簡單的數學問題

Timo Chang
timo65537@protonmail.com
譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 8 月 15 日

目錄

1 用直線填滿平面 **1**

2 換室問題 **2**

1 用直線填滿平面

若某集合只有有限多個元素 (不論有多少個) 或爲空集合, 則稱該集合爲**有限集**, 否則稱爲**無窮集**. 此外, 若於某無窮集和正整數集之間存在雙射 (一一對應), 則稱該無窮集爲**可數集**; 若不存在, 則稱該無窮集爲**不可數集**.

問題 1 假設你現在想要在直角座標平面上畫若干條直線以填滿整個平面, 即平面上的每一點都必須落在你所畫的至少其中一條直線上. 證明: 不可能只用可數多條直線就做到以上事情, 換言之, 欲用直線來填滿整個平面, 必須使用不可數多的直線.

首先, 你絕對不可能只用有限多條直線就填滿整個平面 (爲什麼?). 另一方面, 如果沒有限制直線的數量, 那麼問題的答案便得相當明顯——只需要在 x 軸上每一點作與 x 軸垂直的直線即可. 但由於 x 軸上含有不可數多個點, 這種做法得出的結果必然使用了不可數多條直線.

然而我們提出的問題特別限制你必須只能使用可數多條直線. 爲什麼這種方法不可能填滿整個平面? 讓我們展開證明吧!

證明 假設我們已作了可數多條直線於平面上, 則根據「可數」的定義, 每一條直線都可編號, 不妨記作 $L_1, L_2, L_3, \ldots$, 我們希望可以導出: 平面上至少存在一點不落在這些任一條直線上.

如我們之前所提及, 平面上有不可數多條鉛直線, 也就是說, 鉛直線比我們所作的可數多條直線 $L_1, L_2, L_3, \ldots$ 來得「多」條. 因此, 至少有一條鉛直線不屬於直線族 $\{L_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$, 不妨將之記作 L'. 我們欲求的點應該會落在 L' 上.

我們將直線族 $\{L_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$ 分成兩大類:

- 與 L' 平行, 也因此與 L' 不相交;

- 與 L' 不平行, 也因此與 L' 恰交於一點.

因此, L' 與直線 $L_1, L_2, L_3, \ldots$ 的交點均來自上述的第二類, 其交點總數等於與 L' 不平行的直線數量. 因爲這類直線構成可數集的子集, 所以這類直線必只有有限多條或可數無窮多條 (即**至多可數**), 也就是說, L' 與直線族 $L_1, L_2, L_3, \ldots$ 交於至多可數個點.

但是, 由於 L' 上有不可數多個點, 故 L' 上至少存在一點不落在直線 $L_1, L_2, L_3, \ldots$ 之中的任一條上, 證畢. □

2 換室問題

問題 2 假設有有限多間房間, 每一房裡有有限多個人. 每個步驟中, 都有一個人離開目前的房間並移動到另一間, 規定異動者只能移動到不比他原房少人的房間. 證明在有限多步之後, 所有人將會在同一間房間裡.

如果你稍微花一點時間思考這個問題, 你或許不難自我信服. 由於規定人人都只能移動到人數相當或更多的房間, 那些人將陸續離開人數較少的房間並進入更多人的那一間, 最終大家便會相聚於同一室.

乍看之下, 這個想法可能顯得直觀易懂, 但你是否可以給出嚴謹的論證? 我們從一個簡單的觀察開始: 每當他們換一間房時, 所有房間的總人數保持不變, 那如果我們不只是計其總人數, 而改爲將每一間房的人數作平方和, 會是如何呢?

爲了簡單起見, 考慮兩室 A, B, 最初分別有 $2, 3$ 人. 因爲 A 室的人數較少, 所以一人只能從 A 室異動至 B 室, 在這個情況下, 房間人數分配從 $(2, 3)$ 變成了 $(1, 4)$. 簡單地將人數相加起來, 總數仍保持不變, 即

$$2 + 3 = 1 + 4 = 5.$$

要是我們將每一房的人數作平方和, 那麼平方和將由

$$2^2 + 3^2 = 13$$

變成

$$1^2 + 4^2 = 17,$$

我們發現平方和增加了.

有了這樣的思維, 我們來正式地寫下證明:

證明 設有 n 室 $R_1, \ldots, R_n$, 各有 $x_1, \ldots, x_n$ 人. 如我們先前的觀察, 我們專注於考慮房間人數的平方和.

考慮某一步, 某人從 R_i 室異動至 R_j 室, 根據規則, R_i 室裡不比 R_j 多人, 即

$$x_i \leq x_j. \tag{1}$$

換好房間後, R_i 室和 R_j 室中的人數由

$$(x_i, x_j)$$

變成

$$(x_i - 1, x_j + 1),$$

並且相應的平方和由

$$x_i^2 + x_j^2 \tag{2}$$

變成

$$(x_i - 1)^2 + (x_j + 1)^2. \tag{3}$$

注意到

$$(3) = (x_i - 1)^2 + (x_j + 1)^2 = x_i^2 - 2x_i + 1 + x_j^2 + 2x_j + 1 = x_i^2 + x_j^2 + 2(x_j - x_i) + 2.$$

再由 (1) 可知, 末兩項 $2(x_j - x_i) + 2 \geq 2 > 0$, 那麼

$$(3) = (x_i - 1)^2 + (x_j + 1)^2 > x_i^2 + x_j^2 = (2),$$

即每一次的房間異動將導致人數平方和嚴格遞增.

另一方面, 注意到該平方和數列不超過[1]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2,$$

此數對應所有人共處一室時的房間人數平方和. 因爲每一次異動都能使得房間人數平方和嚴格遞增, 所以此上界必可以在有限多步就達到. 因此, 所有人終將置身於同一室. □

[1]習題: 給定有限多個非負整數, 證明它們的平方和不超過它們總和的平方, 即對任意 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 均有 $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq (a_1 + \cdots + a_n)^2$.