一致收斂性

仙女國公主

最後編輯: 2026 年 1 月 5 日

先備知識 基本微積分、度量空間, 還有函數序列、函數項級數、函數族、含參變數反常積分的定義及收斂性 (點態收斂性). 本文預設讀者對這些有初步的認識, 並直接從一致收斂的概念切入.

約定 除非特別聲明, 否則本文約定:

(1) X, Y, T 都是度量空間, T 作爲含參變數函數族 $\{f_t(x)\}$ 的參數空間, 並且用 $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ 表示各個度量空間的距離函數, $B'_\delta(t_0) = \{t \in T \mid 0 < \mathrm{d}(t, t_0) < \delta\}$ 表示 t_0 的 δ 去心鄰域;

(2) V 爲體 $\mathbb{F}$ 上某線性賦範空間的子集, W 爲 $\mathbb{F}$ 上的線性賦範空間, $\|\cdot\|$ 表示各個線性賦範空間的範數, 只有實數空間使用絕對值 $|\cdot|$, 別忘了線性賦範空間可以誘導出度量空間;

(3) 關於含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 如果我們設定 $f(x,y)$ 在 $[c,\omega)$ 上有定義, 那麼自動要求 f 在任意閉子區間 $[c', d'] \subset [c,\omega)$ 上對 y 可積.

先備知識 文中的所有在度量空間上的討論一般上都可推廣至一般的拓樸空間, 有興趣的讀者請參考 [2].

1 一致收斂的概念

定義 1.1 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 X 至 Y 的含參變數函數族, f 爲自 X 至 Y 的某函數, t_0 是 T 的聚點. 若對所有 $\varepsilon > 0$, 皆可找到 t_0 的某個去心鄰域[1] $B'_\delta(t_0)$, 對一切 $x \in X$, 當 $t \in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\mathrm{d}(f_t(x), f(x)) < \varepsilon,$$

則稱參變函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上當 $t \to t_0$ 時**一致收斂**於 $f(x)$, 記作 $f_t(x) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x \in X)$.

特別地, 當 $T = \mathbb{N}$ 時, $+\infty$ 是 T 唯一的聚點, 此時記 $t = n$, $\{f_t(x)\}_{t\in T} = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲函數序列, 並且 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收斂於 $f(x)$ 可簡記作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in X)$.

定義 1.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 爲自 V 至 W 的函數項級數. 若存在 V 上的函數 $S(x)$, 使得 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的部分和序列 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 在 V 上一致收斂於 $S(x)$, 則稱 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上一致收斂於 $S(x)$. 也就是說: 若對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n \geq N$ 時, 對一切 $x \in V$, 有

$$\|S_n(x) - S(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right\| < \varepsilon,$$

則稱函數項級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上**一致收斂** (於 $S(x)$).

[1] $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}$ 的無窮遠點 ∞ 作爲函數的奇點亦可討論, 其去心鄰域爲 $\{x \mid \|x\| > R\}$, $R > 0$ 是某正數. 特別地, 也可以討論 $\mathbb{R}$ 的無窮遠點 $+\infty$ 及 $-\infty$.

定義 1.3 設函數 $f(x,y)$ 在集合 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 ω 是奇點 (無窮遠點 $+\infty$ 或某有限瑕點). 若對所有 $\varepsilon>0$, 皆可找到 ω 的去心鄰域 $B'_R(\omega)$, 使得對一切 $x\in E$, 當 $t\in[c,\omega)\cap B'_R(\omega)$ 時, 有

$$\left|\int_t^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon, \tag{1}$$

則稱含參變數反常積分

$$\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 E 上**一致收斂**.

註記 1.4 除非特別聲明, 本文的 ω 一律表示函數的奇點 (無窮遠點 $+\infty$ 或某有限瑕點).

註記 1.5 實際上, 式 (1) 可以寫成

$$\left|\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

因此, 與函數項級數類似地, 如果記

$$g(x)=\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad F_t(x)=\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

那麼可將含參變數反常積分的一致收斂性的含義視為:

$$\text{當}\,t\in[c,\omega)\,\text{且}\,t\to\omega\,\text{時, 在}\,E\,\text{上, 有}\,F_t(x)\rightrightarrows g(x),$$

即含參變數反常積分是一種特殊的含參變數函數族, 就像函數項級數是一種函數序列 (部分和序列).

注意 1.6 對於定義在 $E\times(\omega,d]$ 上的函數 $f(x,y)$, ω 為函數的奇點 (無窮遠點 $-\infty$ 或某有限瑕點), 欲處理函數奇點在下界的含參變數反常積分

$$\int_\omega^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

可以透過變數變換將其轉換為形如 (1) 的反常積分. 因此, 本文只討論積分上限為函數奇點的情形, 其結論亦適用於奇點在積分下限.

註記 1.7 不難看出: 一致收斂 $\implies$ 點態收斂.

例 1.8 討論函數序列 $f_n(x)=x^n$ $(n=1,2,\ldots)$ 在

(1) $(-r,r)$ $(0<r<1)$ 內的一致收斂性;

(2) $(-1,1)$ 內的一致收斂性.

解 對所有 $x\in(-1,1)$, $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.

(1) 對任何 $\varepsilon>0$, 由 $\lim_{n\to+\infty}r^n$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 當 $n>N$ 時, 有 $|r^n|<\varepsilon$. 因此當 $n>N$ 時, 對所有 $x\in(-r,r)$, 均有

$$|x^n-0|\le|r^n|<\varepsilon.$$

依一致收斂的定義, 有 $x^n\rightrightarrows 0$ $(x\in(-r,r))$.

(2) 取 $\varepsilon = 1/2$, 對任意 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n' = N+1 > N$, 對該固定的 n', 由於 $\lim_{x\to 1} x^{n'} = 1$, 因此存在 $0 < x' < 1$, 使得

$$\left|(x')^{n'} - 0\right| = (x')^{n'} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

也就是說, $\{x^n\}$ 在 $(-1,1)$ 內不一致收斂於 0.

例 1.9 討論函數項級數

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x}{(1+(n+1)^2x)(1+n^2x)}$$

在

(1) $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上的一致收斂性;

(2) $(0,+\infty)$ 上的一致收斂性.

解 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in (0,+\infty)$, 記

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)x}{(1+(n+1)^2x)(1+n^2x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)^2x},$$

那麼

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1+x},$$

即

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)x}{(1+(n+1)^2x)(1+n^2x)}, \quad x \in (0,+\infty).$$

(1) 當 $x \in [a,+\infty)$ 時, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{1+(n+1)^2x} \le \frac{1}{1+(n+1)^2a},$$

而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2a} = 0,$$

故對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n \ge N$ 時, 有

$$0 < \frac{1}{1+(n+1)^2a} < \varepsilon,$$

從而當 $n \ge N$ 時, 對所有 $x \in [a,+\infty)$, 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

即該函數項級數在 $[a,+\infty)$ 上一致收斂.

(2) 當 $x \in (0,+\infty)$ 時, 取 $\varepsilon = 1/2$, 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 取 $n = N+1 > N$ 及 $x = 1/(N+1)^2$, 那麼

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{1+(N+1)^2 \cdot \frac{1}{(N+1)^2}} = \frac{1}{2},$$

因此該函數項級數在 $(0,+\infty)$ 上不一致收斂.

例 1.10　設 $\{f_t(x)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $x \in [0,1]$, 其中 $f_t(x) = tx$. 問: 當 $t \to 0$ 時, $\{f_t(x)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 在 $[0,1]$ 上是否一致收斂?

解　因爲對所有 $x \in [0,1]$,

$$\lim_{t\to 0} f_t(x) = \lim_{t\to 0} tx = 0,$$

所以 $f_t(x)$ 當 $t \to 0$ 時的極限函數爲 0 $(x \in [0,1])$.

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 對一切 $x \in [0,1]$, 當 $|t - 0| < \delta$ 時, 有

$$|f_t(x) - 0| = |tx| \le 1 \cdot |t| < \varepsilon.$$

因此, $f_t(x) \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} 0$ $(x \in [0,1])$.

例 1.11　設 $\{f_t(x)\}_{t>0}$, $x \in (0,1)$, 其中 $f_t(x) = x^t$. 問: 當 $t \to 0^+$ 時, $f_t(x)$ 在 $(0,1)$ 上是否一致收斂?

解　對所有 $x \in (0,1)$,

$$\lim_{t\to 0^+} x^t = \exp\left(\lim_{t\to 0^+} t \ln x\right) = \mathrm{e}^0 = 1,$$

即 $f_t(x)$ 當 $t \to 0^+$ 時的極限函數爲 1 $(x \in (0,1))$.

取 $\varepsilon = 1/4$, 對所有 $\delta > 0$, 取 $t = \delta/2 > 0$, 及

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\delta}} \in (0,1),$$

則 $0 < t < \delta$, 但

$$|f_t(x) - 1| = \left|x^t - 1\right| = \left|\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^t - 1\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

即函數族 $\{f_t(x)\}_{t>0}$ 在 $x \in (0,1)$ 上當 $t \to 0^+$ 時不一致收斂.

例 1.12　證明含參變數無窮積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y$$

滿足:

(1) 在 $[\alpha, +\infty)$ $(\alpha > 0)$ 上一致收斂;

(2) 在 $(0, +\infty)$ 內不一致收斂.

證明　注意到 $y = 0$ 不是瑕點.

(1) 對任意 $x \ge \alpha > 0$ 及 $t > 0$, 令 $u = xy$, 觀察:

$$\begin{aligned}\int_t^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_{tx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{tx}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(-\cos u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\left.\frac{\cos u}{u}\right|_{tx}^{+\infty} - \int_{tx}^{+\infty} -\cos u\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{\cos tx}{tx} + \int_{tx}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

取絕對值並使用三角不等式,

$$\left|\int_t^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{|\cos tx|}{tx} + \left|\int_{xr}^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \frac{1}{tx} + \int_{tx}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{tx} + \frac{1}{tx} = \frac{2}{tx} \le \frac{2}{t\alpha}.$$

對任意 $\varepsilon > 0$, 取 $R = \frac{2}{\alpha\varepsilon} > 0$, 則當 $t > R$ 時, 對一切 $x \ge \alpha$, 有

$$\left|\int_t^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{2}{t\alpha} < \frac{2}{R\alpha} = \varepsilon.$$

因此, 該含參變數無窮積分在 $[\alpha, +\infty)$ 上一致收斂.

