在正偶數點處的特殊 ζ 值
(古典情形與函數體的情形)

Timo Chang
timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2026 年 4 月 27 日

探討特殊 ζ 值的理論向來是數學家們津津樂道的課題. 在古典理論中, 歐拉率先確立了黎曼 ζ 函數在正偶數點處的值. 他所給出的公式涵蓋了數個在數學上舉足輕重的量, 其中還包含了週期 $2\pi i$ (超越數!). 另一方面, 函數體領域中關於黎曼 ζ 函數的研究, 則是由卡里茲 (Carlitz) 在 1930 年代首開先河. 他在 $\mathbb{F}_q(\theta)$ (其中 θ 是變數) 上定義了黎曼 ζ 函數的類比, 並推導出其在正「偶數」點處的值. 最令人拍案叫絕的是, 他的公式與歐拉給出的結果如出一轍, 竟有著異曲同工之妙.

本文旨在將這兩個公式並列探討, 同時引領在函數體領域初窺門徑的讀者, 親身體會古典數學與函數體世界竟能如此神似. 事實上, 這兩項證明的核心思想更是不謀而合. 簡而言之, 兩者皆是巧妙運用特定函數的兩種表達方式, 再輔以代數操作的推演, 最終水到渠成地得出目標結果.

1 古典理論

黎曼 ζ 函數爲

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

其中 $\Re(s)>1$. 本節將證明以下定理, 其歸功於歐拉.

定理 1.1 (歐拉) 對於正偶數 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$\zeta(n)=-\frac{B_n}{2\cdot n!}(2\pi i)^n,$$

其中 $B_k\in\mathbb{Q}$ 爲白努利數, 其由如下式子給出:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}B_k\frac{t^k}{k!}.$$

特別地, 由上述定理可知黎曼 ζ 函數將正偶數點映至超越數. 必須指出, 關於其在正奇數點處之超越性的研究目前仍遙不可及.

證明　在古典理論中, 可使用正弦函數的兩種表達式. 首先, 由無窮乘積的公式

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

兩邊取對數後再求導, 可得

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac{2z}{n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z}\right). \tag{2}$$

另一方面, 由三角函數的指數表示式

$$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad 及 \quad \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

可得

$$\cot(z) = i\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1},$$

從而

$$\pi\cot(\pi z) = \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz}-1}. \tag{3}$$

由 (2) 及 (3), 得

$$\pi i + \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz}-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z}\right),$$

於是

$$\pi iz + \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz}-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\pi iz}{2\pi in+2\pi iz} - \frac{2\pi iz}{2\pi in-2\pi iz}\right).$$

令 $t = 2\pi iz$, 則

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{e^t-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{t}{2\pi in+t} - \frac{t}{2\pi in-t}\right).$$

根據定義, 等式左邊爲

$$左式 = \frac{t}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} B_k\frac{t^k}{k!},$$

而等式右邊爲

$$
\begin{aligned}
\text{右式} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{2\pi i n} \left(\frac{1}{1+\frac{t}{2\pi i n}} - \frac{1}{1-\frac{t}{2\pi i n}} \right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{2\pi i n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{t}{2\pi i n} \right)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2\pi i n} \right)^k \right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2t}{2\pi i n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2\pi i n} \right)^{2k+1} \right) \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2\pi i n} \right)^{2k+2} \\
&= 1 - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi i n)^{2k+2}} \right) t^{2k+2},
\end{aligned}
$$

故有等式

$$
\frac{t}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = 1 - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi i n)^{2k+2}} \right) t^{2k+2}. \tag{4}
$$

現, 對於正偶數 m, 比較等式兩邊 t^m 的係數, 得

$$
\frac{B_m}{m!} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi i n)^m} = \frac{-2}{(2\pi i)^m} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = \frac{-2}{(2\pi i)^m} \cdot \zeta(m),
$$

因此,

$$
\zeta(m) = -\frac{B_m}{2 \cdot m!} (2\pi i)^m.
$$

□

系理 1.2 由於 $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 及 $B_k \in \mathbb{Q}$, 因此對於 $n \geq 2$,

$$
\frac{\zeta(n)}{(2\pi i)^n} \in \mathbb{Q} \iff n \text{ 是偶數}.
$$

系理 1.3 比較式 (4) 中的其他項, 有 (甲) $B_0 = 1$; (乙) $B_1 = -1/2$; (丙) 對於大於 1 的奇數, 有 $B_k = 0$.

