 的二階以上的導數 $f'', f''', f^{(4)}, \ldots$ 統稱為**高階導數**.

定義 2.3.2 若函數 f 在區間 I 上是連續函數, 則稱 f 為 C^0 **函數**, 記作 $f \in C^0(I)$. 如果 f 在開區間 I 內 n 階可導, $n \geq 1$, 且 $f^{(n)}$ 在 I 上是連續函數, 則稱 f 為 C^n **函數**, 記作 $f \in C^n(I)$. 如果 f 在開區間 I 內無窮可導 (即各階導數均存在), 則稱 f 為 I 上的**光滑函數**或 C^∞ **函數**, 記作 $f \in C^\infty(I)$.

例 2.3.3 (1) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^\mu = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^n = n!$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} a^x = a^x \ln^n a$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^x = e^x$.

例 2.3.4 設 $f(x) = \sin x$, 則

$$f^{(4n+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4n+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4n+3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4n+4)}(x) = \sin x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

或者

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

類似地, 有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

例 2.3.5 設 $f(x) = \sinh x$, 則

$$f^{(2n+1)}(x) = \cosh x, \quad f^{(2n+2)}(x) = \sinh x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

命題 2.3.6 (高階導數的運算法則) (1) $(f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$;

(2) $(cf)^{(n)}(x) = cf^{(n)}(x)$;

(3) 萊布尼茲求導公式: $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$, 其中 $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$.

證明 (3) 可以由數學歸納法直接推得. □

例 2.3.7 若 f 的反函數 f^{-1} 存在且二階可導, 求 $(f^{-1})''$.

解

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{[f'(f^{-1}(x))]}\cdot f''\left(f^{-1}(x)\right)\cdot (f^{-1})'(x)\\ &= -\frac{1}{[f'\left(f^{-1}(x)\right)]}\cdot f''\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = -\frac{f''\left(f^{-1}(x)\right)}{[f'\left(f^{-1}(x)\right)]^3}\end{aligned}$$

2.4 隱函數求導法與參變函數的導數

隱函數的求導法

定義 2.4.1 設 x, y 滿足方程 $F(x,y)=0$, 如果在一定條件下, 當 x 取某區間內的任一值時, 相應地總有滿足這個方程的唯一的 y 值存在, 那麼稱方程 $F(x,y)=0$ 在該區間內確定了一個**隱函數**, 記作 $y=y(x)$.

注意 2.4.2 關於「隱函數」的存在性, 將在數學分析的課程中嚴格說明.

註記 2.4.3 設方程 $F(x,y)=0$ 確定了一個函數 $y=y(x)$, 將 $y=y(x)$「代入」方程, 得等式 $F(x,y(x))=0$, 兩邊對 x 求導數, 且將 y 視為 x 的函數, 便能求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例 2.4.4 設 $y=1+xe^y$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 方程兩邊對 x 求導, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^y\right)=e^y+xe^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

令 $x=0$, 則 $y=1+0e^y=1$, 代入上式, 得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=e^1+0\cdot e^1\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},$$

即 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=e$.

例 2.4.5 設 $x^4-xy+y^4=1$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0,1)}$.

解 方程兩邊對 x 求導, 得

$$4x^3-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4y^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0, \tag{2.5}$$

將 $(x,y)=(0,1)$ 代入 (2.5), 得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,1)}=\frac{1}{4}$. 將方程 (2.5) 兩邊再對 x 求導, 得

$$12x^2-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+12y^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+4y^3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0,$$

將 $\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(0,1,\frac{1}{4}\right)$ 代入上式, 得 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0,1)}=-\frac{1}{16}$.

注意 2.4.6 對於冪指函數 $f(x)=[u(x)]^{v(x)}$, 除了寫成 $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ 再求導, 也可以直接兩邊取對數:

$$\ln f(x)=v(x)\ln u(x),$$

看作隱函數的求導, 這種方法就是**對數求導法**. 一般用於求冪指函數或者若干個因式的乘積的導數.

例 2.4.7 求 $f(x)=x^{\sin x}$ 的導數, 其中 $x>0$.

解 兩邊取對數, 得

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x,$$

上式兩邊對 x 求導, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

故

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

例 2.4.8 設

$$f(x) = \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 \cdot e^x},$$

其中 $x \neq -4, 1$, 求 $f'(x)$.

解 當 $x \neq -1$ 時, 先取絕對值, 再取對數, 得

$$\ln |f(x)| = \ln |x+1| + \frac{1}{3} \ln |x-1| - 2 \ln |x+4| - x,$$

兩邊對 x 求導, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1,$$

因此

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 \cdot e^x} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{x+4} - 1\right) \\ &= \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 \cdot e^x} + \frac{x+1}{3(x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot e^x} - \frac{2(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^3 \cdot e^x} - \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 \cdot e^x} \quad (x \neq -1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

當 $x = -1$ 時,

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 \cdot e^x} = \frac{\sqrt[3]{-2}}{9} e,$$

經檢驗, $f'(-1) = \frac{\sqrt[3]{-2}}{9} e$ 滿足 (2.6).

參變函數的導數

定理 2.4.9 考慮參數方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (其中 t 為參數), 如果 $x = \varphi(t)$ 的反函數為 $t = \varphi^{-1}(t)$, 且它滿足反函數的求導條件 (如 $\varphi'(t) \neq 0$), 那麼可將 $y = \psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ 看作 $y = \psi(t)$ 與 $t = \varphi^{-1}(x)$ 的複合函數, 使用連鎖律, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

定理 2.4.10 如果 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 二階可導, 則

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 2.4.11 已知橢圓 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a, b > 0)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(a,0)}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{a\cos t}{-b\sin t}=-\frac{a}{b}\cot t,\quad (t\notin\pi\mathbb{Z}).$$

當 $(x,y)=(a,0)$ 時, $t=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 取 $t=\frac{\pi}{2}$, 故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(a,0)}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\frac{a}{b}\cdot\cot\frac{\pi}{2}=0.$$

例 2.4.12 已知擺線 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2},\quad (t\notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cot\frac{t}{2}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},\quad (t\notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

定義 2.4.13 設 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 均可導, 它們之間確定 x 與 y 之間存在著某種關係, 如此一來 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$(**變化率**) 之間也存在一定的關係, 稱此這兩個相互依賴的變化率為**相關變化率**.

例 2.4.14 有一長 5 公尺的梯子斜靠在牆上, 若梯腳以秒速 0.5 公尺的速率滑離牆壁, 試求梯腳離牆 3 公尺時, 梯子上端向下滑落的速率.

解 設梯腳離牆 x 公尺, 梯子上端離地面 y 公尺, 所以 $x^2+y^2=25$, 兩邊對 t 求導, 得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,\text{ 即 }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

將 $x=3$, $y=4$ 和 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.5$ 代入, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{8}=-0.375,$$

即梯子上端向下滑落的速率為每秒 0.375 公尺.

2.5 向量函數的導數

定義 2.5.1 設 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ 為單變數向量函數, 如果極限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)}{x-x_0}$$

存在, 則稱向量函數 $\mathbf{f}$ 在點 x_0 處**可導**, 且將該極限記作

$$\mathbf{f}'(x_0)\quad\text{或}\quad\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\quad\text{或}\quad D_x\mathbf{f}(x_0).$$

如果 $\mathbf{f}$ 在 I 內的每一個點均可導, 則稱 $\mathbf{f}$ 在 I 上**可導**, 此時 I 內的每一個點都對應一個導數值, 由函數的定義得一新函數, 稱為 $\mathbf{f}$ 的**導函數** (簡稱導數), 記作 $\mathbf{f}'$.

註記 2.5.2

$$\mathbf{f}'(x)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}=D_x\mathbf{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)}{h}.$$

定理 2.5.3 設 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ 為單變數向量函數, $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_m)$, 其中每一個分量 f_k 均為定義在 I 上的實函數, 那麼 $\mathbf{f}$ 在 x_0 處可導的充要條件為: 對於每個 $k=1,\ldots m$, f_k' 在 x_0 處可導, 並且有

$$\mathbf{f}'(x_0)=\left(f_1'(x_0),\ldots,f_m'(x_0)\right).$$

證明 充分性的證明: 設 $\mathbf{f}'(x_0)$ 存在, 那麼任予 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時,

$$\frac{\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)\|}{|x - x_0|} < \epsilon.$$

考慮 $k = 1, \ldots, m$, 當 $0 < |x - x_0| < \delta$ 時,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}\right| &= \sqrt{\left(\frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}\right)^2} = \frac{1}{|x - x_0|}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(f_k(x) - f_k(x_0))^2} \\ &= \frac{\|(f_1(x) - f_1(x_0) \ldots, f_m(x) - f_m(x_0))\|}{|x - x_0|} = \frac{\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)\|}{|x - x_0|} < \epsilon,\end{aligned}$$

故對於 $k = 1, \ldots, m$, 極限

$$f_k'(x_0) = \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$$

都存在, 即 f_k' 在 x_0 處均可導.

必要性的證明: 設對所有 $k = 1, \ldots, m$, $f_k'(x_0)$ 都存在, 那麼極限

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= \left(\lim_{x \to x_0}\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \lim_{x \to x_0}\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))\end{aligned}$$

也存在, 且 $\mathbf{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))$. □

定理 2.5.4 設 $\mathbf{f}$ 為向量函數, u 為實函數, 兩者都在區間 I 上有定義, u 在 I 上可導, $\mathbf{C}$ 為常向量, 那麼

(1) $\mathbf{f}(x) = \mathbf{C}$(常函數) $\implies \mathbf{f}'(x) = \mathbf{0}$;

(2) $\mathbf{f}(x) = u(x)\mathbf{C} \implies \mathbf{f}'(x) = u'(x)\mathbf{C}$.

例 2.5.5 (1) $\mathbf{f}(x) = x^2\mathbf{A} \implies \mathbf{f}'(x) = 2x\mathbf{A}$;

(2) $\mathbf{f}(x) = (\cos x, \sin x, 1) \implies \mathbf{f}'(x) = (-\sin x, \cos x, 0)$.

命題 2.5.6 (導數的運算法則) 設 $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^m$ 為向量函數, $u : I \to \mathbb{R}$ 為實函數, k 為常數, 若 $\mathbf{f}, \mathbf{g}, u$ 在 $x \in I$ 可導, 則

(1) 和差: $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})'(x) = \mathbf{f}'(x) \pm \mathbf{g}'(x)$;

(2) 常係數積: $(k\mathbf{f})'(x) = k\mathbf{f}'(x)$;

(3) 函數係數積: $(u\mathbf{f})'(x) = u(x)\mathbf{f}'(x) + u'(x)\mathbf{f}'(x)$;

(4) 內積: $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(x) = \mathbf{f}'(x) \cdot \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}'(x)$;

(5) 合成 (連鎖律): 如果 $\mathbf{f}$ 在 $u(x)$ 處可導, 那麼 $(\mathbf{f} \circ u)(x) = \mathbf{f}'(u(x))\, u'(x) = u'(x)\mathbf{f}'(u(x))$;

(6) 叉積: 當 $m = 3$ 時, $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(x) = \mathbf{f}'(x) \times \mathbf{g}(x) + \mathbf{f}(x) \times \mathbf{g}'(x)$.

定理 2.5.7 如果 $\mathbf{f}$ 是可導的向量函數, 那麼在 $f(x) = \|\mathbf{f}(x)\| \neq 0$ 的點, 有

(1) $\mathbf{f} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x} = f\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathbf{f}}{f}\right)=\dfrac{1}{f^3}\left[\left(\mathbf{f}\times\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\right)\times\mathbf{f}\right]$.

證明 (1) 因為 $\mathbf{f}$ 可導, 所以 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}=\|\mathbf{f}\|^2=f^2$ 亦可導. 當 $f\neq 0$ 時, 上式兩邊對 x 求導, 得

$$\mathbf{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\cdot\mathbf{f}=2f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

化簡並整理即得證.

(2) 直接計算:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathbf{f}}{f}\right)&=\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathbf{f}=\frac{1}{f^3}\left(f^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}-f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathbf{f}\right)\\&=\frac{1}{f^3}\left[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}-\left(\mathbf{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\right)\mathbf{f}\right]=\frac{1}{f^3}\left[\left(\mathbf{f}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}\right)\times\mathbf{f}\right].\end{aligned}$$

□

定理 2.5.8 設 $\mathbf{f}$ 是可導的向量函數.

(1) $\mathbf{f}$ 的長度恆定 $\iff \mathbf{f}\perp\mathbf{f}'$;

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathbf{f}$ 的方向恆定 $\iff \mathbf{f}\parallel\mathbf{f}'$.

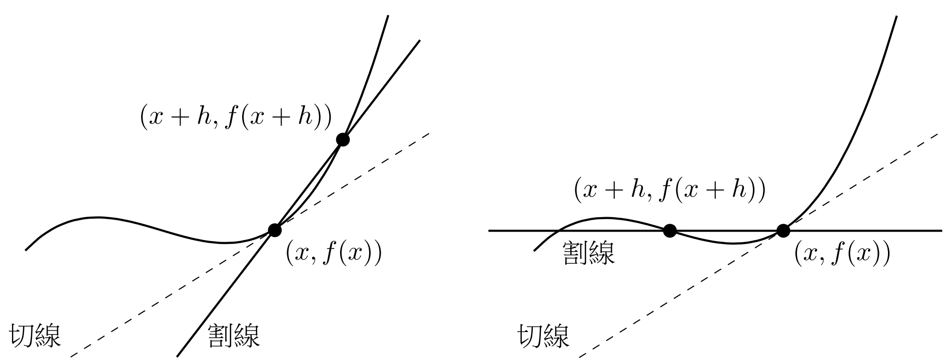
證明

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\text{的長度不變}&\iff\|\mathbf{f}\|^2=C\iff\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}=C\iff\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}=0\\&\iff\mathbf{f}'\cdot\mathbf{f}+\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}'=0\iff 2\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}'=0\iff\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}'=0\iff\mathbf{f}\perp\mathbf{f}'\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}\text{的方向不變}\iff\mathbf{f}'=c\mathbf{f}\iff\mathbf{f}\times\mathbf{f}'=0$$

□

2.6 切線與法平面



在光滑曲線 $y=f(x)$ 上固定一點 $(x,f(x))$, 取其附近一動點 $(x+h,f(x+h))$, 其中 $h>0$ 或 $h<0$. 作該兩點的割線, 那麼割線的斜率為

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

當 $h\to 0$ 時, 割線會越來越貼近切線, 故點 $(x,f(x))$ 處的切線的斜率為

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

例 2.6.1 求等軸雙曲線 $y=\frac{1}{x}$ 在點 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 處的切線方程及法線方程.

解 雙曲線 $y=\frac{1}{x}$ 在點 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 處的切線斜率為

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-4,$$

所以所求切線方程式為

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad \text{即 } 4x+y-4=0.$$

又知法線與切線垂直, 可得法線在該點處的斜率為 $\frac{1}{4}$, 故所求法線方程式為

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad \text{即 } 2x-8y+15=0.$$

例 2.6.2 求曲線 $y=x^{3/2}$ 的過點 $(0,-4)$ 的切線方程.

解 設切點為 $(a,a^{3/2})$, 則切線斜率為

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\frac{3}{2}\sqrt{a},$$

於是可設所求切線方程為

$$y-a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(x-a), \tag{2.7}$$

因所求切線過點 $(0,-4)$, 所以

$$-4-a^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{a}(0-a),$$

解得 $a=4$, 代回 (2.7), 即的所求切線方程為

$$3x-y-4=0.$$

例 2.6.3 設 $B^2-AC\neq 0$, 求圓錐曲線

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

在點 (x_0,y_0) 處的切線方程式.

