

圓錐曲線的切線

仙女國公主

最後編輯: 2026 年 7 月 25 日

本文旨在回顧高中數學時學過的一個章節——圓錐曲線的切線求法, 並補充一個現在的高中教材不怎麼提及的公式, 用於求過圓錐曲線外一點的切線對方程式.

定義 1 本文以符號 $S(x, y)$ 表示二元二次多項式的一般形式, 即

$$S(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

定理 2 圓錐曲線 $S(x, y) = 0$ 上的點 (x_1, y_1) 處的切線方程式為

$$ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) + c = 0. \quad (1)$$

證明 (法一: 隱函數微分法) 視 $y = y(x)$, 並使用隱函數的微分法, 在 $S(x, y) = 0$ 兩邊對 x 求導, 得

$$2ax + 2hy + 2hx \frac{dy}{dx} + 2by \frac{dy}{dx} + 2g + 2f \frac{dy}{dx} = 0,$$

約分並整理, 得

$$ax + hy + g + (hx + by + f) \frac{dy}{dx} = 0.$$

將 $(x, y) = (x_1, y_1)$ 代入, 得

$$ax_1 + hy_1 + g + (hx_1 + by_1 + f) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = 0.$$

若 $hx_1 + by_1 + f \neq 0$, 則得切線斜率

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f},$$

於是 $S(x, y) = 0$ 在點 (x_1, y_1) 處的切線方程式為

$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\frac{ax_1 + hy_1 + g}{hx_1 + by_1 + f}(x - x_1) \\ \iff -hx_1y - by_1y - fy + hx_1y_1 + by_1^2 + fy_1 &= ax_1x + hy_1x + gx - ax_1^2 - hx_1y_1 - gx_1 \\ \iff ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) &= ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 \\ \iff ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) &= S(x_1, y_1) - c. \end{aligned}$$

由於點 (x_1, y_1) 在曲線 $S(x, y) = 0$ 上, 因此 $S(x_1, y_1) = 0$, 從而切線方程式為

$$ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) + c = 0.$$

若 $hx_1 + by_1 + f = 0$ 且 $ax_1 + hy_1 + g \neq 0$, 則必有

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = +\infty,$$

即切線與 x 軸垂直, 且其方程式為 $x = x_1$. 注意到

$$\begin{aligned} & ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) + c \\ &= (ax_1 + hy_1 + g)x + (hx_1 + by_1 + f)y + gx_1 + fy_1 + c \\ &= (ax_1 + hy_1 + g)x + 0y + (gx_1 + fy_1 + c). \end{aligned} \quad (2)$$

由於點 (x_1, y_1) 在曲線上, 因此

$$\begin{aligned} & ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \\ \iff & x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \\ \iff & x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1 \cdot 0 + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \\ \iff & gx_1 + fy_1 + c = -x_1(ax_1 + hy_1 + g). \end{aligned}$$

將上式代入 (2), 得

$$\begin{aligned} & ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) + c \\ &= (ax_1 + hy_1 + g)x - x_1(ax_1 + hy_1 + g) \\ &= (ax_1 + hy_1 + g)(x - x_1). \end{aligned}$$

由此可見, 即使切線方程式為 $x = x_1$, 公式 (1) 仍成立, 也就是說, 使用公式 (1) 仍可得到斜率不存在的切線.

若 $hx_1 + by_1 + f = 0$ 且 $ax_1 + hy_1 + g = 0$, 則 (x_1, y_1) 是方程組

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0, \\ by + hx + f = 0 \end{cases}$$