2 函數體領域

本節將專注探討函數體的情形, 其理論背景歸功於卡里茲在 [Car35] 中那引人入勝的研究. 設 $A := \mathbb{F}_q[\theta]$ 爲以 $p > 0$ 爲特徵之有限體 $\mathbb{F}_q$ 上的多項式環, A_+ 爲其含所有首一多項式的子集, 又設 $k := \mathbb{F}_q(\theta)$ 爲 A 的分式體, k_∞ 爲 k 在無窮遠處的完備化 (其中固定其標準歸一化的 [非阿基米德] 絕對值 $|\cdot|_\infty$, 使得 $|\theta|_\infty = q$), 且 $\mathbb{C}_\infty$ 爲 k_∞ 的某固定的代數閉包的完備化.

根據定義, $|a|_\infty := q^{\deg\alpha} = \#(A/\alpha A)$ $(a \in A)$. 因 $|n| = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{Z})$, 故該絕對值可視爲通常的絕對值的類比. 同時, 不妨也將以下類比銘記於心:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ A_+ & \subset & A & \subset & k & \subset & k_\infty & \subset & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

此時, 以式 (1) 的想法, 可定義在正整數點處的卡里茲 ζ 值.

定義 2.1 (卡里茲) 對於 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$\zeta_A(n) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n}.$$

由於一般項 $|1/a^n|_\infty = q^{-n\deg a} \to 0$ $(\deg a \to +\infty)$, 因此依非阿基米德性, 可知上述級數在 k_∞ 中收斂. (若有需要, 可參見 [Pap23, 引理 2.7.1].)

定理 1.1 已給出黎曼 ζ 函數在正**偶數**點處的公式, 而事實上, 該結論對於卡里茲 ζ 函數也具有精美絕倫的類比.

定理 2.2 (卡里茲) 對於正 A-偶數 $n \in \mathbb{N}$ (即 $q-1 \mid n$), 有

$$\zeta_A(n) = \frac{BC_n}{\Pi_n}\tilde{\pi}^n = -\frac{BC_n}{(q-1)\cdot\Pi_n}\tilde{\pi}^n,$$

其中, (ㄅ) $BC_n \in k$ 爲白努利-卡里茲數 (白努利數的類比); (ㄆ) Π_n 爲卡里茲階乘 (通常的階乘函數的類比); (ㄇ) $\tilde{\pi}$ 爲卡里茲週期 (是個超越元, $2\pi i$ 的類比).

就如同古典理論, 該公式告訴我們卡里茲 ζ 函數在正 A-偶數處的取值是超越元. 然而, 不同於古典理論, 卡里茲 ζ 函數在其他點處的取值已經證出均爲超越元了 (古典理論的則目前仍未知), 這無非是個石破天驚的結論 (見 [Yu91]).

所謂正 A-偶數, 可視爲如下類比: 根據定義, 通常的偶數爲可被 2 整除的整數. 2 這個數字可以視爲 $\mathbb{Z}$ 的單位群的基數, 其只含有兩個元素 (兩個符號, 相當於非零數在符號函數之下的像集) $\{\pm 1\}$. 依此觀點, 由於 A 含有 $q-1 = \#(A^\times) = \#(\mathbb{F}_q^\times)$ 個「符號」, 因此只要整數可被 $q-1$ 整除, 便稱之爲 **A-偶數**.

爲定理 2.2, 現將解釋所有必要的背景知識. 簡便起見, 以下省略一切所提及的結論的證明, 並爲有興趣的讀者附上適當的參考資料. 古典理論中, 定理 1.1 的證明關鍵是使用特定的函數 (即正弦函數) 作爲媒介, 而在函數體領域中, **卡里茲指數函數**扮演了該角色, 其乃是通常的指數函數的類比. 下面將給出其定義, 並對照它們的關係.