解 方程兩邊對 x 求導,

$$Ax+By+Bx\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Cy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+D+E\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

將 (x_0,y_0) 代入上式, 得

$$Ax_0+By_0+Bx_0\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}+Cy_0\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}+D+E\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}=0.$$

若 $Bx_0+Cy_0+E\neq 0$, 則切線斜率為

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}.$$

所求切線方程式為

$$y-y_0=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}(x-x_0)$$

即

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0. \tag{2.8}$$

又因為 (x_0, y_0) 在曲線上, 所以

$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 = -F,$$

代入 (2.8), 即得所求切線方程式為

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0.$$

若 $Bx_0+Cy_0+E = 0$, 且 $Ax_0+By_0+D \neq 0$, 則切線與 x 軸垂直, 且方程式為 $x = x_0$. 而 $Bx_0+Cy_0+E = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + D = 0$ 的情況複雜, 因此我們略去不討論.

命題 2.6.4 設有參數曲線

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

若 $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ 是曲線上一可導點, 則在該點處的切線斜率為

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right|_{t=t_0},$$

其中 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 不同時為 0. 當 $\psi'(t_0) \neq 0$ 且 $\varphi'(t_0)$ 時, 切線垂直於 x 軸.

證明 證明從略. □

例 2.6.5 設有曲線

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - 3t, \end{cases}$$

求此曲線具有水平切線及鉛直切線的點, 以及在點 $(3, 0)$ 處的兩條切線的方程式.

解 切線斜率為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t^2 - 3}{2t},$$

當 $t = \pm 1$ 時, $y'(t) = 3t^2 - 3 = 0$ 且 $x'(t) \neq 0$, 故在點 $(1, 2)$ 及 $(1, -2)$ 處有水平切線. 當 $t = 0$ 時, $y'(t) \neq 0$ 且 $x'(t) = 0$, 故在點 $(0, 0)$ 處有鉛直切線.

對於點 $(3, 0)$, 對應的參數為 $\pm\sqrt{3}$, 它們分別對應的切線斜率為

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\sqrt{3}} = -\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

因此, 在點 $(3, 0)$ 的兩條切線方程式為

$$y = \sqrt{3}(x - 3) \quad \text{及 } y = -\sqrt{3}(x - 3).$$

系理 2.6.6 設有極曲線 $r = r(\theta)$, 若在點 $(\theta, r(\theta))$ 處, r 可導, 則曲線在該點處的切線斜率為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r\sin\theta}.$$

證明 考慮參數式

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

那麼參數曲線的切線斜率為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}.$$

□

註記 2.6.7 當 $r = 0$ 時, 斜率即為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta$$

例 2.6.8 設有心臟線 $r = 1 + \sin\theta$, 求心臟線上具有水平切線和鉛直切線的點.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\cdot(1+2\sin\theta)}{1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta\cdot(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)},\end{aligned}$$

當 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 時, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \cos\theta\cdot(1+2\sin\theta) = 0$; 當 $\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 時 (尖點處), $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = (1+\sin\theta)(1+2\sin\theta) = 0$. 當 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 時,

$$\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} \frac{1+2\sin\theta}{1-2\sin\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right) = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to\frac{3\pi}{2}} \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = \infty.$$

因此, 此心臟線在點

$$\left(2, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

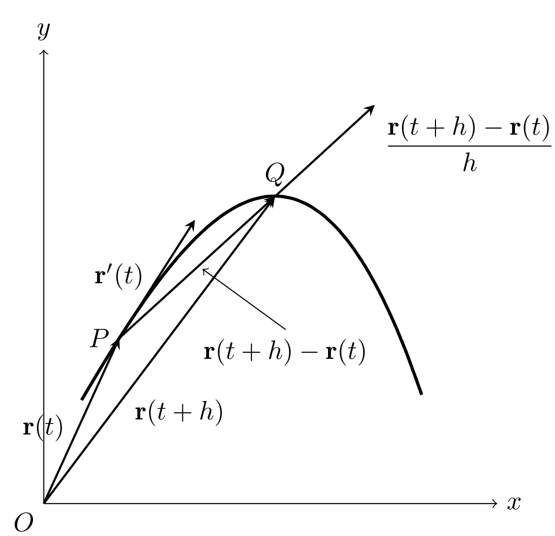
處有水平切線, 在點

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

處有鉛直切線.

註記 2.6.9 平面及空間中的曲線都可以用參數式或向量函數 $\mathbf{r}$ 來表示, 因此有時我們會把表示曲線的向量函數稱為曲線的參數式.

現在來考慮向量函數的導數的幾何意義 (以平面曲線作為示意圖, 空間曲線的情況類似):



設上圖曲線的參數式為 $\mathbf{r}$, 則曲線在點 P 和 Q 的座標分別為 $\mathbf{r}(t)$ 和 $\mathbf{r}(t+h)$. 觀察可知, $\mathbf{r}'(t)$ 即為曲線在點 P 處的**切向量**. 有了曲線在某點處的切向量, 我們就可以以該切向量為方向向量求曲線在該點處的切線方程式:

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0).$$

註記 2.6.10 若空間中已知曲線由兩面式 $\begin{cases} y = \psi(x), \\ z = \omega(x) \end{cases}$ 表示, 則取 $\mathbf{r}(t) = (t, \psi(t), \omega(t))$ 為曲線的參數式, 並以參數式的方法處理.

若空間中已知曲線由兩面式 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 表示, 則需要用到多變量微積分的知識, 取

$$\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)$$

為切線的方向向量, 再以點向式寫出切線方程式. 或者採用以下方法: 視方程組中的 y, z 為 x 的函數 (或擇其他兩變數之一作為變數, 餘兩者作為函數), 各方程式兩邊對 x 求導, 解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 那麼曲線的切向量為

$$\left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right),$$

即得切線的方向向量.

例 2.6.11 求圓 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $(t \in \mathbb{R})$ 在點 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 處的切線方程式.

解 在點 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 處, $t = \frac{\pi}{4}$, 而由 $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ 可得所求切線的方向向量為

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

故所求切線方程式為

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

或可寫成一般方程式:

$$x + y = \sqrt{2}.$$

定義 2.6.12 設曲線在區間 I 上有參數式 $\mathbf{r}(t)$, 若對於 $t \in I$, 均有 $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, 則稱參數式 $\mathbf{r}$ 在區間 I 上是**平滑**的, 且可定義其**單位切向量**為

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

其指向 t 遞增的方向.

系理 2.6.13 依定理 2.5.8, 可知 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$, 即 $\mathbf{T} \perp \mathbf{T}'$.

定義 2.6.14 設以 $\mathbf{r}(t)$ $t \in I$ 為參數式的曲線 C 是平滑的. 若切向量的導數 $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, 則可定義曲線在 $t = t$ 時的**主法向量**為

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|},$$

而定義曲線在 $t = t$ 時的**副法向量**為

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t).$$

定義 2.6.15 在平滑曲線 C 上, 與切向量垂直的平面稱為曲線 C 在該點處的**法平面**, 由向量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 張成的平面稱為曲線 C 的密切面, 由向量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{B}$ 張成的平面稱為曲線 C 的從切面.

註記 2.6.16 平滑曲線 $\mathbf{r}(t)$ 上某點的法平面、密切面、從切面的法向量分別為 $\mathbf{T}$ (或 $\mathbf{r}$)、$\mathbf{B}$ (或 $\mathbf{r}' \times \mathbf{T}'$)、$\mathbf{N}$ 或 $(\mathbf{T}')$.

定理 2.6.17 平滑曲線 $C : \mathbf{r}(t)$ 當 $t = t_0$ 時的法平面方程式為

$$\mathbf{r}(t_0) \cdot ((x, y, z) - \mathbf{r}(t_0)) .$$

註記 2.6.18 若空間中已知曲線由兩面式 $\begin{cases} y = \psi(x), \\ z = \omega(x) \end{cases}$ 表示, 則取 $\mathbf{r}(t) = (t, \psi(t), \omega(t))$ 為曲線的參數式, 並以參數式的方法處理.

若空間中已知曲線由兩面式 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 表示, 則需要用到多變量微積分的知識, 取

$$\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right)$$

為法平面的法向量, 再以點向式寫出切線方程式. 或者採用以下方法: 視方程組中的 y, z 為 x 的函數 (或擇其他兩變數之一作為變數, 餘兩者作為函數), 各方程式兩邊對 x 求導, 解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 那麼曲線的切向量為

$$\left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right),$$

即得法平面的方法向量.

例 2.6.19 求螺旋線 $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ $(ab \neq 0, a, b \in \mathbb{R})$ 在點 $(a, 0, 0)$ 處的切線、法平面、密切面及從切面方程式.

解 點 $(a, 0, 0)$ 對應參數 $t = 0$, 由於

$$\mathbf{r}'(0) = (-a \sin 0, a \cos 0, b) = (0, a, b),$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$\mathbf{T}'(0) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{T}'(0) = \frac{1}{\sqrt{a^b + b^2}}(0, -ab, a^2),$$

故曲線在點 $(a, 0, 0)$ 處的

(1) 切線方程式: $(x, y, z) = (a, at, bt)$;

(2) 法平面方程式: $ay + bz = 0$;

(3) 密切面方程式: $-by + az = 0$;

(4) 從切面方程式: $x = a$.

例 2.6.20 求空間曲線

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

在點 $(1, -2, 1)$ 處的切線方程式及法平面方程式.

解 在方程組兩邊對 x 求導, 得

$$\begin{cases} x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \end{cases}$$

將點 $(1, -2, 1)$ 代入, 得

$$\begin{cases} 1 - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \end{cases}$$

解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1$, 故所求切線方程式為

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2, \\ z = 1 - t, \end{cases}$$

法平面方程式為

$$x - z = 0.$$

2.7 近似計算與微分

導數在近似計算中的應用

當 $f(x_0)$ 容易求得, 且 x_0 附近的函數值難以計算或不可能手算時, 我們可以用**切線函數**

$$L_{x_0,f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

去估計 x_0 附近的函數值, 此方法稱為**線性近似**, 且函數 $L_{x_0,f}$ 稱為 f 在點 x_0 處的**線性化函數**.

例 2.7.1 估算 $\sqrt{3.98}$ 及 $\sqrt{4.05}$.

解 考慮 $f(x) = \sqrt{x+3}$, 那麼

$$L_{1,f}(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \frac{1}{4}(x - 1) = \frac{7 + x}{4},$$

即在 1 附近,

$$f(x) \approx \frac{x+7}{4},$$

分別取 $x = -0.98$ 及 $x = 1.05$, 得

$$\sqrt{3.98} \approx 1.995 \quad \text{及} \quad \sqrt{4.05} \approx 2.0125.$$

註記 2.7.2 以上估算方法不夠精確, 實際上, 二項式展開可以得到更精確的估計值.

微分

定義 2.7.3 如果

$$f(x + h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x; h), \tag{2.9}$$

其中 $h \mapsto A(x)h$ 是關於 h 的線性函數, 且當 $h \to 0$ 且 $x + h \in D_f$ 時, 有 $\alpha(x; h) = o(h)$ (高階無窮小), 則稱 f 為在點 $x \in D_f$ 的**可微函數**. 量

$$\Delta x(h) := (x + h) - x = h$$

和

$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$$

分別稱為**變數增量**和**函數增量**. 線性函數 $h \mapsto A(x)h$ 稱為 f 在點 $x \in E$ 的微分, 記作 $\mathrm{d}f(x)$, 即 $\mathrm{d}f(x)(h) = A(x)h$.

註記 2.7.4 (1) 有時將 $\Delta x(h)$ 和 $\Delta f(x;h)$ 簡記作 Δx 和 $\Delta f(x)$, 儘管它們本身都是 h 的函數.

(2) 由以上定義, 我們有

$$\Delta f(x;h) - \mathrm{d}f(x)(h) = \alpha(x;h),$$

並且當 $h \to 0$, $x+h \in D_f$ 時, $\alpha(x;h) = o(h)$, 即變數增量 h 引起的函數增量與線性函數 $\mathrm{d}f(x)$ 在同一個 h 處的值之差在 $h \to 0$ 時是比 h 更高階的無窮小量, 因此說微分是函數增量的**線性主部**.

(3) 由導函數的定義及 (2.9) 式, 可知

$$A(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

所以微分可寫成

$$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)h.$$

特別來說, 如果 $f(x) \equiv x$, 則 $f'(x) = 1$ 且

$$\mathrm{d}x(h) = 1 \cdot h = h,$$

所以有時說「變數的微分就是其增量」. 故

$$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)\mathrm{d}x(h), \tag{2.10}$$

即

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

注意, 等式 (2.11) 應理解為 h 的函數的等式.

(4) 由等式 (2.10) 得

$$\frac{\mathrm{d}f(x)(h)}{\mathrm{d}x(h)} = f'(x),$$

即關於 h 的函數 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ (函數 $\mathrm{d}f(x)$ 與 $\mathrm{d}x$ 之比) 是常數, 且等於 $f'(x)$. 所以當初定義導數時, 已經悄悄使用了記號 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 來暗示微分的概念及這個結果, 此結果即為微分與導數的關係, 故函數 f 在點 x 可導等價於 f 在點 x 可微.

(5) 觀察得知,

$$\Delta f(x) = \mathrm{d}f(x) + o(\mathrm{d}f(x)),$$

所以當 $|\Delta x| = |h|$ 很小時, 有近似 $\Delta f(x) \approx \mathrm{d}f(x)$, 故微分的概念也可以應用在近似計算.

例 2.7.5 求函數 $y = x^3$ 當 $x = 2$, $\mathrm{d}x(h) = \Delta x(h) = h = 0.02$ 時的微分.

解

$$\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x,$$

將 $x = 2$, $\mathrm{d}x = 0.02$ 代入上式, 得 $\mathrm{d}y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24$.

定理 2.7.6 (微分的運算法則) 設 $u = u(x)$, $v = v(x)$,

(1) $\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ (C 是常數);

(4) $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$;

(5) $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$;

(6) 若 $x = x(w)$ 是 w 的函數, 則 $\mathrm{d}u(x) = u'(x)\mathrm{d}x = u'\left(x(w)\right) \cdot \mathrm{d}x(w) = u'\left(x(w)\right) \cdot x'(w)\mathrm{d}w$.

證明 僅證明 (4):

$$\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = u'v\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x = v \cdot (u'\mathrm{d}x) + u \cdot (v'\mathrm{d}x) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v.$$

□

例 2.7.7 設 $y = \sin(2x+1)$, 求 $\mathrm{d}y$.

解

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u = \cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1) = \cos(2x+1)\cdot 2\mathrm{d}x = 2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

例 2.7.8 求 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right)$ 的近似值.

解 取 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\mathrm{d}x = \frac{\pi}{360}$, 則 $f'(x_0) = \cos x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) - \sin\frac{\pi}{6} \approx \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{360},$$

即

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.5000 + 0.0076 = 0.5076.$$

例 2.7.9 計算 $\sqrt[6]{65}$ 的近似值.