的解. 作移軸, 使 (x_1, y_1) 為新座標系的原點, 即把公式

$$\begin{cases} x = x' + x_1, \\ y = y' + y_1 \end{cases}$$

代入 $S(x, y) = 0$, 得曲線的新方程式為

$$\begin{aligned} & a(x' + x_1)^2 + 2h(x' + x_1)(y' + y_1) + b(y' + y_1)^2 + 2g(x' + x_1) + 2f(y' + y_1) + c = 0 \\ \iff & ax'^2 + 2ax'x_1 + ax_1^2 + 2hx'y' + 2hx'y_1 + 2hx_1y' + 2hx_1y_1 \\ & \quad + by'^2 + 2by'y_1 + by_1^2 + 2gx' + 2gx_1 + 2fy' + 2fy_1 + c = 0 \\ \iff & ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(ax_1 + hy_1 + g) + 2y'(hx_1 + by_1 + f) \\ & \quad + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \\ \iff & ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x' \cdot 0 + 2y' \cdot 0 + S(x_1, y_1) = 0 \\ \iff & ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + S(x_1, y_1) = 0. \end{aligned}$$

上式中, 用 $-x'$ 代 x' , 用 $-y'$ 代 y' , 方程不變, 所以 (x_1, y_1) 是曲線的對稱中心, 但 (x_1, y_1) 實際上是曲線上的一點, 因此矛盾, 故此情形不可能發生. $\square$

證明 (法二: 梯度法) 設 (x, y) 為曲線在點 (x_1, y_1) 處的切線上的任一點, 則切線的方向向量為 $(x - x_0, y - y_0)$. 由於梯度向量

$$\nabla S(x_1, y_1) = (2(ax_1 + hy_1 + g), 2(hx_1 + by_1 + f))$$

與方向向量正交, 因此所求切線方程式為

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla S(x_1, y_1) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 2(ax_1 + hy_1 + g)(x - x_0) + 2(hx_1 + by_1 + f)(y - y_0) \\ &\iff (ax_1x + hy_1x + gx - ax_1^2 - hx_1y_1 - gx_1) + (hx_1y + by_1y + fy - hx_1y_1 - by_1^2 - fy_1) = 0 \\ &\iff ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + gx + fy = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1 \\ &\iff ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 \\ &\iff ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) = S(x_1, y_1) - c. \end{aligned}$$

因 (x_1, y_1) 在曲線上, 故 $S(x_1, y_1) = 0$, 從而切線方程式為

$$ax_1x + h(y_1x + x_1y) + by_1y + g(x_1 + x) + f(y_1 + y) + c = 0.$$

這個證法避開了除法, 免去了如上一個證明中討論分母是否為 0 的麻煩. 只是高中生不見得有學過偏導數, 能接受證法一就好. $\square$

以上為圓錐曲線 $S(x, y) = 0$ 上某點 (x_1, y_1) 處的切線方程式的公式, 接下來要整理過圓錐曲線 $S(x, y) = 0$ 外某點 (x_0, y_0) 的切線方程式, 以下提供幾種常見的方法.

方法 1 (求切點法) 步驟如下:

1. 設切點為 (x_1, y_1) , 由公式 (1) 寫出切線方程式;
2. 由 (x_0, y_0) 在切線上, 代入 (1) 得一條以 x_1, y_1 為未知數的方程式;
3. 由 (x_1, y_1) 在曲線上, 得另一條以 x_1, y_1 為未知數的方程式 $S(x_1, y_1) = 0$;
4. 解出 (x_1, y_1) 即得切線方程式.

方法 2 (判別式法) 步驟如下:

1. 設所求切線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$;
2. 將 $y = y_0 + m(x - x_0)$ 代入 $S(x, y) = 0$, 得一條以 x 為未知數的二次方程式;
3. 在確定二次項係數不為零的情況下, 由相切的條件, 使用二次方程式的判別式 $\Delta = 0$ 來解出 m .

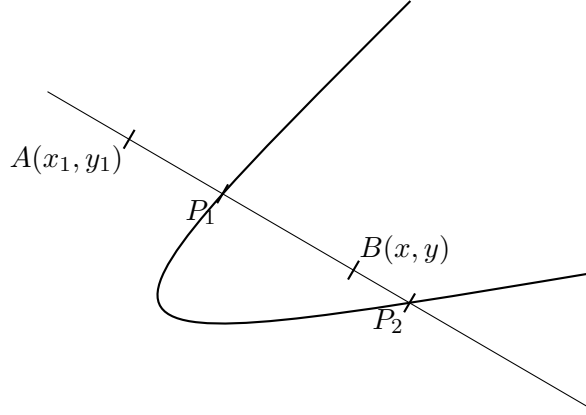
注意 判別式法只能求出斜率存在的切線, 容易忽略垂直於 x 軸的切線. 若只求出一條切線的斜率, 則應自行補上另一條切線.