對於 $n \geq 0$, 設 D_n 爲 A 中所有 n 次首一多項式的乘積, 則將卡里茲指數函數定義成

$$\exp_C(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{q^n}}{D_n}, \tag{5}$$

其誘導出正合列

$$0 \longrightarrow A\cdot\tilde{\pi} \longrightarrow \mathbb{C}_\infty \xrightarrow{\exp_C} \mathbb{C}_\infty \longrightarrow 0,$$

其中 $\tilde{\pi} \in \mathbb{C}_\infty$ 稱爲**卡里茲週期**, 其除了可能差一個符號倍數[1] (即 $\mathbb{F}_q^\times$-倍數) 外是唯一的. 特別地,

[1]定理 2.2 假設了 $q-1 \mid n$, 故 $\tilde{\pi}^n$ 是良定義的.

卡里茲指數函數是映至**加法**群 $\mathbb{C}$ 的滿射. 另外, 論文 [Wad41] 還指出, $\tilde{\pi}$ 在 k 上是超越元. 此外, 根據上述正合列, 由具有非阿基米德性版本的魏爾斯特拉斯分解定理可推得

$$\exp_C(z) = z \prod_{0 \neq a \in A} \left(1 - \frac{z}{a\tilde{\pi}}\right). \tag{6}$$

需要強調的是, 這是卡里茲指數函數的另一種表達式. 欲知與此函數相關的更多資訊, 可參見經典的教材, 如 [Gos96, 第 3 節].

與古典理論的類比具體如下: 通常的指數函數定義爲

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{7}$$

其誘導出正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \cdot 2\pi i \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1,$$

其中 $2\pi i \in \mathbb{C}$ 可視爲「週期」($\exp(z)$ 的核空間由 $2\pi i$ 的整數倍所組成. 由於 -2π 亦可視爲週期, 因此週期至多只會相差符號的倍數. 而且, 衆所周知 $2\pi i$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越數, 於此立刻可看出 $2\pi i$ 及卡里茲週期 $\tilde{\pi}$ 之間的關係. 宜點出的是, 通常的指數函數是映至**乘法**群 $\mathbb{C}^\times$ 的滿射.

現將定義**卡里茲階乘**. 對於非負整數 n, 將之以 q 進位表示成 $n = \sum_{i=0}^{m} n_i q^i$, 其中所有 i 均滿足 $0 \leq n_i < q$, 則把卡里茲階乘 (見 [Gos96, 第 9 節]) 定義成

$$\Pi_n := \prod_{n=0}^{m} D_i^{n_i}.$$

注意到在式 (5) 中, 分母 $D_i = \Pi_{q^i}$ 爲 z^{q^n} 的指數的卡里茲階乘, 而在式 (7) 中, 分母 $n!$ 亦爲 z^n 的指數的通常階乘.

最後, 因古典的白努利數 $B_n \in \mathbb{Q}$ 由冪級數

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

確定, 故由指數函數及階乘的類比, 可將**白努利-卡利茲數**定義作由式

$$\frac{z}{\exp_C(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{BC_n}{\Pi_n} z^n$$

所確定的數 $BC_n \in k$. 以上兩式左邊的分母有差異是因爲, 在古典理論中, 乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 中的么元是 1, 而在函數體理論中, 加法群 $\mathbb{C}_\infty$ 的么元是 0. 關於 $q = 3$ 情形之下的白努利-卡里茲數表, 參見 [Gos96, 第 9.2 小節].

現在已經準備好要用來證明定理 2.2 的所有工具了.

證明 在卡里茲指數函數的無窮乘積公式 (6)

$$\exp_C(z) = z \prod_{0 \neq a \in A} \left(1 - \frac{z}{a\tilde{\pi}}\right)$$

兩邊取對數再求導 (即對於 $\mathbb{C}_\infty$ 上的冪級數 f, 商 f'/f), 得

$$\frac{\exp_C'(z)}{\exp_C(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq a\in A} \frac{-\frac{1}{a\tilde{\pi}}}{1-\frac{z}{a\tilde{\pi}}} = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq a\in A} \frac{1}{z-a\tilde{\pi}} = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq a\in A} \frac{1}{z+a\tilde{\pi}},$$

其中最後一個等式成立是因爲集合 $\{-a \mid 0\neq a\in A\}$ 即爲 $A\setminus\{0\}$. 於是,

$$z\cdot\frac{\exp_C'(z)}{\exp_C(z)} = 1 + \sum_{0\neq a\in A} \frac{z}{z+a\tilde{\pi}}.$$