解

$$\sqrt[6]{65} = 2 \cdot \sqrt[6]{1 + \frac{1}{64}} \approx 2\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}\right) \approx 2.0052.$$

2.8 均值定理

定義 2.8.1 設有函數 $f : D_f \to \mathbb{R}$,

(1) 若在 x_0 附近, 均有 $f(x) \leq f(x_0)$, 則稱 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 是 f 的**局部極大值點** (或簡稱**極大值點**), $f(x_0)$ 為 f 的**局部極大值** (或簡稱**極大值**);

(2) 若在 x_0 附近, 均有 $f(x) \geq f(x_0)$, 則稱 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 是 f 的**局部極小值點** (或簡稱**極小值點**), $f(x_0)$ 為 f 的**局部極小值** (或簡稱**極小值**);

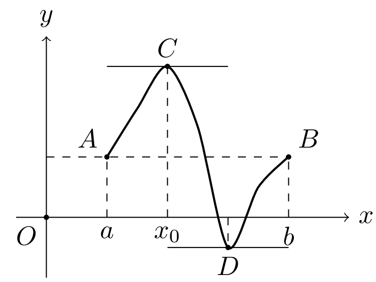
(3) 若對任意 $x \in D_f$, 均有 $f(x) \leq f(x_0)$, 則稱 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 是 f 的**最大值點**, $f(x_0)$ 為 f 的**最大值**;

(4) 若對任意 $x \in D_f$, 均有 $f(x) \geq f(x_0)$, 則稱 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 是 f 的**最小值點**, $f(x_0)$ 為 f 的**最小值**;

(5) 極大值點和極小值點 (相應地, 最大值點和最小值點) 統稱為**極值點** (相應地, **最值點**), 極大值和極小值 (相應地, 最大值和最小值) 統稱為**極值** (相應地, **最值**);

(6) 設 $x_0 \in D_f$, 即 f 在點 x_0 處有定義, 若 $f'(x_0) = 0$, 或 $f'(x_0) = \infty$, 或 $f'(x_0)$ 不存在 (即 f 在 x_0 處不可導), 則稱 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 為 f 的**臨界點**, 特別地, $f'(x_0) = 0$ 時的 x_0 或 $(x_0, f(x_0))$ 稱為 f 的駐點.

引理 2.8.2 (費馬引理) 設函數 f 在點 x_0 的某鄰域 $B(x_0)$ 內有定義, 若 f 在可導點 x_0 處達到局部極值, 則 x_0 是 f 的駐點.



證明 考慮 $f(x_0)$ 是極小值的情形 (極大值的情形證明也類似), 於是在 x_0 附近, 對於 $x_0 + h \in B(x_0)$, 有 $f(x+h) \geq f(x_0)$, 那麼當 $h > 0$ 時,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

當 $h < 0$ 時,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

依系理 1.3.45 (函數極限的保號性) 及 f 在 x_0 處可導的條件, 得

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

故 $f'(x_0) = 0$. □

注意 2.8.3 費馬引理的逆定理未必成立, 比如說 $x = 0$ 是函數 $f(x) = x^3$ 的駐點, 但 $x = 0$ 不是 f 的極值點.

註記 2.8.4 根據最值定理 (定理 1.7.41) 及費馬引理 (引理 2.8.2), 欲求函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上的最值, 可採以下步驟:

(1) 計算 $f(a)$ 及 $f(b)$;

(2) 求出 f 在其所有臨界點處的函數值;

(3) 比較以上兩個步驟所求得的所有函數值, 最大者即為 f 的最大值, 最小者即為 f 的最小值.

例 2.8.5 求函數 (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 及 (2) $g(x) = x^{3/5}(4 - x)$ 在閉區間 $[-1, 3]$ 上的最值.

解 (1) $f(-1) = -3$, $f(3) = 1$, 而

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{或} 2,$$

$f(0) = 1$, $f(2) = -3$. 比較以上所有函數值, 得

$$\max_{x \in [-1,3]} f(x) = 1, \qquad \min_{x \in [-1,3]} f(x) = -3.$$

(2) $g(-1) = -5$, $g(3) = 3^{3/5} = \sqrt[5]{27} \approx 1.93318$, 而

$$g'(x) = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}},$$

g 的臨界點為 $x = 0$ 及 $x = \frac{3}{2}$, $g(0) = 0$, $g(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}\sqrt[5]{108} \approx 3.18856$, 因此

$$\max_{x \in [-1,3]} g(x) = \frac{5}{4}\sqrt[5]{108}, \qquad \min_{x \in [-1,3]} g(x) = -5.$$

定理 2.8.6 (羅爾均值定理) 設函數 f 滿足

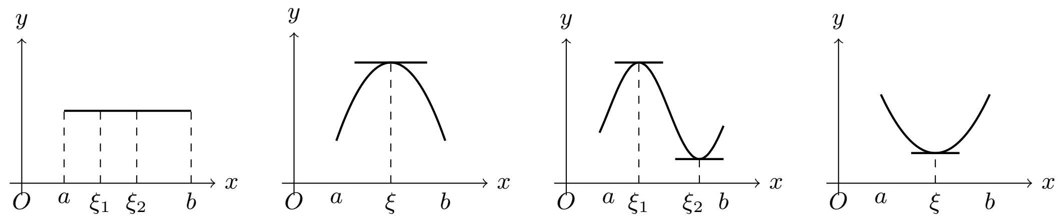
(1) 在閉區間 $[a,b]$ 上連續;

(2) 在開區間 (a,b) 內可導;

(3) 在區間端點處的函數值相等, 即 $f(a)=f(b)$,

那麼在區間 (a,b) 內至少有一點 ξ 滿足 $f'(\xi)=0$.

證明 考慮以下幾種情形:



(a) (b) (c) (d)

情況 1: f 在閉區間 $[a,b]$ 上是常函數, 如上圖的 (a). 此時, $f'\equiv 0$, 那麼 ξ 可以是 (a,b) 內的任意一點.

情況 2: 有 $x\in(a,b)$ 滿足 $f(x)>f(a)=f(b)$, 如上圖的 (b) 或 (c). 此時, 依 f 的連續性條件及最值定理 (定理 1.7.41), f 在 (a,b) 內必有點 ξ 使 f 達到最大值, 再根據 f 的可導性條件及費馬引理 (引理 2.8.2), 得 $f'(\xi)=0$.

情況 3: 有 $x\in(a,b)$ 滿足 $f(x)<f(a)=f(b)$, 如上圖的 (c) 或 (d). 此時與情況 2 完全類似, 只是 ξ 為 f 的極小值點. □

例 2.8.7 證明 $p(x)=2x^3+5x-1$ 恰有一實根.

證明 由於 $p(0)\cdot p(1)=-1\cdot 6=-6<0$, 可知 p 在 $[-1,0]$ 內至少有一根. 假設 p 有超過一個實根, 即存在 $a<b$ 滿足 $p(a)=p(b)=0$. 由於多項式函數 p 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 在開區間 (a,b) 內可導, 所以依羅爾均值定理 (定理 2.8.6), 可知存在 $\xi\in(a,b)$ 滿足 $p'(\xi)=0$, 但是對所有 $x\in\mathbb{R}$,

$$p'(x)=6x^2+5\geq 5>0,$$

也就是說, $p'(\xi)$ 不可能是 0, 矛盾. 因此, p 只有唯一的一根. □

定理 2.8.8 (拉格朗日均值定理) 設函數 f 滿足

(1) 在閉區間 $[a,b]$ 上連續;

(2) 在開區間 (a,b) 內可導,

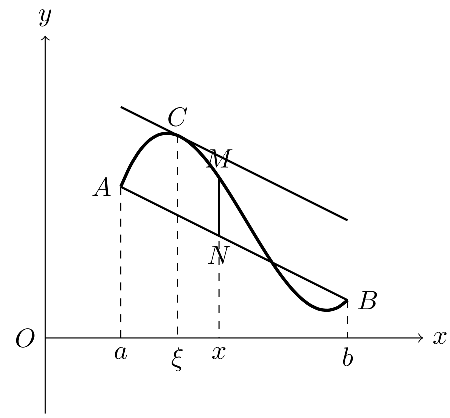
那麼在區間 (a,b) 內至少有一點 ξ 滿足

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a).$$

註記 2.8.9 考慮 $a\neq b$, 則

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

也就是說, 拉格朗日均值定理的幾何意義為: 在 (a,b) 內至少存在某一點 ξ, 使得 f 在點 ξ 處的切線與以區間 $[a,b]$ 端點為兩端點的弦 $\overline{AB}$ (如下圖) 平行.



證明 考慮函數

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

此函數即為上圖中線段 $\overline{MN}$ 的「有號長度」. 易驗證 φ 滿足羅爾均值定理的條件, 且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

依羅爾均值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$, 由此即得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

註記 2.8.10 若令 $a=x_0$, $b=x_0+h$, $h>0$, 則結論可寫成

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h,$$

其中 $0<\theta<1$.

例 2.8.11 設函數 f 在區間 $[1,4]$ 上連續, 在區間 $(1,4)$ 內可導, 且 $f(1)=2$. 若對所有 $x\in(1,4)$, 均有 $2\le f'(x)\le 3$, 則 $f(4)$ 的最大可取範圍應為何?

解 依拉格朗日均值定理 (定理 2.8.8), 存在 $\xi\in(1,4)$, 使得

$$f(4)-f(1)=3f'(\xi),$$

即

$$f(4)=f(1)+3f'(\xi).$$

由於對所有 $x\in(1,4)$, 均有 $f'(x)\ge 2$, 所以 $f'(\xi)\ge 2$, 故

$$f(4)\ge 2+3\cdot 2=8.$$

由於對所有 $x\in(1,4)$, 均有 $f'(x)\le 3$, 所以 $f'(\xi)\le 3$, 故

$$f(4)\le 2+3\cdot 3=11.$$

故

$$8\le f(4)\le 11.$$

系理 2.8.12 若函數 f 在區間 I 上連續, $\mathring{I}$ 內可導, 且導數恆為零, 則 f 在區間 I 上是常函數.

證明 在區間 I 上任取兩點 x_1, x_2, $(x_1 < x_2)$, 依拉格朗日均值定理 (定理 2.8.8), 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 滿足

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1),$$

而 $f'(\xi) = 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) = 0$, 即

$$f(x_1) = f(x_2).$$

由於 x_1, x_2 是 I 上的任意兩點, 所以 f 在 I 上是常函數. □

注意 2.8.13 此系理是在**區間** I 上討論, 如果不是一個區間, 而是在「不連通」的集合上 (如相離兩區間的聯集) 討論的話, 那麼此系理將會失效, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0; \\ 2, & 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

顯然 f 分別在區間 $[-1, 0]$ 及 $[2, 3]$ 滿足定理條件, 且 f 在該兩區間上都是常函數, 但 f 在整個定義集合 $[-1, 0] \cup [2, 3]$ 不是常函數.

系理 2.8.14 設 f, g 在區間 I 上連續, $\mathring{I}$ 內可導, 若對所有 $x \in I$, 恆有 $f'(x) = g'(x)$, 則 $f(x) = g(x) + C$, 其中 C 是常數, 即區間上導數相等的兩函數必只相差一個常數.

證明 考慮函數 $h(x) = f(x) - g(x)$, 顯然 h 在 I 上連續, 在 $\mathring{I}$ 內可導, 且 $h' \equiv 0$. 依系理 2.8.12, 可知 $h = C$, 即 $f = g + C$. □

例 2.8.15 證明當 $x > 0$ 時, 有

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

證明 設 $f(t) = \ln(1+t)$, 顯然 f 在區間 $[0, x]$ 滿足拉格朗日均值定理 (定理 2.8.8) 的條件, 依定理, 存在 $\xi \in (0, x)$ 滿足

$$f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0),$$

由於 $f(0) = 0$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, 故

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi},$$

又 $0 < \xi < x$, 有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

故

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad (x > 0).$$

□

註記 2.8.16 設連續曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的參數方程為

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (a \le t \le b),$$

其中 t 為參數, 那麼曲線上點 (x, y) 處的切線斜率為

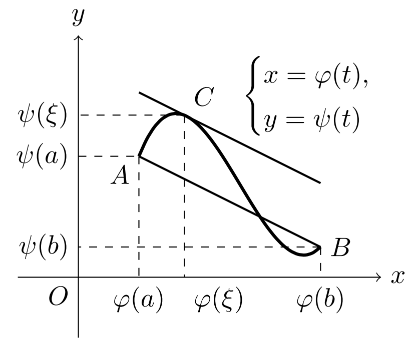
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

弦 $\overline{AB}$ 的斜率為

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)},$$

如果曲線上點 C 處 (對應於參數 $t = \xi$) 的切線平行於弦 $\overline{AB}$, 那麼

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$



定理 2.8.17 (柯西均值定理) 若函數 f 及 g 滿足

(1) 在閉區間 $[a,b]$ 上連續;

(2) 在開區間 (a,b) 內可導,

則至少有一點 $\xi \in (a,b)$ 滿足

$$f'(\xi)\cdot(g(b)-g(a)) = g'(\xi)\cdot(f(b)-f(a)).$$

證明 考慮函數

$$h(x) = (g(b)-g(a))\,(f(x)-f(a)) - (g(x)-g(a))\,(f(b)-f(a)),$$

顯然函數 h 滿足羅爾均值定理 (定理 2.8.6) 的三個條件, 所以存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $h'(\xi)=0$. 對 h 求導, 得

$$h'(x) = (g(b)-g(a))\cdot f'(x) - g'(x)\cdot(f(b)-f(a)),$$

令 $x=\xi$, 即有

$$f'(\xi)\cdot(g(b)-g(a)) = g'(\xi)\cdot(f(b)-f(a)).$$

□

注意 2.8.18 若 $g(a)\neq g(b)$, 且對所有 $x\in(a,b)$, 均有 $g'(x)\neq 0$, 那麼柯西均值定理的結論可改寫為

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

例 2.8.19 設函數 f 在 $[0,1]$ 上連續, 在 $(0,1)$ 內可導, 證明至少存在一點 $\xi\in(0,1)$, 使

$$f'(\xi) = 2\xi\,(f(1)-f(0)).$$

證明 令 $g(x)=x^2$, 則 f,g 在 $[0,1]$ 上滿足柯西均值定理的條件, 因此存在一點 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi) = 2\xi\,(f(1)-f(0)).$$

□

2.9 羅比達法則

定義 2.9.1 如果當 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 時, 兩函數 f 與 g 均為無窮小或無窮大, 那麼極限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(\text{或} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

可能存在、也可能不存在於 $\mathbb{R}$ 中, 通常把此種極限稱為**未定式**, 並分別記作 $\frac{0}{0}$ (表示兩無窮小的比) 和 $\frac{\infty}{\infty}$ (表示兩無窮大的比).

定理 2.9.2 (羅比達法則 1; $x\to x_0$, $\frac{0}{0}$ 型) 設

(1) 當 $x\to x_0$ 時, 函數 $f,g\to 0$;

(2) 在點 x_0 的某去心鄰域內, f',g' 都存在, 且 $g'\neq 0$;

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在於 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中,

那麼

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

證明 因為 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, 所以函數

$$F(x):=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0;\\ 0, & x=x_0,\end{cases}\quad 和\quad G(x):=\begin{cases} g(x), & x\neq x_0;\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

在點 x_0 的某一鄰域内連續, 設 x 時該鄰域内某一點, 那麼在以 x 和 x_0 為端點的區間上, F 和 G 滿足柯西均值定理 (定理 2.8.17) 的條件, 因此存在 $\xi\in(x_0,x)$ 或 (x,x_0), 滿足

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

令 $x\to x_0$, 那麼 $\xi\to x_0$, 再根據條件 (3) 即得結論. □

注意 2.9.3 (1) 第 3 個條件很重要, 如果極限不為某有限值或無窮大, 則羅比達法則可能失效. 例如,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x},$$

顯然, 分子和分母均為 $x\to 0$ 時的無窮小, 但極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

不存在, 所以不能使用羅比達法則. 正解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0.$$

(2) 只要分子和分母的函數仍滿足羅比達法則的條件, 那麼羅比達法則就可以反覆使用.

