質數有無窮多個

Timo Chang
timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 12 月 26 日

目錄

1 歐幾里德當初的證明

定理 1.1 (歐幾里德) 設 S 爲有限個質數組成的集合, 則必有不屬於 S 的質數.

證明 設 $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$, 令 $P = p_1 \cdots p_n + 1$. 若 P 是質數, 則因 P 不等於 $p_1, \ldots, p_n$ 之中任一者, 故得結論. 若 P 是合數, 則 P 必有某個質因數, 不妨記作 q. 我們斷言: $q \notin S$. 若不然, 則有某個 $i = 1, \ldots, n$ 使得 $q = p_i$, 所以 q 整除 $p_1 \cdots p_n$. 又 q 整除 P, 可知 q 整除 $P - p_1 \cdots p_n = 1$, 但 $q > 1$, 矛盾. 因此, $q \notin S$. □

我們需要強調的一點是: 歐幾里德所證明質數有「無窮多」個並不是從假設只有有限個起手的, 取而代之的是, 定理 1.1 表明任意有限個質數 (不僅僅是首 n 個質數) 所成的集合都可以擴張至一個更大的質數集. 讓我們看看以下例子:

例 1.2 令 $S := \{2, 17, 43\}$, $P = 2 \cdot 17 \cdot 43 + 1$, 顯然 7 是 P 的質因數, 因此, 我們有新的質數 7.

將 7 囊括進我們的質數集, 記作 $S' = \{2, 7, 17, 43\}$, 則 $P' = 2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 43 + 1$, 容易看出 5 是 P' 的質因數, 因此, 我們有新的質數 5.

重複此操作, 我們可得一串由相異質數組成的無窮數列 (不禁令人好奇: 是否所有質數皆可透過如此手段得出?).

注意 1.3 認爲「將首 n 個質數之積與 1 的和是質數」是常見的錯誤! 例如,

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$$

就不是質數.

2 質數計數函數的極限

定義 2.1 定義 x 在函數 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 之下的像爲不大於 x 之質數個數, 稱函數 π 爲**質數計數函數**. 詳言之,

$$\pi(x) := \#\{p \leq x \mid p \text{ 是質數}\}.$$

命題 2.2 $\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty$.

只要證出了這個命題, 我們可以立刻推論出質數有無窮多個.

證明 我們的策略是找到某個以 $\pi(x)$ 爲上界的函數, 並且該函數爲當 $x \to +\infty$ 時的正無窮大量, 接著再依比較原理推出結論.

固定 $x > 1$, 假設 $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x < n+1$, 考慮函數 $1/t$ 的圖形, 如圖 1. 注意到, 由函數曲線

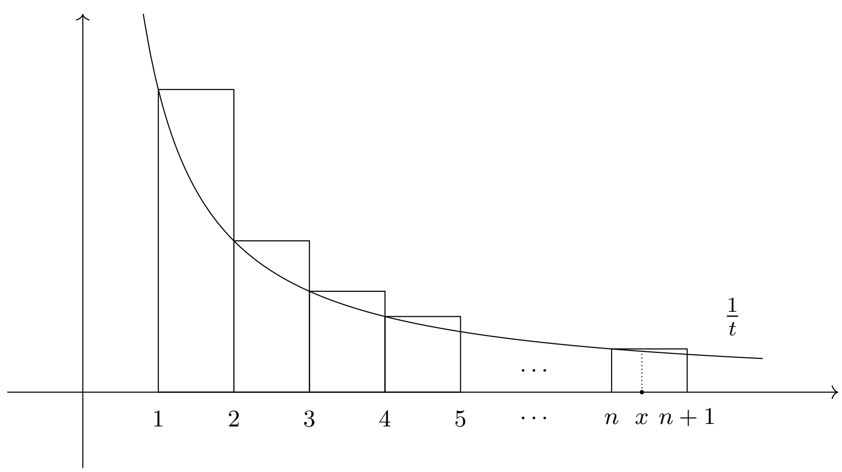

圖 1

$1/t$ 與直線 $t = 1$, $t = x$ 及 t 軸所夾區域的面積比那些長方形的總面積小. 根據基本的微積分, 它們的面積只不過分別是黎曼積分及黎曼上和而已, 即

$$\int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \ln x \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

令 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ 為所有不大於 x 的質數, 觀察:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \sum_{\substack{m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m}, \tag{2}$$

這是因為所有不大於 x 的正整數均可質因數分解成只以 $p_1, \ldots, p_s$ 之中某些質數為因數的乘冪, 而右式的和含有所有可能冪, 故求和項比左式多.