(2) 對任意 $x > 0$ 及 $t > 0$, 令 $u = xy$, 則

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{tx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

注意到狄利克雷積分[2]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2},$$

故有

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2},$$

那麼存在 $\delta > 0$, 對所有 $r \in (0, \delta)$, 有

$$\left|\int_r^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4}, \quad 從而 \quad \int_r^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

現, 取 $\varepsilon = \pi/4$, 對任意 $R > 0$, 取 $x = \delta/2R \in (0, +\infty)$ 及 $t = R \ge R$, 則

$$\left|\int_t^{+\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_{\frac{1}{2}\delta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \ge \int_{\frac{1}{2}\delta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u > \frac{\pi}{4} = \varepsilon.$$

因此, 該含參變數無窮積分在 $(0, +\infty)$ 上不一致收斂.

□

例 1.13 證明含參變數瑕積分

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{xy}}{y^{1/4} + x}\,\mathrm{d}y$$

在 $[0, 1]$ 上一致收斂.

證明 對任意 $x \in [0, 1]$ 及 $y \in (0, 1]$,

$$\left|\frac{\sin\sqrt{xy}}{y^{1/4} + x}\right| = \frac{\left|\sin\sqrt{xy}\right|}{y^{1/4} + x} \le \frac{1}{y^{1/4} + x} \le \frac{1}{y^{1/4}}.$$

[2]證明: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \sin u \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-uv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-uv} \sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin u\}(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

因此, 對任意 $t \in (0,1]$ 及 $x \in [0,1]$, 有

$$\left|\int_0^t \frac{\sin\sqrt{xy}}{y^{1/4}+x}\,\mathrm{d}y\right| \le \int_0^t \frac{\mathrm{d}y}{y^{1/4}} = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}.$$

現, 對任意 $\varepsilon > 0$, 取

$$\delta = \left(\frac{3}{4}\varepsilon\right)^{\frac{4}{3}},$$

則當 $t \in B'_\delta(0) \cap [0,1] = (0,\delta) \cap [0,1]$ 時, 對一切 $x \in [0,1]$, 有

$$\left|\int_0^t \frac{\sin\sqrt{xy}}{y^{1/4}+x}\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}} < \frac{4}{3}\delta^{\frac{3}{4}} = \varepsilon,$$

故得證. □

註記 1.14 從定義可以看出:

(1) 當函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上一致收斂時, 若 $X_0 \subset X$, 則 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X_0 上亦一致收斂.

(2) 若 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在度量空間 X_1 及 X_2 上一致收斂, 則 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 $X_1 \cup X_2$ 上也一致收斂.

(3) 若函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 及 $\{g_t(x)\}_{t\in T}$ 在 V 上均一致收斂, 則對所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f_t(x) + \beta g_t(x)$ 在 V 上也一致收斂.

定義 1.15 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 X 至 Y 的函數族. 若存在 $M > 0$ 及一點 $t_0 \in T$, 使得對所有 $t \in T$ 和 $x \in X$, 有 $f_t(x) \in B_M(t_0)$, 則稱 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上**一致有界**.

註記 1.16 若函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 及 $\{g_t(x)\}_{t\in T}$ 在 $X \subseteq \mathbb{R}$ 上都一致收斂, 且都是一致有界的, 則 $\{f_t(x) \cdot g_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上一致收斂.

例 1.17 設 $f_n(x) = (1-x)x^n$, $g_n(x) = 1/(1-x)$, $(x \in (0,1), n = 1,2,\ldots)$, 則 $\{f_n(x)\}$ 及 $\{g_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 內都一致收斂, 但 $f_n(x) \cdot g_n(x) = x^n$, $\{f_n(x) \cdot g_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 內不一致收斂.

命題 1.18 若函數序列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 上一致收斂, 且對每個 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 X 上有界, 則 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 上一致有界.

證明 設 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in X)$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n \ge N$ 時, 對一切 $x \in X$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \qquad \text{即}\, |f_n(x)| < 1 + |f(x)|.$$

特別地, 由 f_N 在 X 上有界, 得存在 $M_0 > 0$, 對一切 $x \in X$, 有 $|f_N(x)| \le M$. 另一方面, 對一切 $x \in X$, 有

$$|f_N(x) - f(x)| < 1 \implies |f(x)| < 1 + |f_N(x)| \le 1 + M_0.$$

又 $f_1, \ldots, f_{N-1}$ 在 $x \in X$ 上有界, 於是對每個 $k = 1, \ldots, N-1$, 存在 $M_k > 0$, 對一切 $x \in X$, 都有 $|f_k(x)| \le M_k$. 取

$$M = \max\{M_0, M_1, \ldots, M_{N-1}\},$$

則對一切 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in X$, 有

$$|f_n(x)| \le M,$$

即 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 上一致有界. □

2 一致收斂的判定準則

定理 2.1 (含參變數函數族一致收斂的柯西準則) 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 X 至完備空間 Y 的函數族, t_0 是 T 的聚點[3], 則 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上當 $t\to t_0$ 時一致收斂的充要條件爲: 對所有 $\varepsilon>0$, 皆可找到 t_0 的去心鄰域 $B'_\delta(t_0)$, 對一切 $x\in X$, 當 $t',t''\in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\mathrm{d}\left(f(x,t'),f(x,t'')\right)<\varepsilon,$$

即函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 有**一致柯西性**.

證明 必要性: 設 $f_t(x) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x\in X)$, 則對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 對一切 $x\in A$, 當 $t\in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\mathrm{d}\left(f_t(x,y),f(x)\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 對一切 $x\in X$, 當 $t',t''\in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\mathrm{d}\left(f_{t'}(x),f_{t''}(x)\right)\le \mathrm{d}\left(f_{t'}(x),f(x)\right)+\mathrm{d}\left(f_{t''}(x),f(x)\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性: 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 滿足: 對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 對一切 $x\in X$, 當 $t,t'\in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\mathrm{d}\left(f_t(x),f_{t'}(x)\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

特別地, 上式對每個固定點 $x\in X$ 也成立, 從而依 Y 的完備性可知, 點集 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 當 $t\to t_0$ 時收斂, 設其極限爲 $f(x)$. 又根據距離函數 $\mathrm{d}(y,\cdot)$ (y 爲固定點) 的連續性, 對一切 $x\in X$ 及 $t\in B'_\delta(y_0)$, 有

$$\mathrm{d}\left(f_t(x),f(x)\right)=\mathrm{d}\left(\lim_{t'\to t_0}f_t(x),\lim_{t'\to t_0}f_{t'}(x)\right)=\lim_{t'\to t_0}\mathrm{d}\left(f_t(x),f_{t'}(x)\right)\le\lim_{t'\to t_0}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

因此, $f_t(x) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x\in X)$. □

系理 2.2 (函數序列一致收斂的柯西準則) 設 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲自 X 至完備空間 Y 的函數序列, 則 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收斂的充要條件爲: 對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 當 $n,m\ge N$ 時 (即 $n,m\in B'_N(+\infty)$), 對一切 $x\in X$, 有

$$\mathrm{d}(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon.$$

證明 此即爲定理 2.1 當 $T=\mathbb{N}$ 且 $t_0=+\infty$ 時的特例. □

定理 2.3 (函數項級數一致收斂的柯西準則) 設 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 爲自 V 至完備空間 W 的函數項級數, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 V 上一致收斂的充要條件爲: 對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 當 $n>m\ge N$ 時, 對一切 $x\in V$, 有

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n}u_k(x)\right\|<\varepsilon.$$

[3] t_0 也可以是 $\mathbb{R}^m$ 中的無窮遠點.

證明 設 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ $(x \in V)$ 爲部分和.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_k(x)\text{一致收斂} &\iff \text{部分和序列} \left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}\text{一致收斂}\\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in V \left[n > m \geq N \implies \left\|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x)\right\| < \varepsilon\right]\\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in V \left[n > m \geq N \implies \left\|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right\| < \varepsilon\right],\end{aligned}$$

其中, 第二個等價號用到了系理 2.2. □

系理 2.4 設 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 爲自 V 至 W 的函數項級數, 並且它在 V 上一致收斂, 則 $u_n(x) \rightrightarrows 0$ $(x \in V)$.

證明 因爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上一致收斂, 所以依定理 2.3, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $m > n \geq N$ 時, 對一切 $x \in V$, 有

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right\| < \varepsilon.$$

取 $m = n + 1$, 則對所有 $n \geq N$ 及一切 $x \in V$, 有

$$\|u_{n+1}(x)\| < \varepsilon,$$

因此, $u_n(x) \rightrightarrows 0$ $(x \in V)$. □

定理 2.5 (含參變數反常積分一致收斂的柯西準則) 設函數 $f(x, y)$ 在 $E \times [c, \omega)$ 上有定義, 其中 $E \subset \mathbb{R}$ 是一個區間, 則含參變數反常積分 $\int_c^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂的充要條件爲: 對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 ω 的去心鄰域 $B'_R(\omega)$, 當 $t', t'' \in [c, \omega) \cap B'_R(\omega)$ 時, 對一切 $x \in E$, 有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

證明 必要性: 設 $\int_c^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂, 則對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 當 $t \in B'_R(\omega) \cap [c, \omega)$ 時, 對一切 $x \in E$, 有

$$\left|\int_{t}^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

從而當 $t', t'' \in B'_R(\omega) \cap [c, \omega)$ 時, 有

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \left|\int_{t'}^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{t''}^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性: 設對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 當 $t, t' \in B'_R(\omega) \cap [c, +\infty)$ 時, 對一切 $x \in E$, 有

$$\left|\int_{t}^{t'} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

這表示 $\int_c^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 在每點 $x \in E$ 滿足柯西準則, 從而它點態收斂. 依絕對值函數的連續性, 當 $t \in B'_R(\omega)$ 時, 對一切 $x \in E$, 都有

$$\left|\int_{t}^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| = \left|\lim_{t' \to \omega} \int_{t}^{t'} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| = \lim_{t' \to \omega} \left|\int_{t}^{t'} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \lim_{t' \to \omega} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

因此, $\int_c^{\omega} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂. □

註記 2.6 定理 2.5 也可參考定理 2.3 的證明手法、使用定理 2.1 來證明.