(3) 羅比達法則對於 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$ 的情形仍適用.

例 2.9.4 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}$;

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$.

定理 2.9.5 (羅比達法則 2; $x\to\infty$, $\frac{0}{0}$ 型) 設

(1) 當 $x\to\infty$ 時, 函數 $f,g\to 0$;

(2) 在 ∞ 的某去心鄰域内, f',g' 都存在, 且 $g'\neq 0$;

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在於 $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 中,

那麼

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g(x)}.$$

證明 令 $x = \frac{1}{t}$, 那麼根據無窮大與無窮小的關係, 當 $x \to \infty$ 時, $t \to 0$. 於是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^{-2}f'(1/t)}{-t^{-2}g'(1/t)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

注意 2.9.6 羅比達法則對於 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 的情形仍適用.

定理 2.9.7 (羅比達法則 3; $x \to x_0$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型) 設

(1) 當 $x \to x_0$ 時, 函數 $f, g \to \infty$;

(2) 在點 x_0 的某去心鄰域內, f', g' 都存在, 且 $g' \neq 0$;

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在於 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ 中,

那麼

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

證明 令 $F(x) = \frac{1}{f(x)}$, $G(x) = \frac{1}{g(x)}$, 那麼當 $x \to x_0$ 時, 函數 F, G 均為無窮小, 並且 $F', G' \neq 0$. 此時, 可使用羅比達法則 1 (定理 2.9.2), 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}} \\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot\frac{g^2(x)}{f^2(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\right)^2,\end{aligned}$$

其中, 條件 (3) 保證了 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 於 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的存在性. 上式兩邊同除以 $\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\right)^2$, 得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

定理 2.9.8 (羅比達法則 4; $x \to \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型) 設

(1) 當 $x \to \infty$ 時, 函數 $f, g \to \infty$;

(2) 在 ∞ 的某去心鄰域內, f', g' 都存在, 且 $g' \neq 0$;

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在於 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ 中,

那麼

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g(x)}.$$

證明 略. 提示: 模仿定理 2.9.7的證明, 使用定理 2.9.5; 或者直接令 $t = 1/x$, 並使用定理 2.9.7. □

例 2.9.9 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1;$

(2) 設 $n > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n} = 0;$

(3) 設 $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0.$

注意 2.9.10 數列的極限不能直接使用羅比達法則, 因為數列是定義域為 $\mathbb{N}$ 的函數, 並不連續, 故不可導, 因此必須要轉化為以實數為變數的函數當 $x \to +\infty$ 時的極限, 才可以使用羅比達法則, 最後再根據定理 1.3.48 得出所求的數列極限.

例 2.9.11 (數列連續化求極限) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2/n}-1}{1/n}$.

解 因

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2/x}\left(-2/x^2\right)}{-1/x^2} = 2\lim_{x\to+\infty} e^{2/x} = 2,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2/n}-1}{1/n} = 2.$$

例 2.9.12 (羅比達法則失敗的例子) (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} =$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 回到了最初的起點!

正解: 分子、分母同除以 x 再取極限, 或者使用等價無窮大替換 $\sqrt{1+x^2} \sim x$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 陷入了死循環!

正解: 分子、分母同除以 e^x 再取極限, 或者使用等價無窮大替換 $e^x \pm e^{-x} \sim e^x$.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^{10}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^{-2}e^{-1/x}}{10x^9} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{10x^{11}}$, 分母變更複雜了!

正解: 令 $t = \frac{1}{x}$, 再使用羅比達法則.

注意 2.9.13 其他的未定式及其轉化:

未定式	欲求的極限	條件	轉換為分式形式的方法
$0 \cdot \infty$	$\lim f(x)g(x)$	$f(x) \to 0, g(x) \to \infty$	$\lim \frac{f(x)}{1/g(x)}$ 或 $\lim \frac{g(x)}{1/f(x)}$
$(\pm\infty) - (\pm\infty)$	$\lim\left(f(x) - g(x)\right)$	$f(x), g(x) \to \infty$	$\lim \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/\left(f(x)g(x)\right)}$
0^0 或 ∞^0	$\lim f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 0^+, g(x) \to 0$ 或 $f(x) \to +\infty, g(x) \to 0$	$\exp\lim \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$
1^∞	$\lim f(x)^{g(x)}$	$f(x) \to 1, g(x) \to \infty$	$\exp\lim \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$

例 2.9.14 (1) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2}{2} = 0;$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{2} = 0;$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = \exp\left(\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x}\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}\right) = \exp\left(-\lim\limits_{x\to0^+} x\right) = e^0 = 1;$

(4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\cdot\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{3x-\sin 3x}{\frac{1}{2}x^2\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{3x-\sin 3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{3-3\cos 3x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$
$= \lim\limits_{x\to0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}.$

2.10 泰勒均值定理

定理 2.10.1 (泰勒均值定理 1) 如果函數 f 在 x_0 處有 n 階導數, 那麼存在 x_0 的某個鄰域, 對於該鄰域內的任一 x, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right).$$

證明 記 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$, 那麼

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

因為 f 在 x_0 處具有 n 階導數, 所以 f 必在 x_0 的某鄰域內具有 $n-1$ 階導數, 從而 R_n 也在該鄰域內 $n-1$ 階可導, 反覆使用羅比達法則, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}&=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\cdots\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0,\end{aligned}$$

故 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$. □

註記 2.10.2 (1) 多項式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

稱為函數 f 在 x_0 處的 n 次**泰勒多項式**, 公式

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

稱為 f 在 x_0 處的**帶有皮亞諾餘項的** n **階泰勒公式**. 而 R_n 稱為皮亞諾餘項, 它就是用 n 次泰勒多項式來近似表示函數 f 所產生的誤差.

(2) 如果取 x_0, 那麼有帶有皮亞諾餘項的**馬克勞林公式**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

定理 2.10.3 (泰勒均值定理 2) 如果函數 f 在 x_0 的某個鄰域 $B(x_0)$ 內 $n+1$ 階可導, 那麼對於任何 $x\in B(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{2.12}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

這裡 ξ 是介於 x_0 及 x 之間的某個值.

證明 記 $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$, 那麼 R_n 在 $B(x_0)$ 內 $n+1$ 階可導, 且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

對兩個函數 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 為端點的區間上使用柯西均值定理 (定理 2.8.17), 那麼存在在 x_0 與 x 之間的 ξ_1 滿足

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n},$$

再對兩個函數 $R_n'(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 為端點的區間上應用柯西均值定理, 那麼存在在 x_0 與 ξ_1 之間的 ξ_2 滿足

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}},$$

依此類推, 經過 $n+1$ 次後, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中 ξ 介於 x_0 與 ξ_n 之間, 因而也在 x_0 與 x 之間. 由於 $p_n^{(n+1)}(x)=0$, 故有

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),$$

因此由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 在 x_0 與 x 之間. □

註記 2.10.4 (1) (2.12) 式稱為 f 在 x_0 處的**帶有拉格朗日餘項的** n **階泰勒公式**, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 稱為**拉格朗日餘項**.

(2) 如果對於某個固定的 n, 當 $x\in B(x_0)$ 時, $|f^{(n+1)}(x)|\le M$, 那麼有估計式

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

(3) 拉格朗日餘項的另一種形式:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t,$$

此為參變函數的積分, 將來會介紹積分的意義.

(4) 如果取 $x_0=0$, 那麼 ξ 介於 0 與 x 之間, 令 $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$, 那麼有帶有拉格朗日餘項的**馬克勞林公式**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

誤差估計式相應地變成

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

註記 2.10.5 羅爾均值定理 (定理 2.8.6)、拉格朗日均值定理 (定理 2.8.8)、柯西均值定理 (定理 2.8.17) 及泰勒均值定理 (定理 2.10.3) 互相等價, 即它們之間可互相推出.

例 2.10.6 寫出函數 $f(x)=e^x$ 的帶有拉格朗日餘項的 n 階馬克勞林公式.

解 因為

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$$

而 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ $(0<\theta<1)$, 代入公式, 得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

註記 2.10.7 由此公式, 如果以 e^x 的 n 次泰勒多項式表達之為

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

那麼誤差為

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\quad(0<\theta<1).$$

取 $x=1$, 則得自然底數 e 的近似值為

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

其誤差為

$$|R_n|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

例 2.10.8 求函數 $f(x)=\sin x$ 的帶有拉格朗日餘項的 n 階馬克勞林公式.

解 由於

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad(n\in\mathbb{N}\cup\{0\}),$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod 2;\\ 1, & n\equiv 1 \pmod 4;\\ -1, & n\equiv 3 \pmod 4,\end{cases}$$

於是, 令 $n=2m$, 就有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m},$$

其中,

$$R_{2m}=\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},\quad(0<\theta<1).$$

例 2.10.9 類似地, 還可以得到

(1) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\dfrac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}$;

(2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$;

(3) $(1+x)^\mu=1+\mu x+\dfrac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$,
其中, $R_n(x)=\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}$;

(4) $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^m \dfrac{x^2 m + 1}{2m+1} + \dfrac{(-1)^{m+1} x^{2m+2}}{(2m+2)(1+\theta^2 x^2)^{m+2}}$;

(5) $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dfrac{\sinh \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2}$;

(6) $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + \dfrac{\sinh \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1}$;

這裡, $0 < \theta < 1$.

例 2.10.10 利用帶有皮亞諾餘項的馬克勞林公式, 求極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}.$$

解 分式的分母可用等價無窮小替換 $\sin^3 x \sim x^3$ $(x \to 0)$, 所以只需將分子中的 $\sin x$ 及 $\cos x$ 分別用帶有皮亞諾餘項的三階馬克勞林公式表示, 即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^3),$$

於是

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

2.11 函數的性態與曲線描繪

函數的增減性

定義 2.11.1 設函數 f 在區間 I 上有定義, 若對所有 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 且

(1) $f(x_1) \le f(x_2)$, 則稱 f 在區間 I 上是**不減/單調遞增函數**, I 稱為 f 的**增區間**;

(2) $f(x_1) \ge f(x_2)$, 則稱 f 在區間 I 上是**不增/單調遞減函數**, I 稱為 f 的**減區間**;

(3) $f(x_1) < f(x_2)$, 則稱 f 在區間 I 上是**嚴格遞增函數**, I 稱為 f 的**嚴格增區間**;

(4) $f(x_1) > f(x_2)$, 則稱 f 在區間 I 上是**嚴格遞減函數**, I 稱為 f 的**嚴格減區間**;

(5) 單調遞增函數、單調遞減函數統稱為**單調函數**, 嚴格遞增函數、嚴格遞減函數統稱為**嚴格單調函數**, 增區間、減區間統稱為**單調區間**, 嚴格增區間、嚴格減區間統稱為**嚴格單調區間**.

準則 2.11.2 (可導函數的單調準則) 設 f 在區間 I 上連續, 且在 I 的內部 $\mathring{I}$ 內可導,

(1) 若對所有 $x \in \mathring{I}$, 均有 $f'(x) \ge 0$, 且等號僅在有限多個點處成立, 則函數在區間 I 上是增函數;

(2) 若對所有 $x \in \mathring{I}$, 均有 $f'(x) \le 0$, 且等號僅在有限多個點處成立, 則函數在區間 I 上是減函數.

證明 任取兩點 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 因 f 在 I 內可導, 故在 I 上連續, 所以可知 f 在區間 (x_1, x_2) 內可導, 且在 $[x_1, x_2]$ 上連續, 依拉格朗日均值定理 2.8.8, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

(1) 如果對所有 $x \in \mathring{I}$, 均有 $f'(x) \geq 0$, 則 $f'(\xi) \geq 0$, 因此

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

(2) 如果對所有 $x \in \mathring{I}$, 均有 $f'(x) \leq 0$, 則 $f'(\xi) \leq 0$, 因此

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

□

注意 2.11.3 此處針對區間討論, 而不是一般集合. 例如, 函數 $f(x)=x^3-x$ 在區間 $(-\infty,-1/\sqrt{3}]$ 及 $[1/\sqrt{3},+\infty)$ 上滿足 $f'(x)=3x^2-1\geq 0$, 故 f 是該二區間上的增函數, 但

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{27}}>\frac{1}{\sqrt{27}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

也就是說, 對於取自不同的區間的 x_1 及 x_2, 即使有 $x_1<x_2$ 且 f 在該兩區間上是增函數, 也未必會有 $f(x_1)<f(x_2)$.

例 2.11.4 判斷函數 $f(x)=x-\sin x$ 在區間 $[-\pi,\pi]$ 上的單調性.

解 因為在 $(-\pi,\pi)$ 內,

$$f'(x)=1-\cos x\geq 0,$$

且等號僅在 $x=0$ 處成立, 故依準則, 可知函數 f 在區間 $[-\pi,\pi]$ 上單調遞增.

例 2.11.5 討論函數 $f(x)=e^x-x-1$ $(-\infty,+\infty)$ 的單調性.

解 $f'(x)=e^x-1$.
因為在 $(-\infty,0)$ 內, $f'(x)<0$; 在 $(0,+\infty)$ 內, $f'(x)>0$, 所以 f 的減區間為 $(-\infty,0]$, 增區間為 $[0,+\infty)$.

例 2.11.6 討論函數 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $(-\infty,+\infty)$ 的單調性.

解 當 $x\neq 0$ 時,

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

當 $x=0$ 時, 導數不存在. 在 $(-\infty,0)$ 內, $f'(x)<0$; 在 $(0,+\infty)$ 內, $f'(x)>0$, 因此函數 f 在區間 $(-\infty,0]$ 上是減函數, 在區間 $[0,+\infty)$ 上是增函數.

注意 2.11.7 由前兩個例子可看出, 單調區間的分界點剛好就是函數 f 的臨界點, 故一般地, 我們有如下結論:

如果函數 f 在定義區間上連續, 除了有限個導數不存在的點外導數存在且在區間內只有有限個駐點, 那麼只要用函數的臨界點 (駐點和導數不存在的點) 來劃分函數的定義區間, 就能保證 f' 在各個部分區間內保持固定符號, 因而函數 f 在每個部分區間上單調.

例 2.11.8 求函數 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的單調區間.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$, 顯然 f' 沒有不可導點, 所以 f 的所有臨界點都是駐點.

$$f'(x)=0 \iff x=1 \text{ 或 } 2,$$

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

故 f 的減區間為 $[1,2]$, 增區間為 $(-\infty,1]$ 和 $[2,+\infty)$.