另一方面, 依分配律, 可見和式

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m} &= \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p_s^2} + \cdots\right) \\ &= \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{p_i}{p_i - 1}\right) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right),\end{aligned}$$

而依定義, p_i 是第 i 個質數, 所以 $p_i - 1 \geq i$, 因此, 我們有

$$\sum_{\substack{m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m} = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \leq \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{i+1}{i}\right) = s + 1. \tag{3}$$

又 s 是不大於 x 的質數個數, 所以依定義 2.1,

$$s + 1 = \pi(x) + 1. \tag{4}$$

現在, 我們整合以上資訊, 得

$$\ln x \overset{(1)}{\leq} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \overset{(2)}{\leq} \sum_{\substack{m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \\ \alpha_i \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m} \overset{(3)}{\leq} s + 1 \overset{(4)}{=} \pi(x) + 1.$$

最後, 由於當 $x \to +\infty$ 時, $\ln x \to +\infty$, 因此 $\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty$, 得證. □

3 質數的倒數和

命題 3.1 (歐拉, 1744[1]) 設 $\mathcal{P}$ 為所有質數的全體, 則級數 $\sum_{p \in \mathcal{P}} 1/p$ 發散.

證明 這裡給出由克拉克森 [Cla66] 所提出的簡短證明. 假設不然, 級數 $\sum_{p \in \mathcal{P}} 1/p$ 收斂, 則存在 $k \in \mathbb{N}$ 滿足

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p > k}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}.$$

若 $\mathcal{P}$ 是有限集, 則可取 k 為 $\mathcal{P}$ 中的最大質數減去 1, 以便該和式不是在對空集求和.

[1]見 https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/72/ 定理 19.

設 Q 爲不大於 k 的所有質數之積, 則對一切 $n \in \mathbb{N}$ 和每個 $p \le k$, 均有 $p \nmid 1+nQ$, 故 $1+nQ$ 的所有質因數大於 k, 這表示對所有 $N \in \mathbb{N}$, 部分和

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+nQ} \le \sum_{t=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p > k}} \frac{1}{p} \right)^t \le \sum_{t=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^t = 1.$$

因此, 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(1+nQ)$ 收斂. 但依極限比較準則, 此級數應發散. □

4 弗斯騰伯格以拓樸方法給出的證明

定理 4.1 ([Fur55]) 質數有無窮多個.

證明 對於 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, 設

$$S(a,b) := \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

只要 $U \subseteq \mathbb{Z}$ 是空集或任意個形如 $S(a,b)$ 的集合的聯集, 就規定 U 爲開集, 以此定義拓樸於 $\mathbb{Z}$ 上, 不難檢查這確實會是一個拓樸.

- 根據定義, $\varnothing$ 是開集, $\mathbb{Z} = S(0,1)$ 也是開集.
- 根據定義, 任意開集的聯集是開集.
- 若 $S(a_1,b_1) \cap S(a_2,b_2)$ 非空, 則恰爲 $S(x,b')$, 其中 $x \in S(a_1,b_1) \cap S(a_2,b_2)$, $b' := \operatorname{lcm}(b_1,b_2)$, 因此兩開集的交集是開集.

注意到, 因爲

$$S(a,b) = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} S(a+i,b),$$

所以基 $S(a,b)$ 是閉集.

現, 因爲所有異於 ± 1 的整數是某質數的整數倍, 所以

$$\mathbb{Z} \setminus \{1,-1\} = \bigcup_{p\ \text{是質數}} S(0,p).$$

因有限集 $\{1,-1\}$ 不是開集, 故左式不是閉集. 所以如果只有有限多個質數, 那麼右式是有限個閉集的聯集, 故爲閉集, 矛盾. 因此, 質數有無窮多個. □

5 황즘立透過雷建德公式給出的證明

定理 5.1 ([Wha10]) 質數有無窮多個.

證明　我們有如下由雷建德 (Legendre) 給出的公式: 對每個 $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \prod_{p \text{ 是質數}} p^{e_p(n)}, \quad \text{其中} \quad e_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

注意到

$$e_p(n) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1} \leq n,$$

所以, 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$n! \leq \prod_{p\text{是質數}} p^n.$$

由於對任意常數 $c \in \mathbb{R}$, 恆有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{c^n}{n!} = 0,$$

因此上式可推得質數有無窮多個. $\square$

參考資料

[Cla66] James A. Clarkson. "Shorter Notes: On the Series of Prime Reciprocals". In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 17.2 (1966), p. 541.

[Fur55] Harry Furstenberg. "On the Infinitude of Primes". In: *Amer. Math. Monthly* 62.5 (1955), p. 353.

[Wha10] Junho Peter Whang. "Another Proof of the Infinitude of the Prime Numbers". In: *Amer. Math. Monthly* 117.2 (2010), p. 181.