定理 2.7 設函數 $f(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 $E\subset\mathbb{R}$ 是一個區間, 則含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂的充要條件爲: 對所有滿足條件

$$c<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots<\omega \quad 且 \quad \lim_{n\to+\infty} t_n=\omega$$

的數列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 函數序列 $F_n(x)=\int_c^{t_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ $(n\in\mathbb{N})$ 的序列在 E 上一致收斂.

證明 必要性: 設 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂, 則對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $R>0$, 當 $t,t'\in B_R'(\omega)\cap[c,\omega)$ 時, 對一切 $x\in E$, 有

$$\left|\int_t^{t'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

設 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲單調趨於 ω 的數列, 且 $t_1\geq c$, 則存在 $N\in\mathbb{N}$, 當 $n\geq N$ 時, 有 $R<t_n<\omega$, 從而當 $n,n'\geq N$ 時, 對一切 $x\in E$, 有

$$|F_n(x)-F_{n'}(x)|=\left|\int_{t_n}^{t_{n'}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

依函數序列一致收斂的柯西準則 (定理 2.2) 可知 $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 E 上一致收斂.

充分性: 假設 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上不一致收斂, 那麼存在 $\varepsilon>0$, 對所有 $R>0$, 存在 $t,t'\in B_R'(\omega)$ 及 $x'\in E$ 使得

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x',y)\,\mathrm{d}y\right|\geq\varepsilon.$$

取任意 $R_1>0$, 則存在 $t_1,t_1'\in B_{R_1}'(\omega)$ [4], $t_1'>t_1\geq R_1$ 及 $x_1\in E$ 使得

$$\left|\int_{t_1}^{t_1'} f(x_1,y)\,\mathrm{d}y\right|\geq\varepsilon.$$

取 $R_2=t_1'$, 那麼存在 $t_2,t_2'\in B_{R_2}'(\omega)$, $t_2'>t_2\geq t_1'$ 及 $x_2\in E$ 使得

$$\left|\int_{t_2}^{t_2'} f(x_2,y)\,\mathrm{d}y\right|\geq\varepsilon.$$

重複上述過程, 得遞增數列 $\{t_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ 滿足 $t_n'\to\omega$, 並且對於每個 n, 都有 $x_n\in E$ 使得對於某些 k_n,l_n, 有

$$\left|F_{k_n}(x_n)-F_{l_n(x)}\right|\geq\varepsilon.$$

數列 $\{t_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 E 上不一致收斂, 與條件矛盾, 故假設不成立. $\square$

例 2.8 設 Y 完備, $A\subseteq X$. 若

(1) 函數 $f_n:A\to Y$ $(n\in\mathbb{N})$ 在 A 上連續;

(2) $\{f_n(x)\}$ 在 A 的開核 $\mathring{A}$ 內一致收斂;

[4] 別忘了本文約定 $B_{R_1}'(\omega)$ 是 T 的子集, 是相對拓樸的概念, 故不特別寫出「$\cap T$」.

(3) $\overline{\mathring{A}} = A$ (即對所有 $a \in A$, 存在 $\{x_k\} \subset \mathring{A}$ 使得 $x_k \to a$),

證明 $\{f_n(x)\}$ 在 A 上一致收斂.

證明 由於 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathring{A}$ 內一致收斂, 依柯西準則 (定理 2.2), 對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n, m \geq N$ 時, 對一切 $x \in \mathring{A}$, 有

$$\mathrm{d}(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

現, 任取一點 $a \in A$, 存在 $\{x_k\} \subset \mathring{A}$ 使 $x_k \to a$. 對固定的 $n, m \geq N$, 因爲 f_n, f_m 在 A 上 (尤其在 a 處) 連續, 所以

$$\mathrm{d}(f_n(a), f_m(a)) = \lim_{k \to +\infty} \mathrm{d}(f_n(x_k), f_m(x_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

這表示當 $n, m \geq N$ 時, 對一切 $x \in A$, 有

$$\mathrm{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

再依柯西準則知 $\{f_n(x)\}$ 在 A 上一致收斂. □

例 2.9 設 W 完備, $A \subseteq V$. 若

(1) 函數 $u_n : A \to W$ $(n \in \mathbb{N})$ 在 A 上連續;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 A 的開核 $\mathring{A}$ 內一致收斂;

(3) $\overline{\mathring{A}} = A$ (即 $\mathring{A}$ 稠密於 A),

證明 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 A 上一致收斂.

證明 參考例 2.8 的證明即可證出. □

例 2.10 證明含參變數反常積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy} \sin y}{y} \, \mathrm{d}y$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收斂.

證明 注意到 $y = 0$ 不是被積函數的瑕點. 設 $t'' > t' > 0$, 依積分第二均值定理, 存在 $\eta \in (t', t'')$,

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\mathrm{e}^{-xy} \sin y}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \int_{t'}^{\eta} \sin y \, \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{e}^{-t''x}}{t''} \int_{\eta}^{t''} \sin y \, \mathrm{d}y.$$

注意到 e^{-at}/t $(a > 0)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上是減函數, 故對於 $t'' > t'$, 有 $\mathrm{e}^{-t''x}/t'' < \mathrm{e}^{-t'x}/t'$, 故有

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\mathrm{e}^{-xy} \sin y}{y} \, \mathrm{d}y \right| &\leq \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \left| \int_{t'}^{\eta} \sin y \, \mathrm{d}y \right| + \frac{\mathrm{e}^{-t''x}}{t''} \left| \int_{\eta}^{t''} \sin y \, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \left| \int_{t'}^{\eta} \sin y \, \mathrm{d}y \right| + \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \left| \int_{\eta}^{t''} \sin y \, \mathrm{d}y \right| \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \left(\left| \int_{t'}^{\eta} \sin y \, \mathrm{d}y \right| + \left| \int_{\eta}^{t''} \sin y \, \mathrm{d}y \right| \right) \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \cdot (2 + 2) = \frac{4\mathrm{e}^{-t'x}}{t'} \leq \frac{4}{t'}.
\end{aligned}$$

現, 對所有 ε, 取 $R=\varepsilon/4$, 則當 $t''>t'\geq R$ 時, 對一切 $x\geq 0$, 有

$$\left|\int_{t'}^{t''}\frac{\mathrm{e}^{-xy}\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\right|\leq\frac{4}{t'}<\frac{4}{R}=\varepsilon.$$

依柯西準則 (定理 2.5), 可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. □

準則 2.11 (含參變數函數族之最值判別法) 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 X 至 Y 的函數族, 則 $f_t(x)\underset{t\to t_0}{\rightrightarrows}f(x)$ $(x\in X)$ 的充要條件爲

$$\lim_{t\to t_0}\sup_{x\in X}\mathrm{d}\left(f_t(x),f(x)\right)=0.$$

證明 必要性: 設 $f_t(x)\underset{t\to t_0}{\rightrightarrows}f(x)$ $(x\in X)$, 則對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 當 $t\in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x\in X$, 有 $|f_t(x)-f(x)|<\varepsilon/2$. 因此, 有

$$0\leq\sup_{x\in X}\mathrm{d}\left(f_t(x),f(x)\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

故得結論.

充分性: 因爲對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 當 $t\in B'_\delta(t_0)$ 時, 有

$$\sup_{x\to X}\mathrm{d}\left(f_t(x),f(x)\right)<\varepsilon,$$

所以當 $t\in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x\in X$, 有

$$\mathrm{d}(f_t(x),f(x))\leq\sup_{x\in X}\mathrm{d}\left(f_t(x),f(x)\right)<\varepsilon,$$

故得結論. □

準則 2.12 (函數項級數之魏爾斯特拉斯判別法) 設 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 爲自 V 至 W 的函數項級數. 若存在正數序列 $\{M_n\}$, 使得對每個 $n\in\mathbb{N}$, 對一切 $x\in I$, 均有

$$\|u_n(x)\|\leq M_n,$$

並且 $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ 收斂, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 V 上一致收斂.

證明 由於 $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ 收斂, 依數項級數收斂的柯西準則, 對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 當 $n>m\geq N$ 時, 有

$$\sum_{k=m+1}^{n}M_k<\varepsilon,$$

從而對一切 $x\in V$, 有

$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n}u_k(x)\right\|\leq\sum_{k=m+1}^{n}\|u_k(x)\|\leq\sum_{k=m+1}^{n}M_k<\varepsilon,$$

再依函數項級數一致收斂的柯西準則 (定理 2.3), 可知 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 V 上一致收斂. □

準則 2.13 (函數項級數之狄利克雷判別法) 設 $u_n(x), v_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ 爲自 $A \subseteq \mathbb{R}$ 至 $\mathbb{R}$ 的函數序列, 它們滿足:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的部分和序列在 A 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 對一切 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M;$$

(2) 對每個 $x \in A$, $\{v_n(x)\}$ 關於 n 是單調的, 且 $v_n(x) \rightrightarrows 0$ $(x \in A)$,

則 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 A 上一致收斂.

證明 由 (1), 當 $n > m \geq 1$ 時, 對一切 $x \in A$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| = |S_n(x) - S_m(x)| \leq |S_n(x)| + |S_m(x)| \leq 2M.$$

由 $v_n(x) \rightrightarrows 0$ $(x \in A)$, 對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n \geq N$ 時, 對一切 $x \in A$, 有

$$|v_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

因爲對每個 $x \in A$, $\{v_n(x)\}$ 關於 n 是單調數列, 所以利用分部求和法 (阿貝爾變換), 當 $n > m \geq N$ 時, 對一切 $x \in A$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)v_k(x)\right| \leq M\left(|v_{m+1}(x)| + 2|v_n(x)|\right) < \varepsilon.$$

依柯西準則 (定理 2.3), 可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 A 上一致收斂. □

準則 2.14 (函數項級數之阿貝爾判別法) 設 $u_n(x), v_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ 爲自 $A \subseteq \mathbb{R}$ 至 $\mathbb{R}$ 的函數序列, 它們滿足:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 A 上一致收斂;

(2) 對每個 $x \in A$, $\{v_n(x)\}$ 關於 n 是單調的, 且 $\{v_n(x)\}$ 在 A 上一致有界,

則 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 A 上一致收斂.