例 2.11.9 證明當 $x>1$ 時, $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

解 令 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$, 那麼

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(x\sqrt{x}-1\right),$$

當 $x>1$ 時, 恆有 $f'(x)>0$, 所以 f 在區間 $[1,+\infty)$ 上單調遞增, 從而當 $x>1$ 時, $f(x)>f(1)=0$, 即

$$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\quad(x>1).$$

函數圖形的凹凸性與反曲點

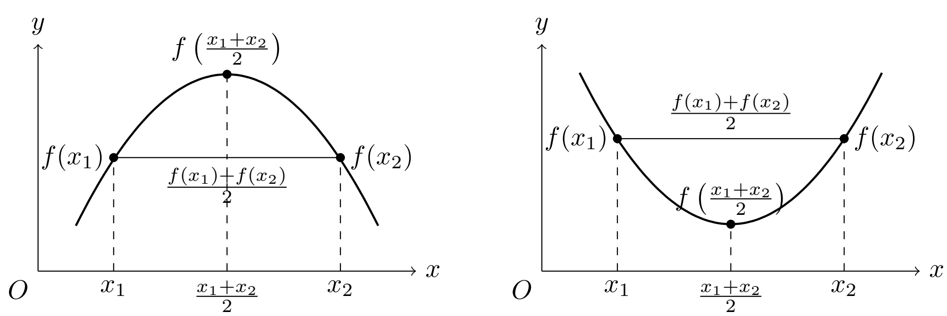
定義 2.11.10 設 f 在區間 I 上連續, 如果對 I 上任一兩點 x_1,x_2, 恆有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那麼稱 f 在 I 上的圖形是**向上凹的/向下凸的/凹弧**; 如果恆有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那麼稱 f 在 I 上的圖形是**向下凹的/向上凸的/凸弧**. 如果 $x_0\in\mathring{I}$, 且曲線 $y=f(x)$ 在經過點 $(x_0,f(x_0))$ 時, 曲線的凹凸性改變了, 則稱點 $(x_0,f(x_0))$ 為此曲線的**反曲點**.



凸弧　　凹弧

註記 2.11.11 其他定義方式:

(1) 如果 f 的圖形的切線總是在圖形下方, 則稱為凹弧; 如果 f 的圖形的切線總是在圖形上方, 則稱為凸弧;

(2) 如果區間 I 內任意兩點 x,y 及所有 $t\in[0,1]$ 滿足

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y),$$

則稱 f 的圖形為凹弧; 如果滿足

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\ge t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y),$$

則稱 f 的圖形為凸弧 (注意: 有的教科書所定義的這兩個名詞恰好相反).

準則 2.11.12 (可導函數曲線凹凸性準則) 設 f 在區間 I 上連續, 在區間 $\mathring{I}$ 內二階可導, 那麼

(1) 若在 $\mathring{I}$ 內, $f''(x) > 0$, 則 f 在 I 上的圖形是凹的;

(2) 若在 $\mathring{I}$ 內, $f''(x) < 0$, 則 f 在 I 上的圖形是凸的.

證明 僅證明情形 (1). 設 $x_1, x_2 \in I$ 為任意兩點, 且 $x_1 < x_2$, 令 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, 記 $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, 則 $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$, 依拉格朗日均值定理 2.8.8, 得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta_1 h)h,$$

$$f(x_0) - f(x_0 - h) = f'(x_0 - \theta_2 h)h,$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. 兩式相減, 得

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]\, h.$$

再對 f' 在區間 $[x_0 - \theta_2 h, x_0 + \theta_1 h]$ 上使用拉格朗日均值定理, 得

$$[f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]\, h = f''(\xi)(\theta_1 + \theta_2)h^2,$$

其中 $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$. 根據假設, $f''(\xi) > 0$, 故有

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) > 0,$$

即

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} > f(x_0),$$

亦即

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

故 f 在 I 上的圖形是凹的. □

定義 2.11.13 設函數 f 在區間 I 有定義, 如果有一點 $x_0 \in I$ 使得 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0) = \infty$ 或 $f''(x_0)$ 不存在, 則稱點 x_0 為 f 的**二階臨界點**.

系理 2.11.14 函數 f 的反曲點必為二階臨界點.

注意 2.11.15 此系理反過來未必成立, 比如說 $f(x) = x^4$ 在點 $x = 0$ 處滿足 $f''(0) = 0$, 但 f 的圖像總是凹的.

註記 2.11.16 與函數的增減性判斷方法類似地, 一般有如下步驟來判定函數的凹凸區間及反曲點:

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 求出 f 的所有二階臨界點;

(3) 以所有二階臨界點及函數 f 無定義的點來劃分區間, 並判斷 f'' 在各個區間內的符號.

例 2.11.17 判斷 $f(x) = \ln x$ 的凹凸性.

解 因 $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, 所以在 $(0, +\infty)$ 內, 恆有 $f'' < 0$, 故曲線 $y = \ln x$ 是凸的.

例 2.11.18 求曲線 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的反曲點.

解 設 $y = f(x)$, 那麼 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, $f''(x) = 12x + 6 = 6(2x + 1)$. 顯然函數 f 在整個定義域上都是二階可導的, 所以 $x = -1/2$ 是 f 唯一的二階臨界點.

x	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,+\infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$

故 f 的凹區間為 $[-1/2,+\infty)$, 凸區間為 $(-\infty,-1/2]$, 反曲點為 $(-1/2,41/2)$.

例 2.11.19 求曲線 $y=\sqrt[3]{x}$ 的反曲點.

解 設 $y=f(x)$, 顯然 f 在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上連續. 當 $x\neq 0$ 時,

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

當 $x=0$ 時, 函數的二階導數不存在, 故 $x=0$ 是 f 的二階臨界點.

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
f''	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$

故 f 的凸區間為 $[0,+\infty)$, 凹區間為 $(-\infty,0]$, 反曲點為 $(0,0)$.

例 2.11.20 設有曲線

$$\begin{cases} x=t^2,\\ y=t^3-3t, \end{cases}$$

討論該曲線的凹凸性.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2-3}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3t^2-3}{2t}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2)}=\frac{\frac{6t^2+6}{4t^2}}{2t}=\frac{3t^2+3}{4t^3},$$

因此, 當 $t>0$ 時, 曲線是凹的, 當 $t<0$ 時, 曲線是凸的.

函數的極值

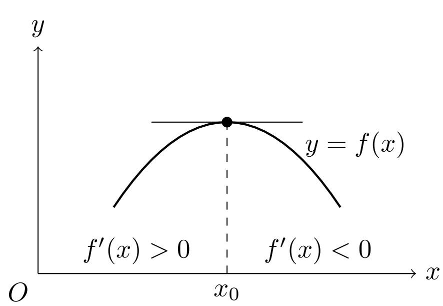
回顧: 由費馬引理 2.8.2 可知函數極值的必要條件: 函數 f 在點 x_0 處可導且取得極值, 則 $f'(x_0)=0$.

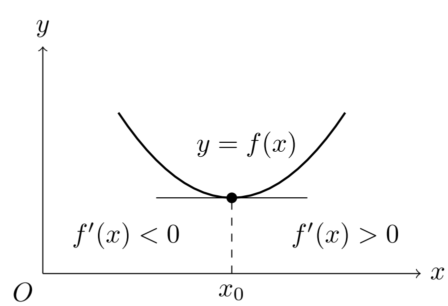
準則 2.11.21 (函數極值的第一充分條件) 設函數 f 在點 x_0 處連續, 且在 x_0 的某去心鄰域 $B'(x_0,\delta)$ 內可導.

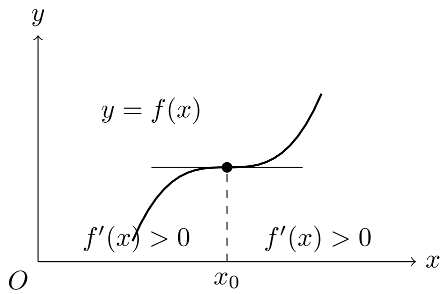
(1) 若當 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 時, $f'(x)>0$, 而當 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 時, $f'(x)<0$, 則 f 在 x_0 處取得極大值;

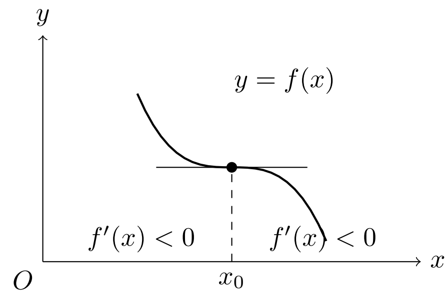
(2) 若當 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 時, $f'(x)<0$, 而當 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 時, $f'(x)>0$, 則 f 在 x_0 處取得極小值;

(3) 若當 $x\in B'(x_0,\delta)$ 時, f' 的符號保持不變, 則 f 在 x_0 處沒有極值.









證明 僅證明 (1): 依函數單調性的準則, 函數 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 內單調遞增, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 內單調遞減, 又因為 f 在 x_0 處是連續的, 所以當 $x \in B'(x_0, \delta)$ 時, 總有 $f(x) < f(x_0)$, 所以 $f(x_0)$ 是 f 的一個極大值. □

註記 2.11.22 與反曲點類似地, 函數的極值點可以採以下步驟求出:

(1) 求出導函數 f';

(2) 求出 f 的所有臨界點 (駐點與不可導點);

(3) 以所有臨界點及函數 f 無定義的點, 並判斷 f' 在各個區間內的符號.

例 2.11.23 求函數 $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的極值.

解 函數 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 內連續, 除了 $x = -1$ 外處處可導, 並且

$$f'(x) = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

f 的臨界點為 $x = -1, 1$.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

故 $x = -1$ 是 f 的極大值點, $x = 1$ 是 f 的極小值點; 因此, f 的極大值為 $f(-1) = 0$, 極小值為 $f(1) = -3\sqrt[3]{4}$.

準則 2.11.24 (函數極值的第二充分條件) 設函數 f 在 x_0 處具有二階導數, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那麼

(1) 當 $f''(x_0) < 0$ 時, 函數 f 在 x_0 處取得極大值;

(2) 當 $f''(x_0) > 0$ 時, 函數 f 在 x_0 處取得極小值.

證明 僅證明 (1): 由於 $f''(x_0) < 0$, 即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0,$$

依函數極限的局部保號性 (命題 1.3.42), 當 x 在 x_0 的充分小的去心鄰域內時,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0,$$

但 $f'(x_0) = 0$, 所以

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

因此, 對於此去心鄰域內的 x 來說, $f'(x)$ 與 $x - x_0$ 異號, 故當 $x < x_0$ 時, $f'(x) > 0$; 當 $x > x_0$ 時, $f'(x) < 0$, 於是依函數極值的第一充分條件可知, f 在點 x_0 處取得極大值. □

注意 2.11.25 當 $f''(x_0)=0$ 時, 無法由此準則得出確定的結論, 此時宜改用其他方法來判斷極值.

例 2.11.26 求函數 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的極值.

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, 顯然函數 f 處處可導. 令 $f'(x)=0$, 得駐點 $x=-1,0,1$.

$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$. 因 $f''(0)=6>0$, 所以 f 在 $x=0$ 處取得極小值 $f(0)=0$. 但 $f''(-1)=f''(1)=0$, 所以函數極值的第二充分條件無效, 改用第一充分條件:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f'	$-$	$-$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

因此 f 在 $x=-1,1$ 處沒有極值.

補充 2.11.27 如果函數在 x_0 處有 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 那麼

(1) 當 n 為奇數時, f 在 x_0 處不取得極值;

(2) 當 n 為偶數時, f 在 x_0 處取得極值, 且當 $f^{(n)}(x_0)<0$ 時, $f(x_0)$ 為極大值, 當 $f^{(n)}(x)>0$ 時, $f(x_0)$ 為極小值.

證明 利用帶有皮亞諾餘項的泰勒公式, 在 x_0 附近, 有:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right) \\ &= f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

根據函數極限的局部保號性 (命題 1.3.42), 可知在 x_0 附近, $f(x)-f(x_0)$ 和 $f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ 同號.

(1) 當 n 是奇數時, 若 $x>x_0$, 則 $(x-x_0)^n>0$, 若 $x<x_0$, 則 $(x-x_0)^n<0$. 因此, 不論 $f^{(n)}(x_0)$ 的符號為何, $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 兩側的符號相異, 故 x_0 不可能是極值點.

(2) 當 n 是偶數時, 不管 $x>x_0$ 還是 $x<x_0$, 均有 $(x-x_0)^n>0$, 此時 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 兩側的符號必相同, 故 x_0 必為極值點. 又

  (a) 當 $f''(x_0)>0$ 時, $f(x)>f(x_0)$, 此時 $f(x_0)$ 是極小值;

  (b) 當 $f''(x_0)<0$ 時, $f(x)<f(x_0)$, 此時 $f(x_0)$ 是極大值.

□

例 2.11.28 已知 0 是函數 $f(x)=x^4, g(x)=x^3$ 的駐點, 試問: 0 是否是它們的極值點?

解 $g'(0)=3\cdot 0^2=0$, $g''(0)=6\cdot 0=0$, $g'''(0)=6\neq 0$, 因此 $x=0$ 不是 g 的極值點.

$f'(0)=4\cdot 0^3=0$, $f''(0)=12\cdot 0^2=0$, $f'''(0)=24\cdot 0=0$, $f^{(4)}(0)=24>0$, 因此 $x=0$ 是 f 的極小值點.

函數圖形的描繪

利用導數描繪函數圖形的一般步驟為:

(1) 確定函數 $y=f(x)$ 的定義域、截距及某些特性, 如對稱性、週期性等;

(2) 求 f', f'' 及所有臨界點、二階臨界點;

(3) 劃分區間, 討論 f' 及 f'' 在各個區間內的符號;

(4) 確定函數 f 在各區間內的增減性、凹凸性、極值點及反曲點, 以及計算 f 在各臨界點的函數值;

(5) 確定函數的水平、鉛直、斜等漸近線;

(6) 利用以上資訊, 描繪函數圖形.

例 2.11.29 描繪函數 $y = f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的圖形.

解 (1) 定義域: $(-\infty, +\infty)$; $f(0) = 1$; 無奇偶性及週期性.

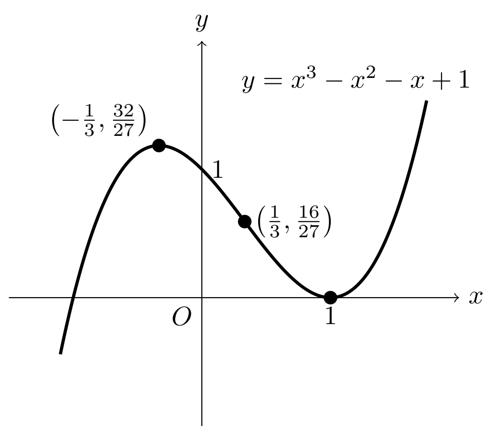
(2) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$, $f''(x) = 6x - 2 = 2(3x-1)$,
臨界點與二階臨界點: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$.

(3) 劃分區間:

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	升凸	極大 $\frac{32}{27}$	降凸	反曲 $\frac{16}{27}$	降凹	極小 0	升凹

(4) 無漸近線.

(5) 圖像:



例 2.11.30 描繪函數 $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ 的圖形.

解 (1) 定義域: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$; 奇函數; 無週期性.

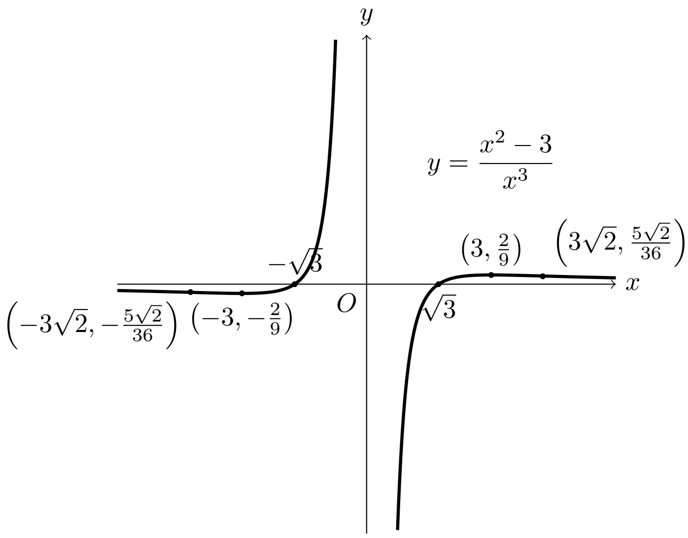
(2) $f'(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^4}$, $f''(x) = \dfrac{2(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})}{x^5}$,
所有臨界點為 ± 3, $\pm 3\sqrt{2}$.

