黎曼 ζ 函數的黎曼函數方程

Timo Chang
timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 12 月 25 日

先回顧黎曼 ζ 函數

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s},\quad \Re(s)>1. \tag{1}$$

本文將證明 $\zeta(s)$ 可延拓爲複平面上的亞純函數, 以及推導其函數方程.

定理 1 (黎曼) 令

$$\xi(s):=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),\quad \Re(s)>1,$$

其中 $\Gamma(s)$ 是歐拉 Γ 函數, 則 $\xi(s)$ 可延拓爲整個複平面上的亞純函數, 其在 $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 上全純, 在 $s=0,1$ 處分別有留數爲 $-1,1$ 的單極點, 而且滿足函數方程

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

證明 由 Γ 函數的定義,

$$\Gamma(s):=\int_0^{+\infty}t^se^{-t}\frac{dt}{t},\quad \Re(s)>0,$$

作代換 $s\mapsto s/2$, 在等式兩邊乘以 $\pi^{-s/2}n^{-s}$, 且作變數變換, 得

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)&=\int_0^{\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}t^{\frac{s}{2}}e^{-t}\frac{dt}{t}\\&=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{\pi n^2}\right)^{\frac{s}{2}}e^{-t}\frac{dt}{t}\\&=\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}}e^{-\pi n^2t}\frac{dt}{t}\qquad\qquad\left(\frac{t}{\pi n^2}\mapsto t\right).\end{aligned}$$

將上式對 n 求從 1 至 $+\infty$ 的和, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}}e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}}e^{-\pi n^2 t}\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\theta(it)-1}{2}\right)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t},\end{aligned} \tag{2}$$

此處,

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$$

稱爲雅可比 θ 級數, 其在上半平面 (不含實軸) 上絕對收斂. 根據 $\xi(s)$ 的定義, 不難注意到 (2) 式的左邊爲

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \xi(s),$$

故得

$$\xi(s) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\theta(it)-1}{2}\right)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

爲了計算 (3) 式的右邊, 需要下述 θ 級數的函數方程.

引理 2 θ 級數 $\theta(z)$ 滿足函數方程

$$\theta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\theta(z), \quad \Im(z) > 0.$$

特別地,

$$\theta\left(\frac{i}{t}\right) = t^{\frac{1}{2}}\theta(it), \quad t > 0.$$

證明 依解析函數的唯一性定理, 只需證明第二條等式. 考慮

$$f_t(x) := e^{-\pi t x^2},$$

其傅立葉轉換爲

$$\hat{f}_t(y) = t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

故依**卜松求和公式**, 有

$$\theta(it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_t(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_t(n) = t^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{i}{t}\right).$$

□

回到 (3) 式的右邊, 可見

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left(\frac{\theta(it)-1}{2}\right)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t} \\
&=\frac{1}{2}\int_0^{1}(\theta(it)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}+\boxed{\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(it)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}} \\
&=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\theta\left(\frac{i}{t}\right)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}+\boxed{} && \left(t\mapsto\frac{1}{t}\right) \\
&=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(t^{\frac{1}{2}}\theta(it)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}+\boxed{} && (\text{引理 } 2) \\
&=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left((\theta(it)-1)t^{\frac{1}{2}(1-s)}+t^{\frac{1}{2}(1-s)}-t^{-\frac{s}{2}}\right)\frac{dt}{t}+\boxed{} \\
&=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(it)-1)t^{\frac{1}{2}(1-s)}\frac{dt}{t}-\frac{1}{1-s}-\frac{1}{s}+\boxed{\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(it)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}}.
\end{aligned}
$$

故得

$$
\xi(s)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\theta(it)-1)t^{\frac{1}{2}(1-s)}\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\theta(it)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}-\frac{1}{1-s}-\frac{1}{s}. \tag{4}
$$

不難看出, 上式右邊在代換 $s\mapsto 1-s$ 之下保持不變, 因此對於左側來說應亦是如此, 換言之, 我們有

$$
\xi(s)=\xi(1-s).
$$

而且, (4) 式中的各積分在整個複平面上均為 s 的全純函數, 因此 $\xi(s)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 上是全純函數, 且在 $s=0,1$ 處分別有留數為 $-1,1$ 的單極點, 證畢. □

系理 3 $\zeta(s)$ 可延拓為 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上的亞純函數, 使其在 $s=1$ 處有留數為 1 的單極點, 並且滿足函數方程

$$
\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).
$$

證明 依定理 1, 在等式兩側乘上 $\Gamma(1-s/2)$, 得

$$
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{5}
$$

依 Γ 函數的歐拉反射公式 (又稱餘元公式),

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad z\notin\mathbb{Z},
$$

(5) 式左邊可化為

$$
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\zeta(s). \tag{6}
$$

另一方面, 依 Γ 函數的雷建德倍元公式,

$$
\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z),
$$

(5) 式右邊可寫成

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}2^{1-2\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{7}$$

綜合 (6) 及 (7), 得

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}2^{1-2\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

化簡上式即爲所證. □

設 s 爲負偶數, 此時系理 3 中的正弦因子爲 0, 餘者則非零, 故對於每個 $s\in\{-2n\mid n\in\mathbb{N}\}$, 均有 $\zeta(s)=0$, 這些 s 稱爲 $\zeta(s)$ 的**平凡零點**. 著名的黎曼猜想即關於 $\zeta(s)$ 之非平凡零點分佈的猜想.

猜想 4 (黎曼猜想) $\zeta(s)$ 的所有非平凡零點均落在直線 $\Re(s)=1/2$ 上.

接下來, 我們將以白努利數表示黎曼 ζ 函數在負整數點處的值. 先回顧歐拉在正偶數點處對於黎曼 ζ 函數的計算.

定理 5 (歐拉) 對一切正偶數 $n\in\mathbb{N}$, 均有

$$\zeta(n)=-\frac{B_n}{2\cdot n!}(2\pi i)^n,$$

其中白努利數 B_k 由 $t/(e^t-1)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k t^k/k!$ 所定義.

證明 參見 [Cha, Theorem 1.1]. □

系理 6 對於 $k\in\mathbb{N}$, $k>1$, 有

$$\zeta(1-k)=-\frac{B_k}{k},$$

其中 B_k 是第 k 個白努利數.

證明 依系理 3 及定理 5, 當 $k>1$ 爲偶數時, 有

$$\begin{aligned}\zeta(1-k)&=2^{1-k}\pi^{-k}\sin\left(\frac{\pi(1-k)}{2}\right)\Gamma(k)\zeta(k)\\&=2^{1-k}\pi^{-k}(-1)^{\frac{k}{2}}(k-1)!\left(-\frac{B_k}{2\cdot k!}(2\pi i)^k\right)\\&=-\frac{B_k}{k}.\end{aligned}$$

當 $k>1$ 爲奇數時, 由於 $1-k$ 是平凡零點, 故有 $\zeta(1-k)=0$. 另外, 我們也注意到, 對所有大於 1 的奇數 k, 均有 $B_k=0$ (參見 [Cha, Corollary 1.3]), 證畢. □

注意 7 由系理 6, 取 $k=2$, 可得

$$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}.$$

有人或許會將此式看作

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12},$$

並宣稱一切自然數之和爲 $-1/12$, 但這是一派胡言, 因爲 $\zeta(s)$ 的級數表達式 (1) 僅對於 $\Re(s) > 1$ 成立.

參考資料

[Cha] Timo Chang. *Special Zeta Values at Positive Even Integers (Classical Case and Function Field Case)*. Expository papers. URL: https://timomath.com/special_zeta_values_at_positive_even_integers_classical_case_and_function_field_case.pdf.