證明 由 (2), 存在 $M > 0$, 對一切 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|v_n(x)| \leq M.$$

由 (1) 和柯西準則 (定理 2.3), 對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 當 $n > m \geq N$ 時, 對一切 $x \in A$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

由於 $\{v_n(x)\}$ 關於 n 是單調的, 利用分部求和法, 對任何 $n > m \geq N$ 及一切 $x \in A$, 有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)v_k(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{m+1}(x)| + 2|v_n(x)|\right) < \varepsilon.$$

依柯西準則 (定理 2.3), 可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 A 上一致收斂. □

準則 2.15 (含參變數反常積分之魏爾斯特拉斯判別法) 設函數 $f(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是一個區間. 若存在函數 $g(y)$ $(y\in[c,\omega))$, 使得對所有 $x\in E$ 及 $y\in[c,\omega)$, 有 $|f(x,y)|\le g(y)$ 且 $\int_c^\omega g(y)\,\mathrm{d}y$ 收斂, 則 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂.

證明 對所有 $\varepsilon>0$, 因爲 $\int_c^\omega$ 收斂, 所以存在 $R>0$, 當 $t,t'\in B_R'(\omega)\cap[c,\omega)$ 時, 有

$$\left|\int_t^{t'} g(y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

不妨設 $t'>t$, 從而對一切 $x\in E$, 有

$$\left|\int_t^{t'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\le\int_t^{t'}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\le\int_t^{t'} g(y)\,\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

依柯西準則 (定理 2.5), 可知 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂. □

準則 2.16 (含參變數反常積分之狄利克雷判別法) 設函數 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是一個區間. 若 f,g 滿足:

(1) 存在 $M>0$, 對一切 $t\in(c,\omega)$ 及 $x\in E$, 均有

$$\left|\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\le M;$$

(2) 對任意固定的 $x\in E$, $g(x,y)$ 是 y 的單調函數, 且對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $t\in(c,\omega)$, 當 $y\in(t,\omega)$ 時, 對一切 $x\in E$, 有 $|g(x,y)|<\varepsilon$,, 即 $g(x,y)\underset{y\to\omega}{\rightrightarrows}0$ $(x\in E)$,

則含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂.

證明 對於 $\omega>t'>t>c$, 依定積分第二均值定理, 存在 $\eta\in(t,t')$ 使得

$$\int_t^{t'} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y=g(x,t)\int_t^\eta f(x,y)\,\mathrm{d}y+g(x,t')\int_\eta^{t'} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

由 (2) 可知, 對所有 $\varepsilon>0$, 存在 $t_0\in(c,\omega)$, 當 $y\in(t_0,\omega)$ 時, 對一切 $x\in E$, 有 $|g(x,y)|<\varepsilon/4M$. 因此當 $\omega>t'>t>c$ 時, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_t^{t'} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y\right|&<\frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_c^\eta f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|+\frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_c^{t'} f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^\eta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\\&\le\frac{\varepsilon}{4M}(2M+2M)=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, 含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂. □

準則 2.17 (含參變數反常積分之阿貝爾判別法) 設函數 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是一個區間. 若 f,g 滿足:

(1) $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂;

(2) 對任意固定的 $x \in E$, $g(x, y)$ 是 y 的單調函數, 並且存在常數 $M > 0$, 對一切 $x \in E$ 及 $y \in [c, \omega)$, 有 $|g(x, y)| \leq M$,

則含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x, y) g(x, y) \,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂.

證明 對於 $\omega > t' > t > c$, 依定積分第二均值定理, 存在 $\eta \in (t, t')$ 使得

$$\int_t^{t'} f(x, y) g(x, y) \,\mathrm{d}y = g(x, t) \int_t^\eta f(x, y) \,\mathrm{d}y + g(x, t') \int_\eta^{t'} f(x, y) \,\mathrm{d}y.$$

由 $\int_c^\omega f(x, y) \,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂, 對所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 \in (c, \omega)$, 當 $t' > t > t_0$ 時, 對一切 $x \in E$, 有

$$\left| \int_t^{t'} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

從而

$$\left| \int_t^{t'} f(x, y) g(x, y) \,\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \big(|g(x, t)| + |g(x, t')| \big) \leq \varepsilon.$$

因此, 含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x, y) g(x, y) \,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂. $\square$

例 2.18 證明含參變數函數族

$$f_t(x) = \frac{1}{t^2} \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{x}} - 1 \right) \sin \frac{t}{x} \quad (t \in (0, 1])$$

在 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上當 $t \to 0^+$ 時一致收斂.

證明 對每個 $x \in [a, +\infty)$, 有

$$\lim_{t \to 0^+} f_t(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t/x)}{t/x} \cdot \frac{\mathrm{e}^{t/x} - 1}{t/x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

當 $x \in [a, +\infty)$ 且 t 很小時, 於 0 和 t/x 之間存在兩點 ξ, η, 滿足

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{t^2} \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{x}} - 1 \right) \sin \frac{t}{x} - \frac{1}{x^2} \right| &= \frac{1}{t^2} \left| \left(\mathrm{e}^{\frac{t}{x}} - 1 \right) \sin \frac{t}{x} - \frac{t^2}{x^2} \right| \\
&= \frac{1}{t^2} \left| \left(\frac{t}{x} + \frac{\mathrm{e}^\xi t^2}{2x^2} \right) \left(\frac{t}{x} - \frac{\sin \eta \cdot t^2}{2x^2} \right) - \frac{t^2}{x^2} \right| \\
&= \frac{1}{t^2} \left| \frac{t^2}{x^2} + \frac{\left(\mathrm{e}^\xi - \sin \eta \right) t^3}{2x^3} - \frac{\mathrm{e}^\xi \cdot \sin \eta \cdot t^4}{4x^4} - \frac{t^2}{x^2} \right| \\
&= \left| \frac{\left(\mathrm{e}^\xi - \sin \eta \right) t}{2x^3} - \frac{\mathrm{e}^\xi \cdot \sin \eta \cdot t^2}{4x^4} \right| \\
&\leq \left| \frac{\mathrm{e}^\xi t}{2x^3} \right| + \left| \frac{\sin \eta \cdot t}{2x^3} \right| + \left| \frac{\mathrm{e}^\xi \cdot \sin \eta \cdot t^2}{4x^4} \right| \\
&\leq \left| \frac{e^{1/a} t}{2x^3} \right| + \left| \frac{t}{2x^3} \right| + \left| \frac{e^{1/a} t^2}{4x^4} \right|.
\end{aligned}$$

因此, 我們有

$$\sup_{x\geq a}\left|\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{x}}-1\right)\sin\frac{t}{x}-\frac{1}{x^2}\right|\leq\left|\frac{e^{1/a}t}{2a^3}\right|+\left|\frac{t}{2a^3}\right|+\left|\frac{e^{1/a}t^2}{4a^4}\right|\to 0\quad(t\to 0^+),$$

即

$$\lim_{t\to 0^+}\sup_{x\geq a}\left|\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{x}}-1\right)\sin\frac{t}{x}-\frac{1}{x^2}\right|=0.$$

因此, $f_t(x)\underset{t\to 0^+}{\rightrightarrows}1/x^2$ $(x\in[a,+\infty))$. □

例 2.19 討論函數序列

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

在 $\mathbb{R}$ 上的一致收斂性.

解 對一切 $x\in\mathbb{R}$, 顯然 $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. 對每個固定的 n, 由於 $f_n(x)$ 是奇函數且 $f_n(x)\geq 0$ $(x\geq 0)$, 因此只需要計算 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的上確界. 解

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0$$

得 $x=\pm 1/n$. 不難看出 $f(0)=0$ 及 $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$, 故 f_n 在 $1/n$ 取得最大值 $1/2n$. 由於

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

因此, $f_n(x)\rightrightarrows 0$ $(x\in\mathbb{R})$.

例 2.20 證明函數項級數

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收斂.

證明 對所有 $m\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\leq\frac{1}{2^n},$$

而且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1$ 收斂. 根據魏爾斯特拉斯判別法 (準則 2.12), 可知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收斂. □

例 2.21 證明函數項級數

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+x)}$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂.

證明 (證一: 狄利克雷判別法) 設 $u_n(x)=(-1)^n/n$, $v_n(x)=1/(n+x)$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,+\infty)$. 注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的部分和

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\to-\ln 2\quad(n\to+\infty)$$

收斂, 依極限的保序性可知部分和序列 $\{U_n(x)\}$ 有界. 又該邊界不依賴於 x, 因此 $\{U_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 當然一致有界. 另一方面, 對一切 $x\in[0,+\infty)$, $v_n(x)=1/(n+x)$ 關於 n 是單調遞減的, 並且

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}|v_n(x)-0|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}\left|\frac{1}{n+x}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,$$

即 $v_n(x)\rightrightarrows 0$ $(x\in[0,+\infty))$. 因此, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/\left(n(n+x)\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. □

證明 (證二: 阿貝爾判別法) 設 $u_n(x)=(-1)^n/n$, $v_n(x)=1/(n+x)$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,+\infty)$. 因 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/n$ 收斂且與 x 無關, 故在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. 另一方面, 對一切 $x\in[0,+\infty)$, $v_n(x)=1/(n+x)$ 關於 n 是單調遞減的, 並且對一切 $x\in[0,+\infty)$ 及 $n\in\mathbb{N}$,

$$|v_n(x)|=\left|\frac{1}{n+x}\right|\leq\frac{1}{n}\leq 1,$$

即 $\{v_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致有界. 因此, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n/\left(n(n+x)\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. □

例 2.22 證明含參變數無窮積分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收斂.