(3) 劃分區間:

x	$(-\infty, -3\sqrt{2})$	$-3\sqrt{2}$	$(-3\sqrt{2}, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 3\sqrt{2})$	$3\sqrt{2}$	$(3\sqrt{2}, +\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	無定義	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	無定義	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	降凸	反曲 $-\frac{5\sqrt{2}}{36}$	降凹	極小 $-\frac{2}{9}$	升凹	無定義	升凸	極大 $\frac{2}{9}$	降凸	反曲 $\frac{5\sqrt{2}}{36}$	降凹

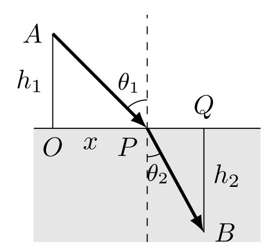
(4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \implies$ 水平漸近線 $y=0$;
$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \implies$ 鉛直漸近線 $x=0$.

(5) 圖像:



2.12 應用於物理學與幾何學中

導數在物理學中的應用



例 2.12.1 (斯乃耳定律) 如右圖, 一束光線由空氣中點 A 經過水面折射後到達水中點 B. 已知光在空氣中和水中傳播的速度分別是 v_1 和 v_2, 且依費馬原理, 光線在介質中總是沿著耗時最少的路徑傳播. 試確定光線傳播的路徑所需的條件.

解 點 A 到水面的垂直距離為 $|\overline{AO}| = h_1$, 點 B 到水面的垂直距離為 $|\overline{BQ}| = h_2$, 且 $|\overline{OQ}| = l$, $|\overline{OP}| = x$, 那麼光線又 A 到 B 的傳播路徑為折線 $\overline{APB}$, 其所需傳播時間為

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}{v_2}, \quad x \in [0,l].$$

欲求 $T(x)$ 在 $[0,l]$ 上的最小值,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{l-x}{v_2\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}},$$

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1(x^2+h_1^2)^{3/2}} + \frac{h_2^2}{v_2\left((l-x)^2+h_2^2\right)^{3/2}} > 0,$$

又 T' 在 $[0,l]$ 上連續, 故 T' 在 $(0,l)$ 內存在唯一零點 x_0, 且 x_0 是 T 在 $(0,l)$ 內的唯一極小值點, 從而也是 T 在 $[0,l]$ 上的最小值點, 因此 $T'(x_0) = 0$, 即

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{x_0^2+h_1^2}} = \frac{l-x_0}{v_2\sqrt{(l-x_0)^2+h_2^2}}.$$

記

$$\sin\theta_1 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h_1^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{l - x_0}{\sqrt{(l - x_0)^2 + h_2^2}},$$

就有

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

定理 2.12.2 在運動學中, 我們有以下結論:

$$x'(t) = v(t), \qquad x''(t) = v'(t) = a(t),$$

其中, x 為位置函數, v 為 (瞬時) 速度, a 為 (瞬時) 加速度, $|v|$ 為 (瞬時) 速率, 它們都是時間 t 的函數.

例 2.12.3 一質點沿著 x 軸移動, 其位置函數為

$$x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 27, \quad 0 \le t \le 9,$$

討論該質點在各個時段的運動方向及狀態.

解 速度函數為

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6),$$

加速度函數為

$$a(t) = 6t - 24 = 6(t-4).$$

該質點的運動方向及運動狀態如下:

t	$[0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,9]$
v 運動方向	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
a	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
狀態	減速		加速		減速		加速

註記 2.12.4 $v(t)\cdot a(t) < 0$ 表示質點減速, $v(t)\cdot a(t) > 0$ 表示質點加速, $v(t)\cdot a(t) = 0$ 表示物體保持運動狀態 (靜止或勻速).

例 2.12.5 (鉛直面直線運動) 選定鉛直拋出或自由釋放某質點之出發點在距離地面高 y_0 的地方, 其初速度為 v_0 ($v_0 > 0$ 表鉛直上拋, $v_0 = 0$ 表自由落體, $v_0 < 0$ 表鉛直下丟), 那麼高度函數為

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0,$$

其中 $g > 0$ 為常數. 質點掉落的速度函數為

$$y'(t) = v_0 - gt,$$

而加速度為 $y''(t) = -g$, 即不計空氣阻力的情況下, 鉛直面的直線運動是等加速直線運動, 其加速度方向永遠是向下的.

例 2.12.6 (簡諧運動) 一質點作簡諧運動, 其位置函數為

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

其中, A 是振幅, ω 是自然角頻率, ϕ 是相角, 它們都是常數. 該質點的速度函數為

$$v(t) = x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0),$$

加速度函數為

$$a(t) = v'(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0).$$

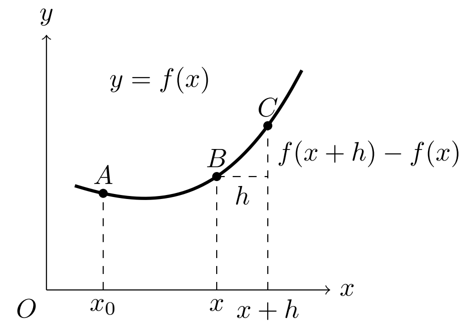
注意到

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \quad \text{即 } x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

此方程就是力學中著名的**振動方程式**.

導數在幾何學中的應用

設函數 f 在區間 I 內具有連續導數, 固定點 $A(x_0, f(x_0))$, 取曲線上任意一點 $B(x, f(x))$, 規定 x 增大的方向作為曲線的正向, 且規定有向弧段 $\widehat{AB}$ 的值 s (簡稱弧 s) 如下: $|s| = \left|\widehat{AB}\right|$, 當有向弧段 $\widehat{AB}$ 與曲線的正向一致時 $s > 0$, 相反時 $s < 0$, 此時弧 s 與 x 存在函數關係 $s = s(x)0$, 且 s 是增函數.



設有另一點 $C(x+h, f(x+h))$, 那麼弧 s 的增量為

$$s(x+h) - s(x) = \widehat{AC} - \widehat{AB} = \widehat{BC}.$$

於是,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{s(x+h)-s(x)}{h}\right)^2 &= \left(\frac{\widehat{BC}}{h}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}\right)^2 \cdot \frac{\left|\overline{BC}\right|^2}{h^2} = \left(\frac{\widehat{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}\right)^2 \cdot \frac{h^2 + (f(x+h)-f(x))^2}{h^2} \\
&= \left(\frac{\widehat{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^2\right) \\
\Longrightarrow \frac{s(x+h)-s(x)}{h} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\widehat{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}\right)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

令 $h \to 0$, 此時 $C \to B$, 且

$$\lim_{C \to B} \frac{\left|\widehat{BC}\right|}{\left|\overline{BC}\right|} = 1,$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

由於 $s = s(x)$ 單調遞增, 從而取算術平方根, 也就是

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

定義 2.12.7 $\mathrm{d}s$ 稱為**弧微分**.

註記 2.12.8 (1) 當平面曲線由參數式 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 給出時, 弧微分為

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

又如果寫成向量函數 $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ 的形式, 那麼弧微分可寫成

$$\mathrm{d}s = \|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t;$$

(2) 當平面曲線由極式 $r = r(\theta)$ 給出時, 弧微分為

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta;$$

(3) 對於空間中的參數曲線 $\mathbf{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$, 我們仍有

$$\mathrm{d}s=\|\mathbf{r}'(t)\|\mathrm{d}t=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

證明 (1)

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t;$$

(2) 由 (1), 取 $(x(\theta),y(\theta))=(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)$, 那麼

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\\&=\sqrt{(r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^2+(r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\&=\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\mathrm{d}\theta;\end{aligned}$$

(3) 推導方式與平面曲線雷同, 可將所有函數換成向量函數 $\mathbf{r}$ 來推導.

□

假設有一條光滑曲線 C, 觀察其切向量的變化, 發現當 C 很平緩或行為好似直線時, 切向量的方向變化不大, 但當 C 彎曲或扭轉得「急促」時, 切向量方向的變化會更明顯. 因此, 我們引入曲率的觀念:

定義 2.12.9 設光滑曲線 C 的單位切向量為 $\mathbf{T}$, 定義 C 的**曲率**為

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|.$$

註記 2.12.10 (1) 曲率的意義為單位切向量相對於弧長的變化率的大小;

(2) $\kappa(t)=\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathbf{T}'(t)}{\mathbf{r}'(t)}\right|.$

例 2.12.11 求半徑為 a 之圓的曲率.

解 設 $\mathbf{r}(t)=(a\cos t,a\sin t)$, 那麼

$$\mathbf{r}'(t)=(-a\sin t,a\cos t),\qquad\|\mathbf{r}'(t)\|=a,$$

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=(-\sin t,\cos t),$$

$$\mathbf{T}'(t)=(-\cos t,-\sin t),\qquad\|\mathbf{T}'(t)\|=1,$$

因此, 圓的曲率為常數

$$\kappa=\frac{1}{a},$$

即其半徑的倒數.

定理 2.12.12 平面上二階可導之函數的曲線 $y=f(x)$ 的曲率公式為

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

證明 略. □

例 2.12.13 求直線的曲率.

解 設直線方程式為 $y = mx + c$, 則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$, 代入公式, 得 $\kappa = 0$.

註記 2.12.14 我們可將直線視為半徑為無窮大的圓, 其圓心在無窮遠點.

定理 2.12.15 空間中的平滑曲線 $\mathbf{r}$ 的曲率公式為

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

證明 略. □

例 2.12.16 求螺旋線 $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a, b > 0)$ 的曲率.

解

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b),$$
$$\mathbf{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$
$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(t) = (-ab\sin t, -ab\cos t, a^2),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(t)\| = a\sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\kappa(t) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

定理 2.12.17 平面上的平滑曲線 $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ 的曲率公式為

$$\kappa = \frac{|\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''|}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

證明 略. □

註記 2.12.18 其他與曲率有關的結論:

(1) 對於平面上的平滑曲線 C, 選定一點作為度量弧 s 的基點 M_0, 設動點 M 對應於弧 s, 點 M 處的切線的傾斜角 (切向量與水平正向的夾角) 為 α, 顯然 α 是 s 的函數, 那麼我們有結論

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s};$$

(2) 在平面上的平滑曲線 C 可在凹側作切圓, 該圓稱為**曲率圓**, 且可以證明曲率圓的半徑 (稱為曲率半徑) 是曲線在該點處的曲率的倒數;

(3) 設有函數曲線 $C : y = f(x)$, 當點 $(x, f(x))$ 沿 C 移動時, 相應的曲率中心 (曲率圓的圓心) 的軌跡曲線 G 稱為 C 的**漸屈線**, 而曲線 C 稱為曲線 G 的**漸伸線**, 可以證明曲線 $y = f(x)$ 的漸屈線的參數方程為

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{f'(x) \cdot \left(1 + f'^2(x)\right)}{f''(x)}, \\ \beta = f(x) + \dfrac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}; \end{cases}$$

此處略去不談.

定理 2.12.19

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}$$

證明 依主法向量的定義,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \implies \mathbf{T}'(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|\mathbf{N}(s) = \kappa\mathbf{N}.$$

□

定理 2.12.20

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} \parallel \mathbf{N}$$

證明 以一撇表示對弧 s 求導.

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{T}\times\mathbf{N})' = \mathbf{T}'\times\mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{N}' = \kappa\mathbf{N}\times\mathbf{N} + \mathbf{T}\times\mathbf{N}' = \mathbf{T}\times\mathbf{N}'$$

因此 $\mathbf{B}' \perp \mathbf{T}$. 另一方面,

$$|\mathbf{B}|^2 = 1 \implies 2\mathbf{B}'\cdot\mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B}' \perp \mathbf{B}.$$

由於 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一組規範正交基, 故若以它們線性表示 $\mathbf{B}'$, 即

$$\mathbf{B}' = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{N} + \gamma\mathbf{B},$$

則對等式兩邊分別與 $\mathbf{T}$ 及 $\mathbf{B}$ 作內積, 得 $\alpha = \gamma = 0$, 就有 $\mathbf{B}' = \beta\mathbf{N}$, 即 $\mathbf{B}'$ 平行於 $\mathbf{N}$. □

定義 2.12.21 定義滿足

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N}$$

之係數 τ 為曲線上的點的**撓率**, 或

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N}.$$

註記 2.12.22 公式

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{N}$$

以弧長參數 s 為變數表示, 以參數 t 表示則為

$$\tau(t) = -\frac{\mathbf{B}'(t)\cdot\mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

注意 2.12.23 顯然, 平面曲線的撓率恆為 0. 可以證明, 撓率恆為 0 之曲線必落在一個平面內.

例 2.12.24 求螺旋線 $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a, b > 0)$ 的撓率.

解

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\mathbf{N}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a),$$

$$\mathbf{B}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\cos t, b\sin t, 0)$$

因此,

$$\tau(t) = -\frac{\mathbf{B}'(t)\cdot\mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

定理 2.12.25

$$\tau(t)=\frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^2}$$

定理 2.12.26 (Frenet-Serret 公式)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}= & \kappa\mathbf{N},\\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=-\kappa\mathbf{T} & +\tau\mathbf{B},\\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}= & -\tau\mathbf{N},\end{cases}$$

或寫成矩陣式:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} & \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}.$$

證明 只需證明

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}.$$

我們有

$$\begin{cases}\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}=0,\\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{B}=0\end{cases}\implies\begin{cases}\mathbf{N}'\cdot\mathbf{T}=-\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}'=-\kappa(s)\|\mathbf{N}\|^2=-\kappa(s),\\ \mathbf{N}'\cdot\mathbf{B}=-\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}'=\tau(s)\|\mathbf{N}\|^2=\tau(s).\end{cases}$$

因 $\{\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一組規範正交基, 所以如果令

$$\mathbf{N}'=\alpha\mathbf{T}+\beta\mathbf{N}+\gamma\mathbf{B},$$

等式兩邊與 $\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}$ 作內積, 就得到

$$\alpha=-\kappa,\beta=0,\gamma=\tau.$$

□

2.13 方程的近似解

二分法

設函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, $f(a)\cdot f(b)<0$, 且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 內僅有一個實根 ξ, 於是區間 $[a,b]$ 為所求實根的一個**隔離區間**.

取 $[a,b]$ 的中點 $\xi_1=\frac{1}{2}(a+b)$, 計算 $f(\xi_1)$.

若 $f(\xi_1)=0$, 則 $\xi=\xi_1$; 若 $f(\xi_1)$ 與 $f(a)$ 同號, 則取 $a_1=\xi_1$, $b_1=b$, 由 $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, 知 $a_1<\xi<b_1$, 且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$; 若 $f(\xi_1)$ 與 $f(b)$ 同號, 則取 $a_1=a$, $b_1=\xi_1$, 也有 $a_1<\xi<b_1$ 及 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$; 也就是說, 當 $\xi\neq\xi_1$ 時, 可求得 $a_1<\xi_1<b_1$, 且 $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$.