註記 從圓、橢圓、拋物線外任意一點向它們引切線，必可引出一雙切線。而對於雙曲線，只要曲線外的點不落在漸近線上，也必可引出一雙切線；如果點落在其對稱中心上，那麼必不可能引出切線；如果點落在漸近線上除對稱中心外之處，那麼只能向雙曲線引出一條切線¹。具體證明只是代數運算，留給讀者作為嘗試。

方法 3 (公式法) 圓錐曲線 $S(x, y) = 0$ 外某點 (x_0, y_0) 的切線對方程式為

$$S(x_0, y_0) \cdot S(x, y) = (ax_0x + h(y_0x + x_0y) + by_0y + g(x_0 + x) + f(y_0 + y) + c)^2.$$

證明 記 (x_0, y_0) 為 A ，設有動點 $B(x, y)$ 使得直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 割曲線於兩點 P_1, P_2 ，如下圖。



不難注意到，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的任意一點 P 均可表示為

$$\left(\frac{kx + x_1}{k + 1}, \frac{ky + y_1}{k + 1} \right),$$

其中 $k : 1$ 為點 P 分線段 $\overline{AB}$ 的比例（作為外分點時， $k < 0$ ）。若 P 在曲線上，則

$$\begin{aligned} a \left(\frac{kx + x_1}{k + 1} \right)^2 + 2h \left(\frac{kx + x_1}{k + 1} \right) \left(\frac{ky + y_1}{k + 1} \right) + b \left(\frac{ky + y_1}{k + 1} \right)^2 \\ + 2g \left(\frac{kx + x_1}{k + 1} \right) + 2f \left(\frac{ky + y_1}{k + 1} \right) + c = 0, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} k^2(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c) \\ + 2k(ax_0x + h(y_0x + x_0y) + by_0y + g(x_0 + x) + f(y_0 + y) + c) \\ + (ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c) = 0, \end{aligned}$$

即

$$S(x, y)k^2 + (ax_0x + h(y_0x + x_0y) + by_0y + g(x_0 + x) + f(y_0 + y) + c)k + S(x_0, y_0) = 0,$$

上述以 k 為變數的方程式的兩根對應兩點 P_1, P_2 的根。當 P_1 與 P_2 重合時，割線化為切線，此時由 $\Delta = 0$ 即得欲證公式。 □

¹此處得到的切線/切點是實質在歐氏空間中就能看到的，而另一個切點為無窮遠點，其對應的切線為漸近線的其中一條，在歐氏空間中不考慮。

對於圓 (即 $a = b = 1, h = 0$), 還有如下方法:

方法 4 (幾何法 (圓)) 步驟如下:

1. 設所求切線方程式為 $y - y_0 = m(x - x_0)$, 即 $mx - y + y_0 - mx_0 = 0$;

2. 由「圓心到切線的距離 = 半徑」, 即

$$\frac{|mx_C - y_0 + y_C - mx_0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c},$$

其中 $(x_C, y_C) = (-g, -f)$ 為圓心座標, 解出 m . 此時應該要求出兩個 m , 若只求出一個, 則表示另一條切線斜率不存在, 應自行補上切線 $x = x_0$.

以下提供一個例子, 並示範應用三種解法.

例 3 求橢圓 $x^2 + xy + y^2 = 3$ 的過點 $(2, 0)$ 之切線對方程式.

注意到 $2^2 + 2 \cdot 0 + 0^2 = 4 > 3$, 故點 $(2, 0)$ 在橢圓外.