證明 因爲對一切 $x\in\mathbb{R}$, 均有

$$\left|\frac{\cos xy}{1+y^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2},$$

並且無窮積分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$ 收斂, 所以依魏爾斯特拉斯判別法 (準則 2.15) 即得結論. □

例 2.23 證明含參變數瑕積分

$$\int_0^1\frac{y^\alpha\sin\frac{1}{y}}{1+x}\,\mathrm{d}y\quad(\alpha\in(0,1])$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂.

證明 (證一: 狄利克雷判別法) 令

$$f(x,y)=\sin\frac{1}{y},\quad g(x,y)=\frac{y^\alpha}{1+x},$$

則

$$\left|\int_0^1\sin\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=1,$$

即含參變數瑕積分 $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致有界. 另一方面, 對每個固定的 $x\in[0,+\infty)$, $g(x,y)$ 是 y 的單調遞增函數, 且

$$\sup_{x\geq 0}g(x,y)=g(0,y)=y^\alpha\to 0\quad(y\to 0^+),$$

故 $g(x,y)\underset{y\to 0^+}{\rightrightarrows}0$ $(x\in[0,+\infty))$. 因此, $\int_0^1 f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. □

證明 (證二: 阿貝爾判別法)　令

$$f(x,y)=\sin\frac{1}{y},\quad g(x,y)=\frac{y^{\alpha}}{1+x},$$

則

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\sin\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u,$$

上式右端絕對收斂, 故收斂. 又因爲其收斂性不依賴於 x, 所以 $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. 另一方面, 對每個固定的 $x\in[0,+\infty)$, $g(x,y)$ 是 y 的單調遞增函數 (因爲 $\alpha>0$), 並且對一切 $x\geq 0$ 及 $y\in(0,1]$,

$$0<g(x,y)\leq\frac{1}{1+x}\leq 1,$$

故 $g(x,y)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致有界. 因此, $\int_0^1 f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收斂. □

3　一致收斂的函數族之極限函數的性質

定理 3.1 (極限函數的連續性)　設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 X 至 Y 的函數族, t_0 是 T 的聚點. 若對一切 $t\in T$, $f_t(x)$ 在 X 上均爲連續函數, 且 $f_t(x)\underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x\in X)$, 則 $f(x)$ 在 X 上亦爲連續函數.

證明　任取 $x_0\in X$, 對所有 $\varepsilon>0$, 因 $f_t(x)\underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x\in X)$, 故存在 t_0 的去心鄰域 $B'_\delta(t_0)$, 當 $t\in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x\in X$, 有

$$|f_t(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取一點 $t'\in B'_\delta(t_0)$, 由 $f_{t'}(x)$ 在 $x_0\in X$ 處連續, 可知存在 $r>0$, 當 $x\in B_r(x_0)\cap X$ 時, 有

$$|f_{t'}(x)-f_{t'}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 當 $x\in B_r(x_0)\cap X$ 時, 有

$$|f(x)-f(x_0)|\leq|f(x)-f_{t'}(x)|+|f_{t'}(x)-f_{t'}(x_0)|+|f_{t'}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 f 在 x_0 處連續. 依 $x_0\in X$ 的任意性, 可知 f 在 X 上連續. □

註記 3.2　上述定理的敘述可用下列交換圖表示:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, rightrightarrows, "t\to t_0"] \arrow[d, "x\to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "\exists B'_r(x_0)", "x\to x_0"'] \arrow[dl, dashed, no head] \\
f_t(x_0) \arrow[r, "\exists B'_\delta(t_0)", "t\to t_0"'] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

系理 3.3 (一致收斂的函數項級數之和函數的連續性)　設 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 爲自 V 至 W 的函數項級數. 若對每個 $n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)$ 在 V 上連續, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 V 上一致收斂, 則其和函數在 V 上連續.

定理 3.4 (極限 $\leftrightarrow$ 極限[5]) 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自 $X \setminus \{x_0\}$ 至完備空間 Y 的函數族, t_0 是 T 的聚點, x_0 是 X 的聚點. 若 $f_t(x) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x \in X)$, 而對於每個 $t \in T$, $\lim_{x\to x_0} f_t(x) = g_t$ 存在, 則累次極限

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{t\to t_0} f_t(x)\right) \quad 和 \quad \lim_{t\to t_0}\left(\lim_{x\to x_0} f_t(x)\right)$$

皆存在且相等.

證明 給定 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f_t(x) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x \in X \setminus \{x_0\})$, 所以存在 t_0 的去心鄰域 $B'_\delta(t_0)$, 當 $t', t'' \in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x \in X$, 均有

$$|f_{t'}(x) - f_{t''}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

於上述不等式中, 取極限 $x \to x_0$, 則對所有 $t', t'' \in B'_\delta(x_0)$, 都有

$$|g_{t'} - g_{t''}| \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

由於 Y 是完備空間, 依函數極限存在的柯西準則, 極限 $\lim_{t\to t_0} g_t = L$ 存在. 斷言: $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

固定 $t'' \in T$, 由 $\lim_{x\to x_0} f_{t''}(x) = g_{t''}$, 存在 x_0 的去心鄰域 $B'_\eta(x_0)$, 使得對一切 $x \in X \cap B'_\eta(x_0)$, 均有

$$|f_{t''}(x) - g_{t''}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

固定著 t'', 並在 (2) 和 (3) 中取極限 $t' \to t_0$, 得

$$|f(x) - f_{t''}(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5}$$

$$|L - g_{t''}| \le \frac{\varepsilon}{3}, \tag{6}$$

並且不等式 (5) 對於一切 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 皆成立. 綜合 (4)—(6), 則對一切 $x \in X \cap B'_\eta(x_0)$, 有

$$|f(x) - L| \le |f(x) - f_{t''}(x)| + |f_{t''}(x) - g_{t''}| + |g_{t''} - L| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

因此, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. $\square$

註記 3.5 (1) 若上述定理額外要求極限 $\lim_{t\to t_0} g_t = L$ 存在, 則不需要假設空間 Y 是完備的, 仍可推得 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

(2) 上述定理的敘述可用以下交換圖表示:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "t\to t_0"] \arrow[d, "x\to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "x\to x_0"] \arrow[dl, dash, dashed] \\
g_t \arrow[r, "t\to t_0"'] & L
\end{tikzcd}$$

[5]我們亦可把此定理中的 $f_t(x)$ 看作 t 和 x 的雙變數函數, 即得到雙變數函數累次極限可交換的一個充分條件. 特別地, 將此定理中的參數空間換成正整數集, 便得函數序列版本的累次極限可交換性.

其中, 虛線上方的是給定條件, 虛線下方的是定理結論.

系理 3.6 (極限 $\leftrightarrow$ 級數) 設 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 爲自 V 至 W 的函數項級數, $x_0 \in V$ 是 V 的聚點. 若對每個 $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x)$ 在 V 上連續, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上一致收斂, 則

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \tag{7}$$

注意 3.7 若系理 3.6 的 x_0 不屬於 V, 則只要多滿足一個條件——對每個 $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to x_0} u_n(x)$ 都存在, 便仍可保證 (7) 成立.

註記 3.8 若在 X 上連續的函數族 $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ 當 $t \to t_0$ 時在 x_0 的某個鄰域內一致收斂於 $f(x)$ (此時也稱它在 x_0 處**局部一致收斂**), 則 $f(x)$ 在 x_0 處連續.

定義 3.9 設函數族 $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ (相應地, 函數項級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$) 在空間 X (相應地, V) 上有定義. 若對任意緊緻集 $K \subseteq X$ (相應地, $K \subseteq V$), $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ (相應地, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$) 在 K 上一致收斂, 則稱 $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ (相應地, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$) 在 X (相應地, V) **內閉一致收斂**.

註記 3.10 對於以開子集爲定義域的函數來說, 內閉一致收斂等價於局部一致收斂. 因此,

(1) 若對所有 $t \in T$, 函數 $f_t(x)$ 在開集 X 上連續, 且在 X 內閉一致收斂於 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 X 上連續.

(2) 若對每個 $n \in \mathbb{N}$, 函數 $u_n(x)$ 在開集 V 上連續, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 內閉一致收斂, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的和函數在 V 上連續.

定理 3.11 (含參變數函數族的狄尼定理) 設 $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ 爲自緊緻集 X 至 $\mathbb{R}$ 的函數族, $T \subseteq \mathbb{R}$, t_0 是 $\mathbb{R}$ 的聚點. 若

(1) 對所有 $t \in T$, $f_t(x)$ 在 X 上連續;

(2) 對一切 $x \in X$, $\lim_{t \to t_0} f_t(x) = f(x)$;

(3) 在 t_0 的某一側 ($t > t_0$ 或 $t < t_0$)[6], 對一切 $x \in X$, $f_t(x)$ 關於 t 是單調函數,

則在該側, 當 $t \to t_0$ ($t > t_0$ 或 $t < t_0$) 時, $f_t(x)$ 在 X 上一致收斂於 $f(x)$.

證明 僅證明 $f_t(x)$ 在 t_0 右側 (相應地, 左側) 是關於 t 的增函數的情形. 令 $g_t(x) = f(x) - f_t(x)$, 則 $g_t(x) \geq 0$, 且在 t_0 的右側 (相應地, 左側), 對一切 $x \in X$, $g_t(x)$ 是 t 的減函數, 並且

$$\lim_{t \to t_0^+} g_t(x) = 0 \quad \left(\text{相應地}, \lim_{t \to t_0^-} g_t(x) = 0 \right).$$

給定 $\varepsilon > 0$, 令

$$U_t = \{x \in X \mid g_t(x) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid f(x) - f_t(x) < \varepsilon\}.$$

[6] 如果 $t_0 = +\infty$ 或 $t_0 = -\infty$, 那麼當然也就只有一側.