以 $[a_1,b_1]$ 作為新的隔離區間, 重複上述做法, 當 $\xi\neq\xi_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 時, 可求得 $a_2<\xi<b_2$, 且 $b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$.

重複以上操作, 可求得 $a_n<\xi<b_n$, 且 $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$, 由此可知, 若以 a_n 或 b_n 作為 ξ 的近似值, 則其誤差小於 $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

例 2.13.1 用二分法求方程 $x^3+1,1x^2+0.9x-1.4=0$ 的實根的近似值, 使誤差不超過 10^{-2}.

解 設 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$, $f\in C^0((-\infty,+\infty))$. $f'(x)=3x^2+2.2x+0.9$ 的判別式 $2^2-4\cdot3\cdot0.9=-5.96<0$ 告訴我們 $f'(x)>0$, 因此 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 單調遞增, $f(x)=0$ 至多有一個實根.

由 $f(0)\cdot f(1)=-1.4\cdot1.6<0$ 可知 f 在 $[0,1]$ 內有唯一實根. 取 $a=0$, $b=1$.

$\xi_1=0.5, f(\xi_1)=-0.55<0$, 故取 $a_1=0.5, b_1=1$;

$\xi_2=0.75, f(\xi_2)=0.32>0$, 故取 $a_2=0.5, b_2=0.75$;

$\xi_3=0.625, f(\xi_3)=-0.16<0$, 故取 $a_3=0.625, b_3=0.75$;

$\xi_4=0.687, f(\xi_4)=0.062>0$, 故取 $a_4=0.625, b_4=0.687$.

$\xi_5=0.656, f(\xi_5)=-0.054<0$, 故取 $a_6=0.656, b_6=0.672$;

$\xi_6=0.672, f(\xi_6)=0.005>0$, 故取 $a_7=0.664, b_7=0.672$;

$\xi_7=0.664, f(\xi_7)=-0.025<0$, 故取 $a_7=0.664, b_7=0.672$.

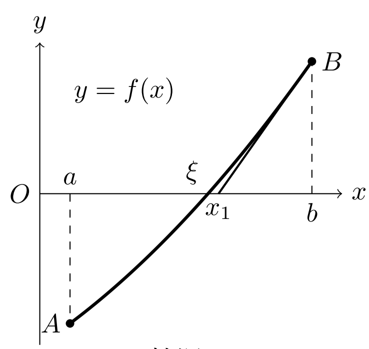
於是

$$0.664<\xi<0.672 \quad \text{且} \quad 0.672-0.664=0.006<0.01,$$

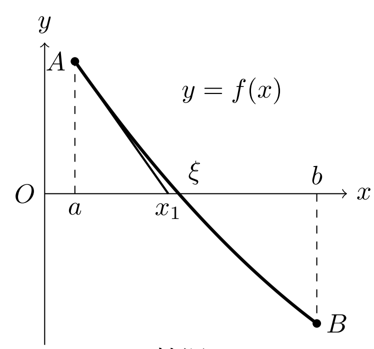
即 0.664 作為根的不足近似值, 0.672 作為根的過剩近似值, 其誤差均小於 10^{-2}.

切線法 (牛頓法)

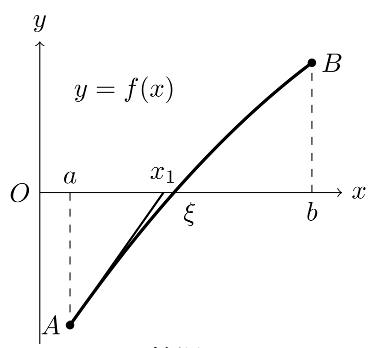
設函數 f 在區間 $[a,b]$ 的附近 (即在某個包含 $[a,b]$ 的開區間內) 具有二階導數, $f(a)\cdot f(b)<0$, 且 f' 及 f'' 在 $[a,b]$ 上保持定號, 在此條件下, 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 內有唯一的實根 ξ, $[a,b]$ 為根的一個隔離區間, 此時曲線 f 在 $[a,b]$ 上的圖形 $\widehat{AB}$ 僅有如下所示的四種不同情形:



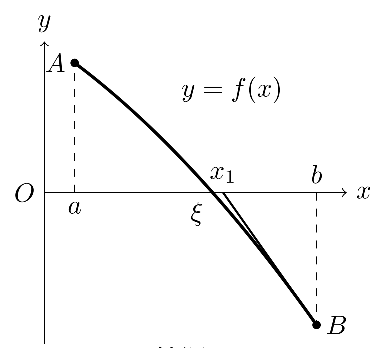
情況 1:
$f(a)<0, f(b)>0$,
$f'(x)>0, f''(x)>0$



情況 2:
$f(a)<0, f(b)<0$,
$f'(x)<0, f''(x)>0$



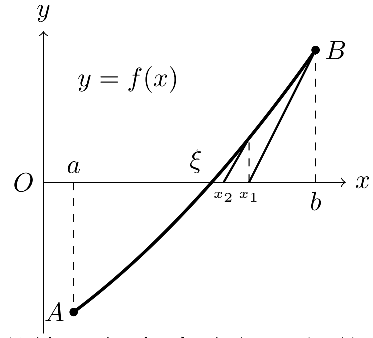
情況 3:
$f(a)<0, f(b)>0$,
$f'(x)>0, f''(x)<0$



情況 4:
$f(a)>0, f(b)<0$,
$f'(x)<0, f''(x)<0$

考慮用曲線弧 $\widehat{AB}$ 的一端的切線來取代曲線弧, 從而求出方程實根的近似值, 此方法稱為**切線法**或**牛頓法**. 由上圖中可看出, 若在縱座標與 f'' 同號的那個端點 (記作 $(x_0, f(x_0))$, 稱為**初始點**) 處作切線, 這切線與

x 軸的交點的橫座標 x_1 就比 x_0 更接近方程的根 ξ (即初始點應選擇 $x_0 = a$ 還是 b 取決於 $f(a)$ 還是 $f(b)$ 與 $f''(x)$ $(x \in (a,b))$ 同號).



以情形 1 為例, 因 $f(b)$ 與 $f''(x)$ 同號, 所以取初始點 $x_0 = b$, 在點 $(x_0, f(x_0))$ 作切線, 此切線方程為

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

令 $y = 0$, 解出 x, 得

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

它比 x_0 更靠近 ξ. 再在點 $(x_1, f(x_1))$ 處作切線, 可得根的近似值 x_2. 如此繼續, 一般地, 在點 $(x_n, f(x_n))$ 處作切線, 得根的近似值

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.13}$$

若 $f(a)$ 與 $f''(x)$ 同號, 那麼切線作在端點 $(a, f(a))$ 處 (如情形 2 及 3), 記 $x_0 = a$ 並同樣地按 (2.13) 式計算切線與 x 軸交點的橫座標.

例 2.13.2 用二分法求方程 $x^3 + 1,1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的實根的近似值, 使誤差不超過 10^{-2}.

解 設 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$, 已知 $[0,1]$ 是根的一個隔離區間, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. 在 $[0,1]$ 上,

$$f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9 > 0, \quad f''(x) = 6x + 2.2 > 0,$$

$f''(x)$ 在區間 $[0,1]$ 上與 $f(1)$ 同號, 故取 $x_0 = 1$.

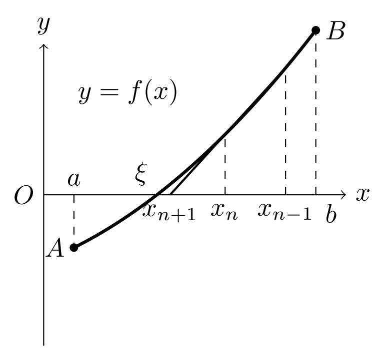
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0.738, \\ x_2 &= 0.738 - \frac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674, \\ x_3 &= 0.674 - \frac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671. \end{aligned}$$

注意到 $f(x_i)$ $(i = 0,1,2,3)$ 與 $f''(x)$ 同號, 可知 $f(0.671) > 0$. 經過計算可知 $f(0.670) < 0$, 於是有

$$0.670 < \xi < 0.671,$$

以 0.670 或 0.671 作為根的近似值, 誤差均小於 10^{-2}.

割線法 (截弦法)



考慮用

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

來近似替代 (2.13) 式中的 $f'(x_n)$, 此時的迭代公式變成

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \tag{2.14}$$

其中, x_0, x_1 為初始值. 此方法稱為**割線法**或**截弦法**.

例 2.13.3 用二分法求方程 $x^3+1,1x^2+0.9x-1.4=0$ 的實根的近似值, 使誤差不超過 10^{-2}.

解 取 $x_0=1, x_1=0.8$, 用連續迭代公式 (2.14) 得

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}\cdot f(x_1)\approx 0.699,\\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2)\approx 0.672,\\
x_4 &= x_3 - \frac{x_3-x_2}{f(x_3)-f(x_2)}\cdot f(x_3)\approx 0.671.
\end{aligned}$$

由於 $x_4-x_3\approx 0.001<10^{-2}$, 故以 0.67 作為根的近似值, 其誤差小於 10^{-2}.

單元 3

單變數函數的積分 (未完成)

3.1 積分的定義與基本性質

定義 3.1.1 稱閉區間 $[a,b]$ 的有限子集 $\{a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b\}$ 為區間 $[a,b]$ 的一個**劃分**, 記作

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_b\},$$

定義劃分 P 的**模**為

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

例 3.1.2 集合

$$P_1 = \{0, 1\}, \quad P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad P_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

都是區間 $[0,1]$ 的劃分, 且

$$\|P_1\| = 1, \quad \|P_2\| = \max\left\{\frac{1}{2} - 0, 1 - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \|P_3\| = \max\left\{\frac{1}{4} - 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

註記 3.1.3 $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ 將區間 $[a,b]$ 分成 n 個子區間

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

各區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的長度為 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

定義 3.1.4 設 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為一函數, 且 $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_b\}$ 為 $[a,b]$ 的一個劃分, 在各子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 中各取一點 ξ_i (稱為**樣本點**), 記樣本點集為 $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, 定義函數 f 在 $[a,b]$ 上關於 P 和 Ξ 的**黎曼和**為

$$S_f(P, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

如果極限

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_f(P, \Xi) = I \in \mathbb{R}$$

存在, 即對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對 $[a,b]$ 的任何劃分 P 以及在 P 上任選的點集 Ξ, 只要 $\|P\| < \delta$, 便有 $|S_f(P, \Xi) - I| < \varepsilon$, 那麼稱函數 f 在 $[a,b]$ 上**可積**或**黎曼可積**, 數 I 稱為 f 在 $[a,b]$ 上的**定積分**或**黎曼積分**, 記作

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中, $[a,b]$ 稱為積分區間, a, b 分別稱為這個積分的**下限**和**上限**, f 稱為**被積函數**, x 稱為**積分變數**.

註記 3.1.5 (1) 若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可積, 則定積分不依賴積分區間的劃分的樣本點之選取, 僅與被積函數及積分區間有關;

(2) 定積分

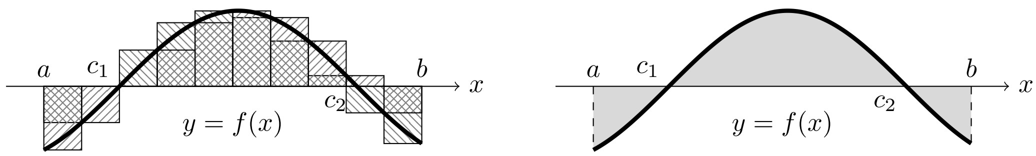
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

是與 x 無關的常數, 因此 x 替換成其他字母都不影響結果, 如

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{r=a}^{r=b} f(r)\,\mathrm{d}r = \int_{\natural=a}^{\natural=b} f(\natural)\,\mathrm{d}\natural = \int_{x^3=a}^{x^3=b} f(x^3)\,\mathrm{d}x^3 = \cdots,$$

只要 $f(\cdot)$ 中的變數與 $\mathrm{d}(\cdot)$ 的 d 後的變數一致即可, 故稱積分變數 x、r、$\natural$ 等為**啞變數**;

(3) 定積分的幾何意義為曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸所夾區域之淨有號面積, x 軸上方面積為正, x 軸下方面積為負, 定積分即為相應區間上所有有號面積之總和.



命題 3.1.6 以下為函數可積的一些充分條件及必要條件, 此處略去不證:

(1) 設 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, 那麼 f 在 $[a,b]$ 上可積;

(2) 設 f 在區間 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限個第一類間斷點, 無第二類間斷點, 那麼 f 在 $[a,b]$ 上可積;

(3) 設 f 在區間 $[a,b]$ 上單調, 那麼 f 在 $[a,b]$ 上可積;

(4) 若 f 在區間 $[a,b]$ 上可積, 則 f 在 $[a,b]$ 有界.

注意 3.1.7 關於閉區間 $[a,b]$ 的劃分 $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n<b\}$ 及樣本點集 $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, 常有以下幾種取法:

(1) 均勻劃分區間成

$$P=\left\{a<a+\frac{b-a}{n}<a+\frac{2(b-a)}{n}<\cdots<a+\frac{i(b-a)}{n}<\cdots<b\right\},$$

且取各子區間的右端點為樣本點

$$\xi_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i,$$

即 $\Delta x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n}$, 此時, 定積分的定義化為

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

此取法常用來將極限問題轉化為定積分的問題;

(2) 均勻劃分區間並取各子區間的中點;

(3) 任意劃分區間且取各子閉區間中的最大值點, 此取法的黎曼和稱為**上和**;

(4) 任意劃分區間且取各子閉區間中的最小值點, 此取法的黎曼和稱為**下和**.

例 3.1.8 求

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x.$$

解 依命題 3.1.6 可知, 因為 $f(x) = x^2$ 在積分區間 $[0,1]$ 是連續函數, 所以在 $[0,1]$ 上是可積的, 故與區間 $[0,1]$ 的劃分及樣本點的選取無關, 所以為了方便計算, 將區間 $[0,1]$ 劃分成 n 等份, 各區間長度為 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, 樣本點都取各子區間的右端點 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \ldots n-1$, 於是得黎曼和

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

當劃分的模趨近於 0 時, $n \to \infty$, 因此

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to 0} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

定義 3.1.9 設 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 黎曼可積, 為了計算及應用方便期間, 補充規定:

(1) 對於 $c \in [a,b]$,

$$\int_c^c f(x) \, \mathrm{d}x = 0;$$

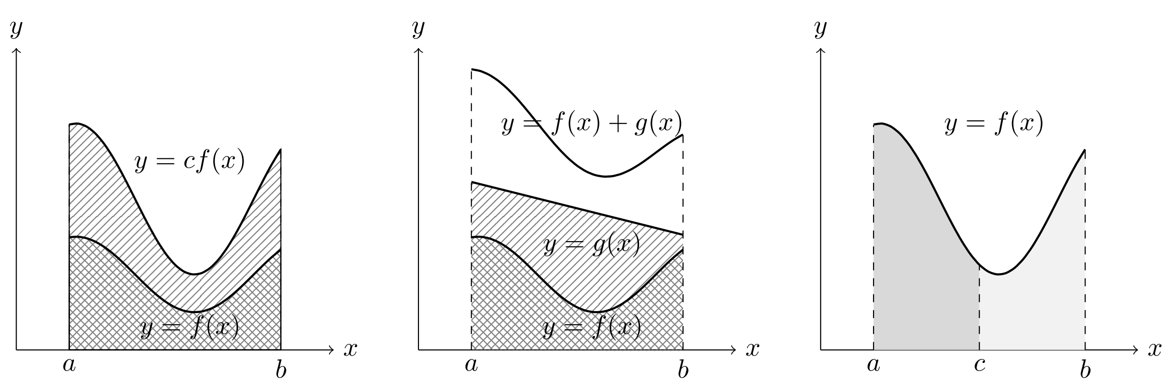
(2)

$$\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

定理 3.1.10 (定積分的運算性質) 設 α, β 為常數, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 為可積函數, $a < c < b$, 那麼

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$ (線性);

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$ (區間可加性).