解 (方法一) 設切點為 (x_1, y_1) , 則切線方程式為

$$x_1x + \frac{y_1x + x_1y}{2} + y_1y = 3,$$

則由 $(2, 0)$ 在切線上, 得

$$2x_1 + y_1 = 3, \quad \text{即} \quad y_1 = 3 - 2x_1. \quad (3)$$

又切點 (x_1, y_1) 在曲線上, 故

$$x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 3.$$

把 (3) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1(3 - 2x_1) + (3 - 2x_1)^2 &= 3 \iff x_1^2 + 3x_1 - 2x_1^2 + 9 - 12x_1 + 4x_1^2 = 3 \\ &\iff 3x_1^2 - 9x_1 + 6 = 0 \\ &\iff 3(x_1 - 2)(x_1 - 1) = 0 \\ &\iff x_1 = 1 \quad \text{或} \quad x_1 = 2. \end{aligned}$$

當 $x_1 = 1$ 時, 由 (3), 得 $y_1 = 1$, 此時切線方程式為

$$x + \frac{x + y}{2} + y = 3, \quad \text{即} \quad x + y = 2.$$

當 $x_1 = 2$ 時, 由 (3), 得 $y_1 = -1$, 此時切線方程式為

$$2x + \frac{-x + 2y}{2} - y = 3, \quad \text{即} \quad x = 1.$$

解 (方法二) 設所求切線方程式為

$$y = m(x - 2).$$

將上式代入 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 得

$$\begin{aligned}x^2 + mx(x-2) + m^2(x-2)^2 &= 3 \\ \iff x^2 + mx^2 - 2mx + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 &= 3 \\ \iff (1+m+m^2)x^2 - (2m+4m^2)x + 4m^2 - 3 &= 0.\end{aligned}$$

因 $1+2m^2 \neq 0$, 故由 $\Delta = 0$ 得

$$\begin{aligned}(2m+4m^2)^2 - 4(1+m+m^2)(4m^2-3) &= 0 \\ \iff 4m^2 + 16m^3 + 16m^4 - 4(4m^4 + 4m^3 + m^2 - 3m - 3) &= 0 \\ \iff 4m^2 + 16m^3 + 16m^4 - 16m^4 - 16m^3 - 4m^2 + 12m + 12 &= 0 \\ \iff 12m + 12 &= 0 \\ \iff m &= -1.\end{aligned}$$

當 $m = -1$ 時, 代回切線假設得切線方程式為 $y = -(x-2)$, 即 $x+y=2$.

另外, 過橢圓外一點 $(2, 0)$ 應有兩條切線, 但解 $\Delta = 0$ 僅得一解. 這表示另一條切線的斜率不存在 (即鉛直線), 故需另外檢驗過 $(2, 0)$ 的鉛直線 $x=2$: 將 $x=2$ 代入橢圓方程式得

$$4 + 2y + y^2 = 3 \iff y^2 + 2y + 1 = 0 \iff (y+1)^2 = 0.$$

因為有重根, 故 $x=2$ 確實為另一條切線。

綜上所述, 所求的兩條切線方程式為 $x+y=2$ 及 $x=2$.

解 (方法三) 所求切線對方程式為

$$\begin{aligned}(2^2 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 3)(x^2 + xy + y^2 - 3) &= \left(2x + \frac{0x + 2y}{2} + 0y - 3\right)^2 \\ \iff x^2 + xy + y^2 - 3 &= (2x + y - 3)^2 \\ \iff x^2 + xy + y^2 - 3 &= 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 12x - 6y \\ \iff 3x^2 + 3xy - 12x - 6y + 12 &= 0 \\ \iff x^2 + xy - 4x - 2y + 4 &= 0 \\ \iff x(x+y-2) - 2(x+y-2) &= 0 \\ \iff (x-2)(x+y-2) &= 0,\end{aligned}$$

即所求的兩條切線的方程式為 $x=2$ 及 $x+y=2$.

參考資料

- [1] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray. *Geometry*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2012.
- [2] 董教总华文独中工委统一课程委员会. *高级数学 (高一上册)*. 马来西亚华校董事联合会总会 (董总), 1994.
- [3] 丘维声. *解析几何*. 第 3 版. 北京大学出版社, 2015.