依 g_t 的連續性, 對所有 $t \in T$, U_t 是 X 的開子集. 又由於 g_t 是 t 的減函數, 若 $t \geq s > t_0$ (相應地, $s \leq t < t_0$), 則 $g_s \geq g_t$, 因此

$$x \in U_s \implies g_s(x) < \varepsilon \implies g_t(x) \leq g_s(x) < \varepsilon \implies x \in U_t,$$

即 $U_s \subseteq U_t$.

另一方面, 由於對一切 $x \in X$, $\lim_{t \to t_0} g_t(x) = 0$, 於 t_0 右側 (相應地, 左側) 存在充分靠近 t_0 的 t, 使得 $g_t(x) < \varepsilon$, 因此 $X \subseteq \bigcup_{t \in T} U_t$. 由 X 的緊緻性, 存在 $t_1, \ldots, t_k \in T$, $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{t_i}$. 根據 U_t 在 t_0 右側 (相應地, 左側) 關於 t 的單調性, 可令 $t^* = \max\{t_1, \ldots, t_k\}$, 則有 $X \subseteq U_{t^*}$, 即對一切 $x \in X$, 都有 $g_{t^*}(x) < \varepsilon$.

現, 對 t_0 右側 (相應地, 左側) 所有更大的 t, $g_t(x) \leq g_{t^*}(x) < \varepsilon$, 因此在右側 (相應地, 左側) 存在 t_0 的某個去心鄰域, 使得對該鄰域內所有 t, 都有

$$\sup_{x \in X} g_t(x) < \varepsilon, \text{ 即 } \sup_{x \in X} \left(f(x) - f_t(x)\right) \leq \varepsilon.$$

因此,

$$\lim_{\substack{t \to t_0^+ \\ (\text{或 } t \to t_0^-)}} \sup_{x \in X} |f(x) - f_t(x)| = 0,$$

即 $f_t(x) \underset{\substack{t \to t_0^+ \\ (\text{或 } t \to t_0^-)}}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x \in X)$ □

系理 3.12 (函數序列的狄尼定理) 如果一個緊緻集上的的連續函數序列在該緊緻集上單調收斂於連續函數, 那麼該序列一致收斂.

系理 3.13 (函數項級數的狄尼定理) 設函數項級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在緊緻集 $K \subset V$ 上收斂, 其中對每個 $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x)$ 是 V 上的連續且非負的實函數. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上連續, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 V 上一致收斂.

定理 3.14 (極限 $\leftrightarrow$ 積分 (I)) 設 $\{f_t(x)\}_{t \in T}$ 爲自閉區間 $[a, b]$ 至 $\mathbb{R}$ 的含參變數函數族, t_0 是 T 的聚點. 若對所有 $t \in T$, $f_t(x)$ 在 $[a, b]$ 上可積, 且 $f_t(x) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(x \in [a, b])$, 則極限函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可積, 並且

$$\int_a^b \left(\lim_{t \to t_0} f_t(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f_t(x) \, \mathrm{d}x.$$

證明 設 $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 爲 $[a, b]$ 的劃分, 樣本點集爲 $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, 考慮 $S(P, \Xi, f_t) = \sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i) \Delta x_i$ $(t \in T)$ 及 $S(P, \Xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$. 對任何 $\varepsilon > 0$, 因爲 $f_t(x) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f(x)$ $(t \to t_0)$, 所以存在 t_0 的去心鄰域 $B'_\delta(t_0)$, 當 $t \in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - f_t(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

因此, 當 $t \in B'_\delta(t_0)$ 時,

$$|S(P, \Xi, f) - S(P, \Xi, f_t)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f_t(\xi_i)\right) \Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f_t(\xi_i)| \, \Delta x_i < \varepsilon,$$

並且上述估計對於 $[a,b]$ 的劃分集 $\mathcal{P}=\{(P,\Xi)\}$ 中的任何劃分 (P,Ξ) 均成立, 因此 $S(P,\Xi,f_t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} S(P,\Xi,f)$ $((P,\Xi)\in\mathcal{P})$. 現, 令 $\|P\|\to 0$, 則依定理 3.4, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,\Xi,f) = \lim_{\|P\|\to 0}\lim_{t\to t_0} S(P,\Xi,f_t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{\|P\|\to 0} S(P,\Xi,f_t) = \lim_{t\to t_0}\int_a^b f_t(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

註記 3.15 上述定理的敍述可用下列交換圖表示:

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i =: S(P,\Xi,f_t) \arrow[r, "t\to t_0", shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "\|P\|\to 0"'] & S(P,\Xi,f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d, "\|P\|\to 0"] \\
\int_a^b f_t(x)\,\mathrm{d}x \arrow[r, "\exists B'_\delta(t_0)", "t\to t_0"'] & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{tikzcd}$$

系理 3.16 (級數 $\leftrightarrow$ 積分) 設 $\{u_n(x)\}$ 爲由閉區間 $[a,b]$ 上的可積函數組成的函數序列. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂, 則其和函數在 $[a,b]$ 上也可積, 並且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

註記 3.17 (1) 定理 3.14 及其系理可以推廣至黎曼-史蒂杰斯積分.

(2) 定理 3.14 及其系理中的函數也可以推廣至線性賦範空間之間的映射 $f_t: V\to W$, 其中 W 是完備空間.

定理 3.18 (極限 $\leftrightarrow$ 導數) 設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自有界凸集 V 至空間 W 的函數族, t_0 是 T 的聚點. 若對所有 $t\in T$, $f_t(x)$ 在 V 上可導, 並且函數族 $\{f'_t(x)\}_{t\in T}$ 當 $t\to t_0$ 時一致收斂於某函數 φ, 且函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 至少在一點 $x_0\in V$ 處收斂, 則 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 X 上一致收斂於可導的函數 f, 並且 $f'=\varphi$.

證明 先作如下估計:

$$\begin{aligned}
\|f_{t'}(x)-f_{t''}(x)\| &\le \|\left(f_{t'}(x)-f_{t''}(x)\right)-\left(f_{t'}(x_0)-f_{t''}(x_0)\right)\| + \|f_{t'}(x_0)-f_{t''}(x_0)\| \\
&\le \sup_{\xi\in\overline{x_0,x}}\|f'_{t'}(\xi)-f''_{t''}(\xi)\|\|x-x_0\| + \|f_{t'}(x_0)-f_{t''}(x_0)\| = \Delta(x,t',t''),
\end{aligned}$$

其中 $\overline{x_0,x} := \{(1-t)x_0+tx : 0\le t\le 1\}$. 因爲 $\{f'_t(x)\}_{t\in T}$ 在 V 上當 $t\to t_0$ 時一致收斂, 並且 $f_t(x_0)$ 作爲 t 的函數當 $t\to t_0$ 時極限存在, 而 $\|x-x_0\|$ 當 $x\in X$ 時是有界量 (因爲 X 是有界集), 所以對所有 $\varepsilon>0$, 存在 t_0 的去心鄰域 $B'_\delta(t_0)$, 當 $t',t''\in B'_\delta(t_0)$ 時, 對一切 $x\in X$, 均有 $\Delta(x,t',t'')<\varepsilon$. 因此, 函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 也滿足柯西準則的條件, 從而當 $t\to t_0$ 時一致收斂於某函數 f.

另一方面, 對於 $x, x+h\in X$, $t',t''\in T$,

$$\begin{aligned}
&\|(f_{t'}(x+h)-f_{t'}(x)-f'_{t'}(x)h-(f_{t''}(x+h)-f_{t''}(x)-f'_{t''}(x)h)\| \\
=\ &\|(f_{t'}-f_{t''})(x+h)-(f_{t'}-f_{t''})(x)-(f_{t'}-f_{t''})'(x)h\| \\
\le\ &\sup_{0<\theta<1}\|(f_{t'}-f_{t''})'(x+\theta h)\|\|h\| + \|(f_{t'}-f_{t''})'(x)\|\|h\| \\
=\ &\left(\sup_{0<\theta<1}\left\|f'_{t'}(x+\theta h)-f'_{t''}(x+\theta h)\right\| + \left\|f'_{t'}(x)-f'_{t''}(x)\right\|\right)\|h\|.
\end{aligned}$$

依 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 當 $t\to t_0$ 時在 X 上的一致收斂性, 若取固定的 $x\in V$ 並考慮函數

$$F_t(h)=\frac{f_t(x+h)-f_t(x)-f_t'(x)h}{\|h\|}$$

組成的函數族 $\{F_t(h)\}_{t\in T}$, 則對所有 $x+h\in V$ 的 h, $h\neq 0$, 該函數族當 $t\to t_0$ 時一致收斂.

因爲函數 $f_t(x)$ 在點 $x\in V$ 處可導, 所以當 $h\to 0$ 時, $F_t(h)\to 0$, 而由於當 $t\to t_0$ 時, $f_t(x)\to f(x)$, $f_t'(x)\to\varphi(x)$, 所以

$$\lim_{t\to t_0}F_t(h)=F(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{\|h\|}.$$

依定理 3.4, 有

$$\lim_{h\to 0}F(h)=\lim_{h\to 0}\lim_{t\to t_0}F_t(h)=\lim_{t\to t_0}\lim_{h\to 0}F_t(h)=\lim_{t\to t_0}0=0,$$

因此, 函數 f 在點 $x\in V$ 處可導, 並且 $f'(x)=\varphi(x)$. □

註記 3.19 上述定理的敍述可用下列圖表示:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{f_t(x+h)-f_t(x)-f_t'(x)h}{|h|} =: F_t(h) \arrow[r, Rightarrow, "t\to t_0"] \arrow[d, "h\to 0"'] & F(h) := \dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|} \arrow[d, "h\to 0"] \\
0 \arrow[r, "\exists B'_\delta(t_0)", "t\to t_0"'] \arrow[ur, dashed, no head] & 0
\end{tikzcd}$$

系理 3.20 (級數 $\leftrightarrow$ 導數) 設 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲自有界凸集 V 至完備空間 W 的可導函數序列, 函數項級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 至少在一點 $x_0\in V$ 收斂, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$ 在 V 上一致收斂, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 V 上一致收斂, 其和在 X 上可導, 並且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x).$$

