荒謬的證明

Timo Chang
timo65537@protonmail.com

譯者: 仙女仙女

最後編輯: 2025 年 8 月 15 日

目錄

1 所有三角形都是等腰三角形

斷言 1 所有三角形都是等腰三角形.

證明 考慮任意三角形 $\triangle ABC$, 作 $\angle A$ 的角平分線及邊 $\overline{BC}$ 的中垂線, 兩線交於點 P, 記 $\overline{BC}$ 的中點爲 Q. 接著, 由 P 向邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 引垂線, 垂足分別爲 E 及 F. 最後, 作線段 $\overline{PB}$ 及 $\overline{PC}$. 結果如圖 1.1.

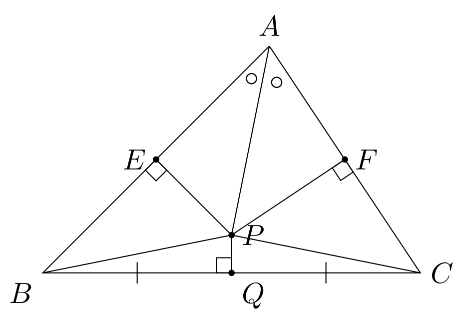

圖 1.1

觀察:

(a) 考慮 $\triangle BQP$ 和 $\triangle CQP$, 因爲 $|\overline{BQ}| = |\overline{CQ}|$, $\angle BQP = \angle CQP = 90°$, 且 $\overline{PQ}$ 爲這對三角形的公共邊, 所以依三角形的邊—角—邊 (SAS) 全等公理, 有 $\triangle BQP \cong \triangle CQP$, 那麼根據「兩全等三角形的對應邊相等」可知 $|\overline{BP}| = |\overline{CP}|$.

(b) 考慮 $\triangle EAP$ 和 $\triangle FAP$, 因爲 $\angle AEP = \angle AFP = 90°$, $\angle EAP = \angle FAP$, 且這對三角形共邊 $\overline{AP}$, 所以依三角形的角—角—邊 (AAS) 定理, 有 $\triangle EAP \cong \triangle FAP$, 那麼同樣地也能得到 $|\overline{EA}| = |\overline{FA}|$ 及 $|\overline{EP}| = |\overline{FP}|$.

(c) 考慮 $\triangle BEP$ 和 $\triangle CFP$, 因爲 $\angle BEP = \angle CFP = 90°$, 且由 (a) 和 (b) 得 $|\overline{BP}| = |\overline{CP}|$ 及 $|\overline{EP}| = |\overline{FP}|$, 所以依直角三角形的斜邊—直角邊 (RHS) 定理, 有 $\triangle BEP \cong \triangle CFP$, 那麼同樣可推得 $|\overline{BE}| = |\overline{CF}|$.

現, 由 (b) 和 (c), 得

$$|\overline{BA}| = |\overline{BE}| + |\overline{EA}| = |\overline{CF}| + |\overline{FA}| = |\overline{CA}|, \tag{1}$$

因此, $\triangle ABC$ 是等腰三角形. □

很顯然, 斷言 1 擺明就一派胡言, 但上述證明看起來也很完美無瑕且有說服力. 究竟問題在何處?

問題出在圖 1.1 的構造, 而實際上, 更精確的圖爲圖 1.2.

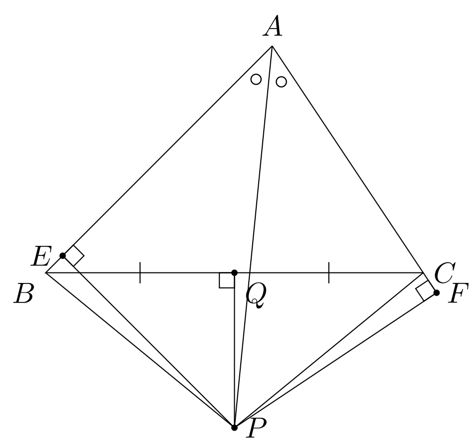

圖 1.2

問題的關鍵在於圖 1.1 和圖 1.2 中, 點 E 和點 F 的位置. 圖 1.1 中, 點 E 和點 F 的位置不正確, 而應該是點 E 要在 $\overline{BA}$ 上且點 F 落在 $\overline{CA}$ 的延長線上, 如圖 1.2 所示.

現在可以看出 (a), (b), (c) 的論證仍然成立, 即

$$|\overline{BE}| = |\overline{CF}| \quad \text{且} \quad |\overline{EA}| = |\overline{FA}|,$$

然而, 根據點 E 和點 F 的實際位置, 我們無法得出 $|\overline{BA}| = |\overline{CA}|$.

2 人人皆在同一天生日

斷言 2 人人皆在同一天生日.

證明 對人數 n 作數學歸納法. 當 $n=1$ 時, 命題顯然成立. 假設命題對於任意 k 人成立, 我們希望可以推出命題對於任意 $k+1$ 人仍成立, 即任意 $k+1$ 人在同一天生日.

將這 $k+1$ 人編號作 $1,2,3,\ldots,k,k+1$, 根據歸納假設, 他們之中的任 k 者在同一天生日.

- 考慮編號 1 至 k 的人們, 他們共有 k 人, 故必須在同一天生日;
- 再考慮編號 2 至 $k+1$ 的人們, 他們也共有 k 人, 因此也在同一天生日.

由於前 k 者同一天生日, 且後 k 者也在同一天生日, 又重疊計算的 $k-1$ 者 (編號 2 至 k) 保證此 $k+1$ 人在同一天生日, 因此, 依數學歸納原理, 我們得出「任一群人皆在同一天生日」的結論. $\square$

修但幾咧! 哩供「任一群人在同一天生日」係按抓? 簡直荒謬, 哇供哇係秦始皇攏猶有郎相信! 一定是有出了什麼問題, 難道剛剛的證明只是無稽之談嗎?

確實, 這壓根就是鬼話連篇——雖然上述證明看起來完美無瑕且淺顯易懂, 但是其中隱藏著一個非常致命的錯誤! 在歸納步驟中, 我們假設了任意 k 人皆在同一天生日, 接著依此歸納假設, 藉由重疊首 k 者 (編號 1 至 k) 和末 k 者 (編號 2 至 $k+1$) 來推得任 $k+1$ 人也必須如此. 然而, 我們忽視了一個至關重要的細節——從 $k=1$ 到 $k=2$ 沒有重疊之處. 這個情形下, 兩組人——僅由 1 號組成的單人組和 2 號組成的單人組便無交集, 所以我們根本推不出他們在同一天生日, 也因此以上論證無效.