定積分的係數積　定積分的加性　定積分的區間可加性

註記 3.1.11 性質 (1) 對於任意有限多個可積函數的線性組合仍成立, 性質 (2) 也可以推廣至有限多個積分區間上的定積分的和.

證明 (1) 考慮 $[a,b]$ 的劃分 $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 及樣本點集 $\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, 因為 f,g 在 $[a,b]$ 上可積, 所以

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{及} \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 因此

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x&=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i))\,\Delta x_i\\&=\alpha\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 因為 f 在 $[a,b]$ 上可積, 所以不論如何劃分 $[a,b]$, 黎曼和的極限總保持不變, 故劃分區間時, 可永遠選取 c 為分點, 那麼 $[a,b]$ 上的黎曼和等於 $[a,c]$ 上的黎曼和加上 $[c,b]$ 上的黎曼和, 令 $\|P\|\to 0$, 即得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

注意 3.1.12 根據補充規定 (定義 3.1.9), 我們有: 不論 a,b,c 的大小關係如何, 總有等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

成立. 比如說, 當 $a<b<c$ 時,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

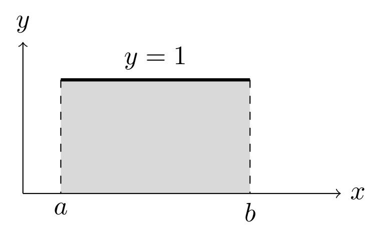
命題 3.1.13 如果在區間 $[a,b]$ 上, $f(x)\equiv 1$, 那麼

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.$$

證明 根據定積分的幾何意義,

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$$

就是長為 $b-a$, 高為 1 的長方形面積. □



命題 3.1.14 (定積分的不等性質) 設 $a<b$, 且 f 在 $[a,b]$ 上可積,

(1) 如果在區間 $[a,b]$ 上, $f(x)\geq 0$, 那麼

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0;$$

(2) 設 g 在 $[a,b]$ 上可積, 如果在區間 $[a,b]$ 上, $f(x)\leq g(x)$, 那麼

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(積分的保序性);

(3) $|f|$ 在 $[a,b]$ 上可積, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

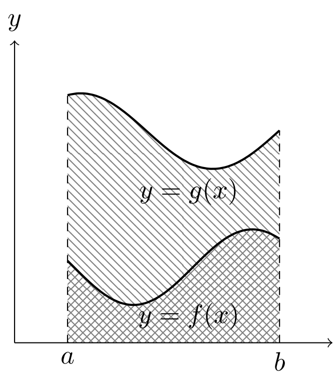
(積分的三角不等式)

(4) 如果

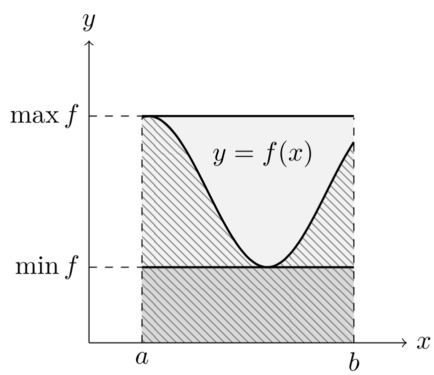
$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x),$$

那麼

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$



(2) 定積分的保序性



(4) 定積分的上、下界

證明 (1) 考慮劃分 $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 及樣本點 $\xi_1, \ldots, \xi_n$, 因為 $f(x) \ge 0$, 所以 $f(\xi_i) \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. 又由於 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, 因此

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0,$$

令 $\|P\| \to 0$, 即得結論;

(2) 因為 $g(x) - f(x) \ge 0$, 由 (1) 得

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

再由積分的線性性質, 即得結論;

(3) 因為

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

所以由 (2), 得

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)\,\mathrm{d}x,$$

也就是

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x;$$

(4) 因為 $m \le f(x) \le M$, 所以由 (2), 得

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x,$$

再由積分的線性性質及命題 3.1.13, 即得結論.

□

定理 3.1.15 (定積分 (第一) 均值定理) 如果函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, 那麼在 $[a,b]$ 上至少存在一點 ξ 滿足

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

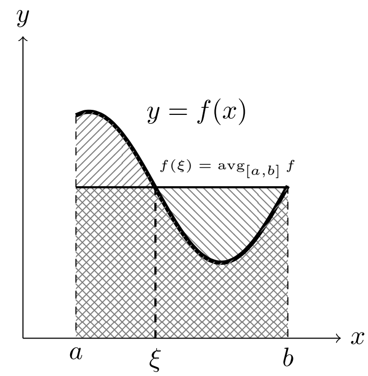
證明 由命題 3.1.14(4), 不等式各邊同除以 $b-a$, 得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M,$$

依中間值定理 (定理 1.7.33), 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

兩邊同乘以 $b-a$ 即得結論. □



定義 3.1.16 稱積分均值定理所得的數值

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

為函數 f 在區間 $[a,b]$ 上的**平均值**.

3.2 導數的反運算——微積分基本定理與不定積分

微積分基本定理

定義 3.2.1 設函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, $x \in [a,b]$, 那麼 f 在區間 $[a,x]$ 上仍連續, 因此定積分

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

存在, 且是 x 的函數, 即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b),$$

稱為**變限積分**或**積分上限函數**. 同樣地, 也可以定義**積分下限函數**

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b).$$

註記 3.2.2 依定義 3.1.9, 可以將積分下限函數寫成積分上限函數

$$\Psi(x) = \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad (a \le x \le b),$$

因此, 我們將著重在討論積分上限函數, 其結果一般上都可推廣到積分下限函數.

注意 3.2.3 當積分界限含 x 時, 積分變數宜改用其他啞變數來表示, 以免造成混淆.

定理 3.2.4 (微積分基本定理 I) 如果函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, 那麼積分上限函數

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上可導, 且其導數為

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\quad (a\le x\le b). \tag{3.1}$$

證明 考慮 $\Phi(x+h)$, 其中 $h\neq 0$ (可能為正或負),

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

依積分均值定理 3.1.15, 在 x 與 $x+h$ 之間存在 $\xi=\xi(h)$ 使得

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)h,$$

兩邊同除以 h, 得

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(\xi), \tag{3.2}$$

因為 f 在 $[a,b]$ 上連續, 而當 $h\to 0$ 時, $\xi\to x$, 所以

$$\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x),$$

於是, 令 $h\to 0$ 對 (3.2) 式兩端取極限, 即得

$$\Phi'(x)=f(x)\quad (a<x<b).$$

若 $x=a$, 則考慮 $h>0$, 依同樣的方法可得 $\Phi'_+(a)=f(a)$; 同理可證, 若 $x=b$, 則考慮 $h<0$, 將會得到 $\Phi'_-(b)=f(b)$. 顯然 $x=a,b$ 仍滿足 (3.1) 式. □

系理 3.2.5 設函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續, 函數 g,h 在區間 I 上可導, 且 $g(I),h(I)\subseteq[a,b]$, 那麼

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=-f(x)\quad (a\le x\le b)$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=(f\circ h)(x)\cdot h'(x)\quad (x\in I)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{g(x)}^b f(t)\,\mathrm{d}t=-(f\circ g)(x)\cdot g'(x)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t=(f\circ h)(x)\cdot h'(x)-(f\circ g)(x)\cdot g'(x)$.

證明 依定義 3.1.9 以及連鎖律, 即得結論. □

例 3.2.6 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=x^2$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t=-e^{x^2}$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_1^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t = 2x\cos x^2$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{e^x}^{100}\sin t\,\mathrm{d}t = -e^x\sin e^x$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sin x}^{\sinh x}1\,\mathrm{d}t = \cosh x - \cos x$.

定義 3.2.7 設 f, F 為定義在區間 I 上的函數, 且 f 可導, 若 $f' = F$, 或 $\mathrm{d}F = f(x)\mathrm{d}x$, 即 F 是 f 的導函數, 則稱 f 是 F 的一個**原函數**或**反導函數**.

系理 3.2.8 (原函數存在定理) 如果函數 f 在區間 I 上連續, 那麼在區間 I 上存在可導函數 F, 使對任一 $x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$, 即連續函數一定有原函數.

證明 這是定理 3.2.4 的直接推論. □

註記 3.2.9 (1) 若函數 F 有原函數 f, 則對於任意常數 C, 函數 $f + C$ 均為 F 的原函數, 也就是說, 原函數如果存在, 必有無窮多個;

(2) 依系理 2.8.14, 可知 F 的所有原函數只相差一個常數, 也就是說, 如果 Φ, F 均為 f 的原函數, 那麼

$$[\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0 \implies \Phi(x) - F(x) = C \implies \Phi(x) = F(x) + C;$$

(3) 定理 3.2.4 告訴我們: 連續函數 f 先取變上限 x 的定積分後求導的結果還原為 f 本身, 也就是說 Φ 是連續函數 f 的一個原函數.

定理 3.2.10 (微積分基本定理 II; 牛頓-萊布尼茲公式) 如果函數 F 是連續函數 f 在區間 $[a, b]$ 上的一個原函數, 那麼

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

即

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

證明 依微積分基本定理 I (定理 3.2.4), 可知積分上限函數

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

也是 f 的一個原函數, 於是依註記 3.2.9(2) 可知, $F - \Phi$ 在 $[a, b]$ 上為常數, 記

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \le x \le b). \tag{3.3}$$

令 $x = a$, 得 $F(a) - \Phi(a) = C$, 即 $F(a) = C + \Phi(a) = C + 0 = C$, 代入 (3.3) 中, 得

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a),$$

於上式中令 $x = b$, 即得結論. □

註記 3.2.11 (1) 依定義 3.1.9, 牛頓-萊布尼茲公式對於 $a > b$ 的情形仍成立;

(2) 為了方便起見, 引入記號

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(x)|_{x=a}^{x=b},$$

於是有

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b.$$

例 3.2.12 (1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$;

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$.

例 3.2.13 計算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

解 此為 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 可使用羅比達法則:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}e^{-\cos^2 x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{2e}.$$

例 3.2.14 求極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right).$$

解 令 $a=0$, $b=1$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n}$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\Delta x = \int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

不定積分

定義 3.2.15 在區間 I 上, 函數 f 的帶有任意常數的原函數稱為 f 在區間 I 上的**不定積分**, 記作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中記號 $\int$ 稱為積分號, $f(x)$ 稱為被積函數, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 稱為**被積表達式**, x 稱為**積分變數**.

註記 3.2.16 由註記 3.2.9 可知, 如果 F 是 f 在區間 I 上的一個原函數, 那麼 $F+C$ 就是 f 的不定積分, 即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

因而不定積分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 可以表示 f 的任意一個原函數.

例 3.2.17 (1) 因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x^4}{4}\right) = x^3$, 所以 $x^4/4$ 是 x^3 的一個原函數, 因此

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C;$$

(2) 當 $x>0$ 時, 因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \dfrac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $1/x$ 在 $(0,+\infty)$ 內的一個原函數, 因此, 在 $(0,+\infty)$ 內,

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

當 $x<0$ 時, 因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = \dfrac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $1/x$ 在 $(-\infty,0)$ 內的一個原函數, 因此, 在 $(-\infty,0)$ 內,

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C.$$

把在 $(0,+\infty)$ 及 $(-\infty,0)$ 內的結果合併起來, 可以寫作

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

命題 3.2.18 (1) 由於 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函數, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)\quad \text{或}\quad \mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) 由於 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函數, 所以

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C\quad \text{或記作}\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

註記 3.2.19 依定理 2.2.25, 可得一些不定積分的基本公式, 此處暫時略去, 將來會一一羅列出來.

命題 3.2.20 (不定積分的線性性質) 設函數 f 及 g 的原函數存在, k 為非零常數, 則

$$\int (f(x)+kg(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+k\int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

證明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x+k\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x+k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int g(x)\,\mathrm{d}x\\&=f(x)+kg(x),\end{aligned}$$

即 (3.4) 式右端是 $f+kg$ 的原函數, 又 (3.4) 式右端有兩個積分記號, 形式上含兩個任意常數, 又任意常數之和還是任意常數, 所以實際上含一個任意常數, 因此 (3.4) 式右端是 $f+kg$ 的不定積分. □

例 3.2.21 (1) $\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x=\int \left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^{7/2}}{7/2}-5\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x^2\sqrt{x}+C;$

(2) $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C;$

(3) $\int 3^x e^x\,\mathrm{d}x=\int (3e)^x\mathrm{d}x=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C=\frac{3^x e^x}{\ln 3}+C;$

(4) $\int \cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\left(\csc^2\theta-1\right)\mathrm{d}\theta=-\cot\theta-\theta+C;$

(5) $\int \cos^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+\cos t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(1+\cos t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t+C;$

(6) $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-x+4\tan^{-1}x+C.$

註記 3.2.22 根據微積分基本定理 II (定理 3.2.10), 定積分的計算相當於求出不定積分後, 固定一個積分常數, 並將積分上、下限代入相減.

3.3 變數變換與分部積分法 (未完成)

變數變換

分部積分法

三角函數高次冪的積分技巧

3.4 有理函數的積分法 (未完成)

有理式的積分法

三角函數有理式的積分法

無理式的積分法

3.5 反常積分 (未完成)

3.6 向量函數的積分 (未完成)

3.7 定積分的應用 (未完成)

面積計算

體積計算

曲線的弧長

旋轉體的表面積

應用於物理學中

3.8 數值積分 (未完成)

參考資料

[1] George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir, and Joel Hass. *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*. 13th ed. Pearson, 2014.

[2] Saturnino L. Salas, Einar Hille, and Garret J. Etgen. *Calculus: One and Several Variables*. 10th ed. John Wiley & Sons, 2006.

[3] James Stewart, Daniel K. Clegg, and Saleem Watson. *Calculus: Early Transcendentals, Metric Edition*. 9th ed. Cengage Learning, 2021.

[4] William R. Wade. *An Introduction to Analysis*. 4th ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

[5] Tom M. Apostol. *数学分析*. 中文. 邢富冲, 邢辰, 李松洁, 贾婉丽 譯. 原標題: Mathematical Analysis, Second Edition. 机械工业出版社, 2006.

[6] Walter Rudin. *数学分析原理*. 中文. 赵慈庚, 蒋铎 譯. 原標題: Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed. 机械工业出版社, 2019.

[7] Vladimir A. Zorich. *数学分析 (第一卷)*. 中文. 李植 譯. 原標題: Mathematical Analysis by V. A. Zorich (Part I, 7th expanded edition). 高等教育出版社, 2019.

[8] 同济大学数学系 編, *高等数学上册*. 第七版. 高等教育出版社, 2014.

[9] 同济大学数学系 編, *高等数学上册*. 人民邮电出版社, 2016.

[10] 同济大学数学系 編, *高等数学下册*. 人民邮电出版社, 2017.

[11] 李逸. *基本分析讲义*. 第 2.10 版. 东南大学数学学院, 2021.