系理 3.21 (冪級數的導數與積分) 若冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的收斂圓盤 $D\subseteq\mathbb{C}$ 不退化成單點集 $\{z_0\}$, 則該級數的和 $s(z)$ 在圓盤 D 內可導, 並且

$$s'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1},$$

此式對於在區間 (z_0-R,z_0+R) 內收斂的實變數實值冪級數仍成立. 除此之外, 函數 $s:D\to\mathbb{C}$ 在任何一條逐段光滑道路 $\gamma:[0,1]\to D$ 上可積. 若 $z(0)=z_0$, $z(1)=z$, 則

$$\int_\gamma s(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

註記 3.22 上述系理中,

$$\int_\gamma s(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^1 s(z(\theta))z'(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

特別地, 若在實軸上的區間 (x_0-R,x_0+R) 內, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, 則

$$\int_{x_0}^{x}s(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

證明　因爲 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \lim_{n\to+\infty}$, 所以依柯西-阿達馬公式 $R = \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$, 透過逐項求導運算從冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 得到的冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$, 其收斂圓盤與原冪級數的收斂圓盤相同, 並且冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ 在 D 內的任何一個閉圓盤 K 上一致收斂. 因爲系理 3.20 現在亦適用於此級數, 故得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}.$$

如果 $\gamma : [0,1] \to D$ 是逐段光滑道路, 那麼存在圓盤 $K \subset D$ 使 $\gamma([0,1]) \subset K$. 因爲冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在 K 上一致收斂, 所以在等式

$$s(z(\theta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z(\theta)-z_0)^n$$

中, 右邊的由閉區間 $[0,1]$ 上的連續函數組成的函數項級數在該區間上一致收斂於連續函數 $s(z(\theta))$. 用閉區間 $[0,1]$ 上的連續函數 $z'(\theta)$ 與該等式相乘, 不會破壞該等式本身及該函數項級數的一致收斂性, 故依系理 3.16, 得

$$\int_0^1 s(z(\theta))z'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 c_n(z(\theta)-z_0)^n z(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

計算右式的積分即得結論. □

我們不加證明地補充下列兩個結論:

定理 3.23 (極限 $\leftrightarrow$ 積分 (II))　設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自閉區間 $[a,b]$ 至 $\mathbb{R}$ 的含參變數函數族, t_0 是 T 的聚點. 若

(1) 對所有 $t \in T$, $f_t(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積;

(2) 當 $t \to t_0$ 時, $f_t(x)$ 在 $[a,b]$ 上點態收斂於 $f(x)$;

(3) f 在 $[a,b]$ 上黎曼可積;

(4) $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界,

則有

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{t\to t_0} f_t(x)\right)\mathrm{d}x.$$

系理 3.24 (極限 $\leftrightarrow$ 積分 (III))　設 $\{f_t(x)\}_{t\in T}$ 爲自閉區間 $[a,b]$ 至 $\mathbb{R}$ 的含參變數函數族, $T \subseteq \mathbb{R}$ 是一個區間, t_0 是 T 的聚點. 若

(1) 對所有 $t \in T$, $f_t(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積;

(2) 當 $t \to t_0$ 時, $f_t(x)$ 在 $[a,b]$ 上點態收斂於 $f(x)$;

(3) f 在 $[a,b]$ 上黎曼可積;

(4) 在 t_0 的某一側, 固定 $x \in [a,b]$, $f_t(x)$ 是關於 t 的單調增函數,

則有

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{t\to t_0} f_t(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

定理 3.25 (極限函數的連續性) 設函數 $f(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, 其中 $E\subset\mathbb{R}$ 是一個區間. 若 $f(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上連續, 且含參變數反常積分 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂於函數 $F(x)$, 則 $F(x)$ 在 E 上連續.

證明 對所有 $t\in(c,\omega)$, 令 $F_t(x)=\int_c^t f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 則 $F_t(x)$ 在 E 上連續, 並且當 $t\to\omega$ 時, $F_t(x)\rightrightarrows F(x)$ $(x\in E)$. 依定理 3.1, 可知 $F(x)$ 在 E 上連續. □

定理 3.26 (極限 $\leftrightarrow$ 反常積分) 設 $f(x,y)$ 在 $E\times[c,\omega)$ 上有定義, $x_0\in E$ 是 E 的聚點. 若對所有 $d\in(c,\omega)$, 當 $x\to x_0$ 時, $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(y)$ $(y\in[c,d])$, 並且 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂, 則 $\int_a^\omega \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ 收斂, 並且

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^\omega \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^\omega \left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)\,\mathrm{d}y.$$

證明 對所有 $d\in(c,\omega)$, 定義 $F_d(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$. 因爲 $f(x,y)\underset{x\to x_0}{\rightrightarrows}\varphi(y)$ $(y\in(c,d))$, 所以依定理 3.14, 有

$$\lim_{x\to x_0}F_d(x)=\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

又因 $\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 E 上一致收斂, 故

$$\lim_{d\to\omega}F_d(y)=\lim_{d\to\omega}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

再依定理 3.4, 得 $\int_c^\omega\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\lim_{d\to\omega}\int_c^d\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ 收斂, 且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \lim_{x\to x_0}\lim_{d\to\omega}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{d\to\omega}\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ &=\lim_{d\to\omega}\int_c^d\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\int_c^\omega\varphi(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

系理 3.27 上述定理的集合 E 沒有要求要是一個區間, 所以對於 $E=\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ 仍成立, 即該定理亦適用於函數序列.

系理 3.28 設對於 $x\in E\subset\mathbb{R}$, 實函數 $f(x,y)$ 在區間 $[c,\omega)$ 上非負且連續. 若

(1) 固定 y, 函數 $f(x,y)$ 是 x 的單調遞增函數, 且在 $[c,\omega)$ 上趨近於函數 $\varphi(y)$;

(2) φ 在 $[c,\omega)$ 上連續;

(3) $\int_c^\omega\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ 收斂,

那麼

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^\omega \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^\omega \left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)\,\mathrm{d}y.$$

證明 依狄尼定理 (定理 3.11) 可知, 在每一個區間 $[c,d]\subset[c,\omega)$ 上, 均有 $f(x,y)\underset{d\to\omega}{\rightrightarrows}\varphi(y)$. 從不等式 $0\le f(x,y)\le\varphi(y)$ 和魏爾斯特拉斯判別法可以推得 $f(x,y)$ 在 $[c,\omega)$ 上關於 x 一致收斂, 因此定理 3.26 的兩個條件均成立, 故得結論. □

定理 3.29 (導數 $\leftrightarrow$ 反常積分) 若

(1) 函數 $f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,\omega)$ 上連續;

(2) 積分 $\Phi(x)=\int_c^\omega\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂;

(3) 積分 $F(x)=\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 至少在一點 $x_0\in[a,b]$ 處收斂,

則積分 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂, 同時 $F(x)$ 可導, 且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\int_c^\omega\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

證明 依條件 (1), 對任意 $d\in[c,\omega)$, 函數

$$F_d(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在區間 $[a,b]$ 上有定義且可導. 依萊布尼茲公式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_d(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

依條件 (2), $F_d'(x)\underset{d\to\omega}{\rightrightarrows}\Phi(x)$ $(x\in[a,b])$. 依條件 (3), 當 $d\to\omega$ 時, $F_d(y_0)$ 極限存在. 因此, 依定理 3.18, $F_d(x)\underset{d\to\omega}{\rightrightarrows}F(x)$ $(x\in[a,b])$, 並且 F 在 $[a,b]$ 上可導, 及 $F'(x)=\Phi(x)$. □

定理 3.30 (含參變數反常積分的狄尼定理) 設函數 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,\omega)$ 上連續且不變號, 再設對所有 $x\in[a,b]$, $F(x)=\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 收斂, 且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂.

證明 設對所有 $(x,y)\in[a,b]\times[c,\omega)$, $f(x,y)\ge0$. 對於 $d\in[c,\omega)$, 令

$$F_d(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

則對所有 $x\in[a,b]$, $\{F_d(x)\}_{d\in[c,\omega)}$ 是關於 d 單調遞增的函數族, 且

$$\lim_{d\to\omega}F_d(x)=F(x).$$

因此, 依含參變數函數族的狄尼定理 (定理 3.11), 可知 $F_d(x)$ 當 $d\to\omega$ 時在 $[a,b]$ 上一致收斂於 $F(x)$. □

定理 3.31 (積分 $\leftrightarrow$ 反常積分) 設函數 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,\omega)$ 上連續, 且含參變數反常積分 $F(x)=\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂, 則函數 F 在 $[a,b]$ 上可積, 且

$$\int_a^b\int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_c^\omega\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

證明　對於 $d \in [c, \omega)$, 依條件 (1) 及含參變數常義積分的積分交換性 **??**, 可得

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

依條件 (2) 及定理 3.14, 於上式兩端取極限 $d \to \omega$, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{d\to\omega} \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to\omega} \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{d\to\omega} \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^\omega \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

系理 3.32　若

(1) 函數 $f(x,y)$ 在 $[a,b] \times [c,\omega)$ 上連續且非負;

(2) 積分 $F(x) = \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上連續,

則

$$\int_a^b \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^\omega \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

證明　從 $f(x,y)$ 的連續性可推出, 對任意 $d \in [c,\omega)$, 積分 $F_d(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在區間 $[a,b]$ 上是連續函數. 再從 $f(x,y)$ 的非負性可推出, 當 $d_1 \le d_2$ 時, $F_{d_1}(x) \le F_{d_2}(x)$. 依條件 (2) 及狄尼定理, 當 $d \to \omega$ 時, $F_d(x) \rightrightarrows F(x)$ $(x \in [a,b])$. 於是, 定理 3.31 的條件成立, 故得結論. □

定理 3.33 (反常積分 ↔ 反常積分)　若

(1) 函數 $f(x,y)$ 在 $[a,\omega') \times [c,\omega)$ 上連續;

(2) 積分 $F(x) = \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在任何閉區間 $[a,b] \subset [a,\omega')$ 上一致收斂;

(3) 積分 $\Phi(y) = \int_a^{\omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在任何閉區間 $[c,d] \subset [c,\omega)$ 上一致收斂;