注意到, 依卡里茲指數函數的級數表達式 (5)

$$\exp_C(z) = z + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{q^m}}{D_m},$$

並且因目前在特徵 p 的情形之下操作, 可得 $\exp_C'(z)=1$, 故根據定義, 等式左邊爲

$$\text{左式} = \frac{z}{\exp_C(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{BC_n}{\Pi_n} z^n. \tag{8}$$

另一方面, 不難看出等式右邊爲

$$\begin{aligned}\text{右式} &= 1 + \sum_{0\neq a\in A} \frac{z}{a\tilde{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{a\tilde{\pi}}} \\ &= 1 + \sum_{0\neq a\in A} \frac{z}{a\tilde{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-\frac{z}{a\tilde{\pi}}\right)^m \\ &= 1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\tilde{\pi}^{m+1}} \left(\sum_{0\neq a\in A} \frac{1}{a^{m+1}}\right) z^{m+1},\end{aligned}$$

此處, [Pap23, 習題 2.7.2] 表明了在非阿基米德性的結構之下, 交換兩求和運算次序的操作是合理的. 注意到對每個正整數 $s\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{0\neq a\in A} \frac{1}{a^s} = \sum_{\epsilon\in\mathbb{F}_q^\times} \frac{1}{\epsilon^s} \sum_{a\in A_+} \frac{1}{a^s} = \zeta_A(s) \sum_{\epsilon\in\mathbb{F}_q^\times} \epsilon^s,$$

其中, 若 $q-1$ 整除 s, 則可看出最後一個和爲 -1, 否則和爲 0. 那麼, 右式化爲

$$\text{右式} = 1 + \sum_{\substack{m=0\\ q-1\mid m+1}}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\tilde{\pi}^{m+1}} \zeta_A(m+1) z^{m+1} = 1 + \sum_{\substack{n=1\\ q-1\mid n}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\tilde{\pi}^n} \zeta_A(n) z^n. \tag{9}$$

由 (8) 及 (9), 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{BC_n}{\Pi_n} z^n = 1 + \sum_{\substack{n=1\\ q-1\mid n}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\tilde{\pi}^n} \zeta_A(n) z^n. \tag{10}$$

對於正 A-偶數 n, 比較 z^n 的係數, 有

$$\frac{BC_n}{\Pi_n} = \frac{(-1)^n}{\tilde{\pi}^n}\zeta_A(n).$$

注意到, 若特徵 p 是奇數, 則 $q-1$ 必爲偶數, 從而 n 也是偶數; 而若 p 是偶數, 則 $-1=1$. 於是, 在各個情形中, -1 的冪可略去, 從而

$$\zeta_A(n) = \frac{BC_n}{\Pi_n}\tilde{\pi}^n.$$

$\square$

事實上, 有 $\tilde{\pi} \in (-\theta)^{1/(q-1)} \cdot k_\infty^\times$. 特別地, 這意味著 $\tilde{\pi}^n \in k_\infty \iff q-1 \mid n$, 故依定理 2.2, 有如下系理. (將之與系理 1.2 比較.)

系理 2.3 對於 $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\zeta_A(n)}{\tilde{\pi}^n} \in k \iff n \text{ 是} A\text{-偶數}.$$

當然, 比較式 (10) 中其他項的係數, 即得系理 1.3 的類比.

系理 2.4 (甲) $BC_0 = 1$; (乙) 若 $q-1 \nmid n$, 則 $BC_n = 0$.

參考資料

[Car35] Leonard Carlitz. "On certain functions connected with polynomials in a Galois field". In: *Duke Math. J.* 1 (1935), pp. 137–168.

[Gos96] David Goss. *Basic structures of function field arithmetic*. Vol. 35. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[Pap23] Mihran Papikian. *Drinfeld modules*. Vol. 296. Grad. Texts in Math. Springer Nature Switzerland AG, 2023.

[Wad41] L. I. Wade. "Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$". In: *Duke Math. J.* 8.4 (1941), pp. 701–720.

[Yu91] Jing Yu. "Transcendence and special zeta values in characteristic p". In: *Ann. of Math. (2)* 134.1 (1991), pp. 1–23.