e 的超越性

Timo Chang
timo65537@protonmail.com
譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 12 月 25 日

在基本的微積分課程中, 有一道常見的習題, 是利用級數表達式 $e = \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n!$ 證明 e 是無理數. 雖然歐拉 (Euler) 早在 1744 年的時候就已經完成了這個證明, 但當時人們尚不清楚 e 是否爲代數數, 直到 1873 年, 厄米特 (Hermite) 才證明出 e 是超越數, 距離歐拉的工作已經超過一個世紀. 本文將介紹由赫維茲 (Hurwitz) 提出的一種初等但巧妙且精湛的方法來證明 e 是超越數, 整個證明所用的工具僅僅需要基本的微積分知識.

定理 1 e 是超越數.

證明 先來作以下一般性的觀察: 對任意的 r 次多項式 $f(x)$, 令

$$F(x) := f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x).$$

注意到

$$\begin{aligned}\left(e^{-x}F(x)\right)' &= e^{-x}\left(-F(x) + F'(x)\right)\\ &= e^{-x}\left(-f(x) + f^{(r+1)}(x)\right)\\ &= -e^{-x}f(x),\end{aligned}$$

其中, 最後一個等式成立於 $\deg f = r$, 故依均值定理, 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 在 0 和 n 之間至少有一點 ξ_n 滿足 $e^{-n}F(n) - e^0F(0) = -e^{-\xi_n}f(\xi_n)\cdot(n-0)$, 這表示

$$F(n) - e^nF(0) = -ne^{n-\xi_n}f(\xi_n) =: \epsilon_n. \tag{1}$$

現, 假設 e 是代數數, 則存在 $c_n \in \mathbb{Z}$,

$$c_Ne^N + \cdots + c_1e + c_0 = 0,$$

結合 (1), 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} c_n\epsilon_n &= \sum_{n=1}^{N} c_n\left(F(n)-e^nF(0)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N} c_nF(n) - F(0)\sum_{n=1}^{N} c_ne^n\\ &= \sum_{n=1}^{N} c_nF(n) - F(0)\cdot(-c_0).\end{aligned}$$

因此, 我們得到等式

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\epsilon_n = c_0F(0) + \sum_{n=1}^{N} c_nF(n), \tag{2}$$

此等式對於任何多項式 f 均成立. 我們的目標是用巧妙的手段取一個多項式 f 來導出矛盾, 具體來說, 對任何質數 p, 令

$$f(x) := \frac{1}{(p-1)!}\cdot x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\cdots(N-x)^p, \tag{3}$$

如先前的設定, $F(x) := f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(r)}(x)$, 其中 $r=\deg f$. 我們斷言: 存在一個大質數 p 使得對於此特定的多項式 f, 在 (2) 式中,

1. 左式是能被 p 整除的整數;
2. 右式的 $c_0F(0)$ 是不能被 p 整除的整數;
3. 右式的 $c_nF(n)$ $(n=1,\dots,N)$ 是能被 p 整除的整數,

且這將導致矛盾.

我們採「3.、2.、1.」之順序來證明. 關於第三點, 由於 c_n 是整數, 故只需證明:

對一切 $n=1,\dots,N,\ F(n)$ 是能被 p 整除的整數,

而根據定義, $F(x) := f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(r)}(x)$, 因此我們只需要證明對所有 $i=0,1,\dots,r$ 及 $n=1,\dots,N$, $f^{(i)}(n)$ 是能被 p 整除的整數.

- 情形一: $0\le i\le p-1$. 此時, 由 (3) 可立刻看出, 因為對每個 $n=1,\dots,N$, n 為 f 的 p 重根, 所以對上述的每個 n, $f^{(i)}(n)=0$.
- 情形二: $p\le i\le r$. 此時, 我們的目標是證明 $f^{(i)}$ 是整係數多項式, 且各係數是 p 的倍數. 注意到只需考慮 f 的不少於 i 次的項, 所以由 (3), $f(x)$ 可以寫成

$$f(x) = \cdots + \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\ge 0}} \frac{*}{(p-1)!}\cdot x^{i+j},$$

其中, $* \in \mathbb{Z}$, 那麼,

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} * \cdot \frac{(i+j)(i+j-1)\cdots(j+1)}{(p-1)!} \cdot x^j,$$

並且可以看出

$$\begin{aligned}\frac{(i+j)(i+j-1)\cdots(j+1)}{(p-1)!} &= \frac{(i+j)!}{(p-1)!j!} \\ &= \frac{(i+j)! \cdot p(p+1)\cdots i}{i!j!} \\ &= \binom{i+j}{i} \cdot p(p+1)\cdots i\end{aligned}$$

實際上是 p 的倍數 (注意: 我們對 i 的假設不可少). 因此, 我們完成了此情形的證明, 也跟著證出了第三點.

接下來, 我們考慮第二點, 並斷言:

$$F(0) \text{ 是整數, 且不是 } p \text{ 的倍數.}$$

如果我們證出此斷言成立, 那麼為了證出第二點, 我們就只要取 $p > c_0$ (此時 c_0 就不是 p 的倍數).

關於該斷言, 因 $F(x) := f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$, 故我們只需證對每個 $i = 0, 1, \ldots, r$, $f^{(i)}(0)$ 是整數, 並且 p 不能整除 $f^{(i)}(0)$ 的充要條件為 $i = p - 1$.

- 情形一: $0 \leq i \leq p-2$. 與上一步的情形一類似地, 由 (3) 可知, 因為 0 是 f 的 $p-1$ 重根, 所以有 $f^{(i)}(0) = 0$.
- 情形二: $i = p-1$. 不難看出 $f^{(p-1)}(0)$ 是 $f^{(p-1)}$ 的常數項, 而根據 (3), 該常數即為 $(N!)^p$, 故若取 $p > N$, 則 $(N!)^p$ 就不是 p 的倍數.
- 情形三: $p \leq i \leq r$. 這從上一步的情形二可以觀察出, 對於每個如此的 i, $f^{(i)}$ 是整係數多項式, 各係數均為 p 的倍數.

最後, 我們考慮第一點. 由 (1), 有 $\epsilon_n := -ne^{n-\xi_n} f(\xi_n)$, 其中 ξ_n 是介於 0 和 n 之間的某數. 以一種較粗略的估計來看, 對於每個 $n = 1, \ldots, N$ (故 $0 \leq \xi_n \leq n \leq N$),

$$\begin{aligned}|\epsilon_n| :=& ne^{n-\xi_n} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \xi_n^{p-1} |1-\xi_n|^p |2-\xi_n|^p \cdots |N-\xi_n|^p \\ \leq& Ne^N \cdot \frac{1}{(p-1)!} N^{p-1} \underbrace{N^p \cdots N^p}_{N \text{ 項}} \\ =& \frac{e^N (N^{N+1})^p}{(p-1)!} \to 0 \quad (p \to +\infty),\end{aligned}$$

其中, 我們用到了極限的一個基本結論——階乘函數「成長」得比指數函數還要快得多. 於是, 每個 ϵ_n 可以任意小, 故可取充分大的 p 使得

$$\left|\sum_{n=1}^{N} c_n\epsilon_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |c_n||\epsilon_n| < 1,$$

即 (2) 左式的絕對值小於 1, 而我們先前已經在前兩步就證出右式是整數, 從而強制該和為 0. 因此, 斷言得證. □