(4) 兩累次積分

$$\int_a^{\omega'} \int_c^\omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^\omega \int_a^{\omega'} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

至少存在一者,

則有

$$\int_a^{\omega'} \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^\omega \int_a^{\omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

證明　不妨設條件 (4) 中的第一個累次積分存在. 依首兩個條件及定理 3.31 可知, 對所有 $b \in [a,\omega')$, 有

$$\int_a^b \int_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^\omega \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

令

$$\Phi_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

對任意固定的 $b \in [a,\omega')$, 函數 Φ_b 在 $[c,\omega)$ 上有定義, 而依 f 的連續性, 函數 Φ_b 在 $[c,\omega)$ 上連續. 再依條件 (3), 當 $b \to \omega'$ 時, 在任何區間 $[c,d] \subset [c,\omega)$ 上, $\Phi_b(y) \rightrightarrows \Phi(y)$. 又因爲

$$|\Phi_b(y)| \le \int_a^{\omega'} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x := G(y),$$

而反常積分 $\int_c^{\omega} G(y)\,\mathrm{d}y$ 收斂, 所以依含參變數反常積分的魏爾斯特拉斯判別法, 可知 $\int_c^{\omega} \Phi_b(y)\,\mathrm{d}y$ 關於 b 一致收斂. 於是, 定理 3.14 的條件成立, 從而

$$\lim_{b\to\omega'} \int_c^{\omega} \Phi_b(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^{\omega} \Phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

系理 3.34 若

(1) 函數 $f(x,y)$ 在 $[a,\omega') \times [c,\omega)$ 上連續且非負;

(2) 積分

$$F(x) = \int_c^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \Phi(y) = \int_a^{\omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

分別在 $[a,\omega')$, $[c,\omega)$ 上連續;

(3) 兩個累次積分

$$\int_a^{\omega'} \int_c^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^{\omega} \int_a^{\omega'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

至少存在一者,

則另一個累次積分亦存在, 並且它們相等.

證明 與系理 3.32 的證明一樣, 可從條件 (1),(2),(3) 及狄尼定理確定定理 3.33 的條件 (2),(3) 成立. 又由 f 的非負性可知, 條件 (4) 與定理 3.33 的條件 (4) 相同. 於是, 定理 3.33 的所有條件均成立, 故得結論. □

例 3.35 (極限函數不連續) 函數序列 $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ 在 $(-1,1]$ 上點態收斂於函數

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

注意到對每個 $n \in \mathbb{N}$, f_n 在 $(-1,1]$ 上皆連續, 但極限函數 f 在 $x=1$ 處不連續, 因此 f_n 在 $(-1,1]$ 上不一致收斂於 f.

例 3.36 (極限函數連續) 因爲

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

所以函數序列 $f_n(x) = x/n$ $(n \in \mathbb{N})$ 在 $[-1,1]$ 上一致收斂於 $f(x) = 0$, 並且 f 是 $[-1,1]$ 上的連續函數.

例 3.37 (極限與積分不可換) 設

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{x}{t^2}, & x \in \left[0, \frac{t}{2}\right], \\ -\frac{1}{t^2}(x-t), & x \in \left[\frac{t}{2}, t\right], \\ 0, & x \in [t, 1], \end{cases}$$

注意到當 $t \to 0^+$ 時, 函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in(0,1]}$ 在 $[0,1]$ 上點態收斂於 0. 而

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 f_t(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot t \cdot \frac{1}{2t} = \frac{1}{4},$$

但

$$\int_0^1 \lim_{t\to 0^+} f_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

因此, 函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in(0,1]}$ 當 $t \to 0^+$ 時不一致收斂於 0.

例 3.38 (極限與積分可換) 考慮

$$I = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x,$$

因爲對一切 $x \in [0,1]$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$0 \le \frac{x}{n(n+x)} \le \frac{1}{n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ 收斂, 所以依魏爾斯特拉斯判別法, 可知函數項級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} x/[n(n+x)]$ 在 $[0,1]$ 上一致收斂, 從而可逐項積分, 印次

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(1+n) + \ln n\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(1+n)\right) = \gamma \quad \text{(歐拉常數)}. \end{aligned}$$

例 3.39 (極限與導數不可換) 考慮定義在 $\mathbb{R}$ 上的含參變數函數族 $\{f_t(x)\}_{t\in(0,+\infty)}$, 其中

$$f_t(x) = \sqrt{t}\sin\frac{x}{t}.$$

對一切 $x \in \mathbb{R}$, 當 $t \to 0^+$ 時, $f_t(x)$ 是無窮小量與有界量之積, 故收斂於 $f(x) \equiv 0$. 但對於 $t \in (0, +\infty)$, 有

$$f_t'(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\frac{x}{t},$$

容易看出在許多 x 處, $f_t'(x)$ 當 $t \to 0^+$ 時不收斂, 也因此 $\{f_t'(x)\}_{t\in(0,+\infty)}$ 不收斂於 $f'(x) \equiv 0$.

例 3.40 (極限與導數不可換) 考慮含參變數函數族

$$f_t(x) = \frac{2x}{\pi}\tan^{-1} tx \quad (t \in \mathbb{R}),$$

顯然對一切 $x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{t \to +\infty} f_t(x) = |x| := f(x).$$

而對所有 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$f_t'(x) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} tx + \frac{2tx}{\pi\left(1 + t^2 x^2\right)}.$$

不難看出 $\{f_t'(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ 當 $t \to +\infty$ 時在 $\mathbb{R}$ 上收斂, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處不可導.

例 3.41 (極限與導數可換)　證明函數

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

在 $(1, +\infty)$ 上無窮次可導.

證明　任取 $\delta_0 > 0$, 已知 ζ 在 $(1 + \delta_0, +\infty)$ 上一致收斂. 由於

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{n^x}\right) = -\frac{\ln n}{n^x} \in \mathscr{C}^0(0, +\infty),$$

並且對一切 $x \in (1 + \delta_0, +\infty)$, 有

$$\left| -\frac{\ln n}{n^x} \right| < \frac{\ln n}{n^{1+\delta_0}}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\delta_0}}$$

收斂, 故依魏爾斯特拉斯判別法, 可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n)/n^x$ 在 $(1 + \delta_0, +\infty)$ 上一致收斂, 也因此 $\zeta \in \mathscr{C}^1(1 + \delta_0, +\infty)$, 且

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x}.$$

由於 ζ' 逐項求導後得到的 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln^2 n\right)/n^x$ 在 $(1 + \delta_0, +\infty)$ 上一致收斂, 因此 $\zeta \in \mathscr{C}^2(1 + \delta_0, +\infty)$. 反覆此操作, 可知 ζ 在 $(1 + \delta_0, +\infty)$ 上具有任意皆導數. 再依 δ_0 的任意性可知 $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(1 + \infty)$. □

例 3.42 (處處連續但處處不可導的函數)　(1) (范·德·瓦爾登) 記函數 $\tilde{f} : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = |x|$, 然後將 $\tilde{f}$ 以 1 爲週期延拓到 $\mathbb{R}$ 上並記作 f, 則和函數

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(4^n x)}{4^n}$$

的和函數在 $\mathbb{R}$ 上連續, 但在 $\mathbb{R}$ 內處處不可導.

(2) (魏爾斯特拉斯) 構造

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right),$$

其中 $0 < a < 1$, b 爲正奇數, 並且

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

那麼 f 在 $\mathbb{R}$ 上處處連續且處處不可導.

例 3.43 應用含參變數積分理論, 計算狄利克雷積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

解 設

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

- 由於反常積分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ 收斂, 從而它關於 α 一致收斂.
- 又 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 對一切 $\alpha \in (0, +\infty)$ 關於 x 單調遞減, 且對所有 $\alpha \in (0, +\infty)$ 及 $x \in [0, +\infty)$, 有 $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| \le 1$.

依阿貝爾判別法, 可知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ 關於 $\alpha \in (0, +\infty)$ 一致收斂. 又因爲對所有 $\alpha \in (0, +\infty)$,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right) = -\mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x,$$

且對 $\alpha_0 > 0$, $\int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收斂, 從而對一切 $\alpha \in (0, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos x \Big|_{x=0}^{x \to +\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= -1 + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \Big|_{x=0}^{x \to +\infty} + \alpha^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \, \mathrm{d}x = -1 - \alpha^2 \cdot I(\alpha), \end{aligned}$$

即

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1 + \alpha^2},$$

於是

$$I(\alpha) = -\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{1 + \alpha^2} = -\tan^{-1} \alpha + C,$$

其中 C 爲常數. 由於對一切 $\alpha > 0$, 有

$$|I(\alpha)| = \left| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha},$$

因此

$$0 = \lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\tan^{-1} \alpha + C \right) = -\frac{\pi}{2} + C,$$

從而 $C = \pi/2$. 又注意到 $I(\alpha)$ 於 $\alpha = 0$ 處右連續, 因此有

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to 0^+} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

附錄: 其它極限過程的交換

若天賜良緣, 他日將補完這個部分!

参考資料

[1] William R. Wade. *An Introduction to Analysis*. 4th ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

[2] Vladimir A. Zorich. *数学分析 (第二卷)*. 中文. 李植 譯. 原標題: Mathematical Analysis by V. A. Zorich (Part II, 7th expanded edition). 高等教育出版社, 2019.

[3] 李逸. *基本分析讲义*. 第 2.10 版. 东南大学数学学院, 2021.

[4] Tom M. Apostol. *数学分析*. 中文. 邢富冲, 邢辰, 李松洁, 贾婉丽 譯. 原標題: Mathematical Analysis, Second Edition. 机械工业出版社, 2006.

[5] Walter Rudin. *数学分析原理*. 中文. 赵慈庚, 蒋铎 譯. 原標題: Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed. 机械工业出版社, 2019.

[6] 伍胜健. *数学分析 (第二册)*. 第 1 版. 北京大学出版社, 2010.

[7] 伍胜健. *数学分析 (第三册)*. 第 1 版. 北京大学出版社, 2010.